

作図し証明する過程を重視する学習指導：
「線分の3等分の作図」における活動を中心にして

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2015-07-06 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 國宗, 進 メールアドレス: 所属:
URL	https://doi.org/10.14945/00008914

作図し証明する過程を重視する学習指導

—「線分の3等分の作図」における活動を中心にして—

國宗 進*

The Teaching Geometry Fostering Students' Ability of
Discovering, Reasoning and Proving in Lower Secondary School;
Focusing the Constructions of Trisecting a Segment

Susumu KUNIMUNE

Abstract

This Study focuses on fostering students' ability of *Discovering, reasoning and proving* in lower secondary school.

It is important for students to understand reasoning and proving. Though Japanese students have started to learn proving from the eighth grade, many students don't understand the significance of proof. To dispel these circumstances, it is effective that we provide the learning process which students are going to discover, reason, and prove some propositions in mathematics lessons.

By observing practical lessons and analyzing students' writings, we have already pointed out the geometrical constructions can play a key role with *Discovering, reasoning and proving* in mathematics lessons. In these lessons observed, many students had learned mathematics with great interest.

In this paper I clarify what and how students discover, reason, and prove some propositions and proofs, particularly with the geometrical constructions of trisecting a segment AB in the ninth grade, and show totally the propositions with the geometrical constructions which will be treated in lower secondary school.

キーワード：数学教育 発見 証明 作図 三等分

1. 研究の目的

論証に関する学習指導は、数学教育の大きな柱の一つである(宮川・溝口, 2014; 真野・國宗, 2014, 他). 特に中学校第2学年から本格的に始まる図形の論証の学習指導は、数学のよいモデルを与えているという点で、代数での論証と同様に重要な位置を占めている(小関, 1987; 國宗, 1987, 2007; 他). 図形の論証の教材としての価値については、「ユークリッド流の証明は、その生産物に価値があるというよりも、そこで行われる数学的推論が多くの子供達にとって重要である」(Hershkowitz, 1990)という共通認識がある.

本研究は、数学教育における論証の理解に関する研究の一環であり、本稿では特に「作図し証明する過程」を重視する授業の検討を通して、生徒自らが主体的・探究的に探究活動を行うような場をいかに用意確かな理解へと導くかについて考察する.

本稿の目的は、「発見し証明する過程」の重視を基本にして、「作図し証明する過程を重視する授業」において生徒が行う探究活動の程度を明らかにし、図形の論証の学習指導改善のための示唆を得ることである.

2. 研究の方法

- (1) 授業を構想する上での基本的な考え方として、「発見し証明する過程」の重視を中心に置くことの意義を明らかにし、生徒自らが「発見する対象」を明確にする.
- (2) 「線分の3等分の作図」に関して、生徒が見いだす内容の程度を分析し、その特徴を示す.
- (3) 中学校3ヶ年の図形学習のねらいをふまえて、「作図し証明する過程を重視する授業」において取り上げたい作図問題をまとめる.
- (4) 上記(1)～(3)の結果を踏まえて、「作図し証明する過程を重視する授業」の観点から、図形の論証の学習指導改善に関する示唆を得る.

* 静岡大学教育学部

3. 本研究の基本的な考え方

(1) 「発見し証明する過程」の重視

本研究では、「発見し証明する過程」を重視している。それは、数学の内容・方法の理解に有用であるとともに、生徒の数学学習への関心・意欲を喚起することにつながると考えていることによる。そしてまた、各種の調査でよく指摘される「記述式の問題に対する正答率の低さと無答率の高さ」という現状の改善にも大きく貢献すると考えていることによる。中2から本格的に始まる論証の学習指導に関して、とするとと三角形の合同条件を使った証明を型通りに記述させることに力点が置かれたり、他者が書いた証明の記述を読ませて何かを問うて生徒の理解度をみようとする傾向が感じられたりする中で、生徒自らがあることを見いだし、「あれ本当かな、やってみよう」という気持ちを持ってそれを追究し証明するという学習の場を保障する授業展開こそが、生徒の真の学習意欲を喚起することにつながるものと考え。そこには、学習者自らが追究する数学的活動のあるべき姿が観られるに違いない。本研究では、このような授業展開を「発見し証明する過程を重視する学習指導」と呼ぶ。

このような授業展開は、好ましい数学学習観の形成に欠かせない。「できあがった内容が与えられ、決まりきった方法による解法を身に付けるのが数学学習だ」という学習観からの脱却を目指したい。

以上のような基本的な考えに立って、本稿では、主として中学校での図形の学習指導に関して考察する。

日本の中学校数学科では、昭和30年代からユークリッド流の図形教育が行われている。そこでは、公理に相当する命題が、小学校での学習や直観的な確認の結果に基づいて導かれ、それを推論の根拠に位置づけて証明を進めていく。このような展開は、戦前の中等学校以来の実践・研究の積み上げによって構築されてきた日本流のものであり、ユークリッド流の図形教育ということができる。

ユークリッド流の幾何学教育に関連して、次の文言はフロイデンタールのものである。

「伝統的な幾何学(筆者注: ユークリッド幾何学を指す)の演繹的な構造は、これまで説得力のある教育を意図した成功をすることは無かった。…それは失敗していた。なぜなら、その演繹性は学習者によって再発明されるのではなくて、押しつけるだけであったのだから。」

(Freudenthal, 1971. pp.417-418)

この指摘は、言い方を変えてみると、演繹性が押しつけられるのではなく学習者によって再発明されるのであれば、ユークリッド流の幾何学は教育上の成果を修める可能性があるということでもある。本研究でいう「発見し証明する過程」を重視する学習指導は、その可能性を探る試みにもなっていると考え。

(2) 発見の対象

本研究でいう「発見し証明する過程」を重視する学習指導においては、生徒が発見する対象として、次のア)〜オ)を考えている(國宗, 2013; 國宗他, 2013)。図1では、それらを□で囲って示してある。なお、発見の対象に関するこの枠組みは、図形教育に限定されるものではない。

ア)(図だけ・場面だけから) 命題を見いだす。

イ)(結論が与えられていて) 仮定を見いだす。

ウ)(仮定が与えられていて) 結論を見いだす。

エ) 証明を見いだす。

オ)(命題を一般化する等によって) より発展的な命題を見いだす。



図1 発見する対象

イ)の「仮定を見いだす」に関しては、ある条件(結論)を満たす作図の方法をいろいろと考えその方法が正しいことを証明するという、「作図し証明する過程」を重視する学習指導がこれに相当する(榛葉・園田・國宗, 2004, ほか)。例えば「角の二等分線をいろいろな方法で作図しよう」という問題に対して、生徒達は多様な作図方法を考え、そしてその方法が正しいかどうかを検討する。生徒が考えた作図方法は、結論「(そのように引いた直線は)角の二等分線である」ことの十分条件にあたる仮定を見いだしていることになる。

この「作図し証明する過程」を重視する学習指導は、初等幾何で行われる作図題での「解析」に関連する。本研究では、作図題での「解析」の方法を強調するのではなく、生徒の試行錯誤によって現れたいろいろな作図の方法について、求められている作図になっているかどうかを検討することを意味している。なお「解析」の方法が不可欠場合には、それを持ち出すこともあり得る。

(3) 作図し証明する過程を重視する意義

「...のような図をいろいろな方法で作図しよう」という問いかけに対して、生徒達は、典型的な作図の方法のみならず、さまざまな方法を考え出す。その中には、本当にそうなるかどうか不明確なものも含まれている。自らが、あるいは友達が行った作図について「この方法によって、問われている図が本当にかけるのだろうか」という疑問が生徒達に生じて、「その理由を考えてみよう」と証明の追究へと自然に進んでいく。

すなわち、まず「作図する」という身体を使った実際の、能動的な活動が行われ、続いて作図の方法が正しいかどうかを考え「証明する」という思考活動が促される。それが仮定・結論や、証明による方法の理解を深めることになり、

数学学習に関する関心・意欲の向上につながる。これが「作図し証明する過程を重視する」ことの意義である。

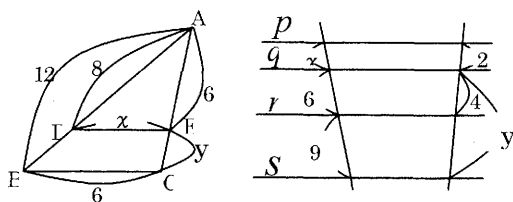
なお、作図の役割の重要性を指摘した研究として、岡崎・岩崎 (2003) の研究がある。この研究では、算数と数学との違いが論証の有無に集約されているとし、「作図」を算数から数学への移行教材として決定的な役目を果たすものと位置付けて、算数での図形認識が発展しそれが証明に繋がっていくプロセスを明らかにしようとしている。van Hiele の図形に関する思考水準理論における、具体的な形を対象とする第2水準の経験的認識と、抽象的な性質を対象とする第3水準の論理的認識との間には、普遍性に基づく乖離が存在するとし、算数から数学への移行には経験的認識を論理的認識へとかえていく教材の開発が不可欠であるとの立場から、たこ形等の作図に関する授業を行っている。その結果、生徒の図形認識として、かたちが前面にある、性質が顕在化されていない、経験的認識が強い、結果の正確さに目が向く等、論証との間に大きな隔たりがあること、算数での図形学習と中学校数学での論証の学習の間に図形の関係性を捉える段階を設定する必要があることを指摘している。

4. 「線分の3等分の作図」に関する扱いの検討

この項では、現在の教育課程においては中3で扱われている「図形の相似」についての学習指導を中心に検討する。それに焦点化する理由は、三平方の定理と共に中学校での図形の論証に関する中心的な内容であり、中2での「図形の合同」や「三角形・四角形」の学習指導に比べると得られる性質に新規性がある、既習の証明や定理の運用という面からも興味深い内容が多いという点にある。

(1) 「図形の相似」に関する生徒の理解度

「図形の相似」の理解に関する公立中学校中3生徒を対象に行われた調査の結果(國宗他, 2013)によれば、数値で解答する問題の正答率は90%~60%とまずまずである。特に「三角形と比」や「平行線と線分の比」の定理を使って長さを求める次の問題の正答率はいずれも80%を超え、無答率も数%であって、良い成果を修めているといえることができる。



それに対して、証明問題については、それとはやや異なった結果になっている。単に2角の相似を記述する問題の正答率は60%とまずまずであるものの、「四角形の各辺の中点を結んでできる図形は平行四辺形である」ことを証明す

る問題の正答率は34%、無答率は54%であって、上述の数値で解答する問題に比べてよい結果とは言いがたい。後者の問題が中学校数学のいずれの教科書でも扱われて内容であることを併せて考えると、なおさらである。入試対応に関連して「証明問題は捨てよ」との“指導”の影響もあるといわれるが、「発見し証明する」学習が適切に行われているならば生徒の取り組みはもっとよいはずである。

(2) 「線分の3等分の作図」に着目する理由

ここでは「図形の相似」の中でも、特に「線分の3等分の作図」に焦点を当てる。その理由は、図形の相似の概念や三角形の相似条件の理解に続いて、「三角形と比」や「平行線と線分の比」の定理に関連してよく取り上げられる内容だからである。また、これらの定理の利用として扱われたり、定理を導くために使われたりというように、授業のねらいによってさまざまな展開が考えられ実践されているからである。

さらにまた、既に線分の2等分の作図はよく知っている生徒が「今度は3等分だ」と考えてみると、そう容易には解決できるわけではないという、教材そのものの関係性から生じる面白さ、そして適度の困難性がある。

以下、「線分の3等分の作図」を例にして、「発見し証明する過程を重視する学習指導」のあり方を検討する。

(3) 生徒が見いだす内容の程度分析

現在の日本の中学校数学科の授業においては、「線分の3等分の作図」はこうすればよい。その理由はこのように証明できる」という一方的な説明中心の展開が行われているとは考えにくい。授業者は何らかの工夫をして、この作図の方法と証明を扱っている。

ここで、「生徒が何を発見し証明するのか」という立場から、「線分の3等分の作図」の扱いを検討してみると、そこには大きく3つの扱いの程度が存在している。

- A) 作図の方法も、証明も見いだす。
 B) 作図の方法が暗示され、証明を見いだす。
 C) 与えられた作図の方法について、その証明を見いだす。

順に、もう少し詳細に検討しよう。以下で、A), B), C) それぞれの下位項目を、a, b, c- で表す。

A) 作図の方法も、証明も見いだす

(a-1) 「線分ABを3等分してみよう」と問題を提示し、生徒が行ったいろいろな作図方法を取り上げてそれが的確な方法であることを証明する。

このような授業展開では、結論「線分を3等分する」ことの十分条件にあたる「仮定(作図の方法)」を見いだし、さらに「このように作図するならば、線分が3等分される」と命題化して、その証明の方法を見いだすことになる。

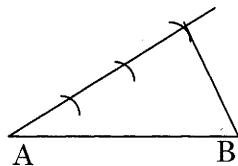
(a-2) 「紙をピタリと3つ折りにするには、どのように

折ればよいだろうか」と問いかけて、実際に A4 版の紙を手にして追究する授業がこれに相当する。その折り方はいろいろと考えられるので、折り方(作図の方法)を見いだし、証明方法も見いだすことになる(丸井, 2011)。

(a-3) 「線分を 3 等分したい。その作図の手順を箇条書きにして説明しなさい」と問いかけるのもこの範疇の扱いである。これは日本数学会が行った大学生数学基本調査(2012)において、線分の 3 等分の作図が取り上げられた際の問いかけと同様である。基本調査の場合、問いとしては作図の手順を述べることが要求されている。調査対象学生が記憶を再生する形でこの作図の手順を述べるとは考えにくいので、作図の方法を見いだし、そしてその手順で図を描いた場合に、それが確かに 3 等分するものになっているかをチェックすることの両者が期待されていると読むことができる。

B) 作図の方法が暗示され、証明を見い出す

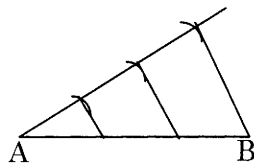
(b-1) 「線分 AB を 3 等分したい。次の図を参考にして、作図の方法を考えてみよう」と問題を提示し、半直線 AX を引いて任意の長さの線分を 3 つとって…というように、一部が与えられた図から暗示される作図の方法を見いだし、それが的確な方法であることを証明する。



(b-2) 普段使っているノートの罫線に関連させて 3 等分の方法を考えるという展開は、いくつかの現行教科書の記述にも見ることができる。この提示は、日常の場面を用意して検討していて上記(a-2)と同様に見えるが、ひとつの作図方法を想定しているという点から B)に位置づけられる。

C) 与えられた作図の方法について、その証明を見い出す

「線分 AB を 3 等分するには、右の図のように行えばよい。この方法で 3 等分されることを証明しよう。」と問いかけて、示された作図の方法によって 3 等分できることを証明する。



与えられた作図方法について証明するという扱い方には、次の 2 つの展開が考えられる。

(c-1) 「三角形と比」や「平行線と線分の比」の定理を得た後に、その適用問題として「線分の 3 等分の作図」を位置付ける展開であり、教科書等でも比較的良好に見られるものである。

(c-2) この作図の方法が確かに「線分を 3 等分している」理由を、三角形の相似条件等に基づいてまず考え、その証明の検討の途中で現れる性質を「三角形と比」や「平行線と線分の比」として定理化する展開である。

以上、いろいろな授業展開をまとめると、表-1 のようになる。表 1 での○印は、生徒が発見することを期待されている対象を示している。

では、上記のいずれの授業展開が好ましいのであろうか。それは授業のねらいや生徒の実態によって決まってくる。ここでは、ジョーンズらも指摘するように、授業者が生徒にどのように関わるのか、どこまで自由に考えさせるのか、が大きな論点になるのである(Jones, et al, 2012)。

表-1 線分の 3 等分の作図に関する発見の対象

生徒の活動 授業展開	発見の対象		図
	作図方法	証明方法	
a-1	○	○	多様
a-2 (紙を折る)	○	○	多様
a-3 <箇条書きに>	○	(○)	多様
b-1	(○)	○	1つ
b-2 (ノートの罫線)	(○)	○	1つ
c-1 定理化が先	与えて	○	1つ
c-2 定理化は後	与えて	○	1つ

ここでは特に、積極的に「発見し証明する過程を重視」している(a-1)と、標準的に行われていると考えられる(c-1)について、詳しく検討する。

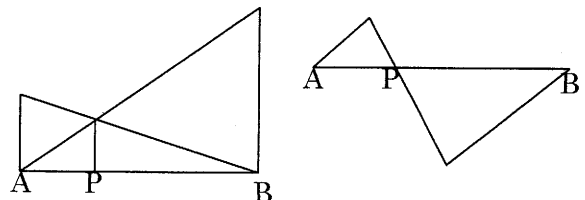
(4) (a-1) タイプの展開の実際

「線分 AB を 3 等分してみよう」と問題を提示し、生徒が行う多様な作図方法を取り上げてそれが的確な方法であることを証明するという授業展開である。「二等分ならでけるのに…」という反応や、線分の垂直 2 等分線をいくつか引けばできるのではないかと図をかき始める姿が見られるが、AB に、そしてそれを分割した線分に 2^n 等分を何回繰り返しても、 3^n という因数は現れないことから、垂直 2 等分線による方法は全体の場合で否定される。このような試行錯誤に続いて、「利用できそうな定理はないか」「相似な三角形をつくり出してみよう」など、授業者による適度な示唆が有効に働く。

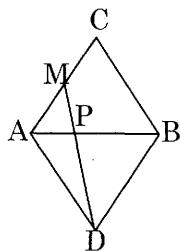
実際の授業において、生徒達は、例えば次のような作図方法を見い出す(榛葉他, 2004; 望月, 2006; ほか)。

ア) 半直線 AX を引き任意の長さの線分を 3 つとって…という、上記 C) で示したような典型的な作図。

イ) 平行線を引き、相似比が 1:2 である 2 つの三角形を作図する。



ウ) 正三角形を作図し、その辺の中点 M をとって右の図のように P を決める。結果としてイ)と同様な作図を行ったことになっている。



エ) B を通る直線上に点 C, D を、 $CB=DB$ (つまり AB が $\triangle CAD$ の中線) となるようにとり、 $\triangle CAD$ の他の中線をひいて交点を求める。

この方法は、三角形の重心の性質を知っている大学生の解答では多々見られる。

オ) 座標平面上に比例関係 $y=1/3x$ のグラフをかいて求める。

線分 AB を y 軸に平行に置き点 A(1, 0), B(1, 1) とすると、直線 $y=1/3x$ と AB の交点は $(1, 1/3)$ 。この点が AB を 3 等分する点の一つである。(これは作図によるものとはいえないが、生徒の考えとして興味深いのであけておく)

このように多様な作図方法を確認し、その方法で 3 等分できることを証明する。

このような展開による実践研究を公立中学校で行った望月は、「じっくり取り組ませる時間がなかなかとれない現状」に触れながらも、その報告書で次のようにまとめている(望月, 2006, p.17)。

「子ども達は、実に様々な方法で線分の 3 等分の作図に取り組んだ。子どもの考えは、教師の考えを遙かに上回っており、その多様性や一生懸命考える姿に心を打たれた。」

授業での生徒の姿からは、多くの練習問題を課すよりも、的確な問題を用意し「作図し証明する」追究活動の場を用意することの重要性が伝わってくる。

(5) (c-1) タイプの展開の実例

(a-1) タイプの授業では、少なくとも 2, 3 時間の授業が必要になるので、多くを配当できない場合には、(c-1) タイプの展開を 1 時間で扱う実践も価値あるものとする。その事例を紹介しておく。

授業は、静岡県公立中学校中 3 生徒を対象に、茂木哲律教諭によって次のように行われた。

① 授業者が「線分 AB を 3 等分する点を作図しよう」と投げかけると、多くの生徒が「線分の 2 等分線の作図」を何回か繰り返して 3 等分点を求めようとした。全体の間でもそれが発表され、この方法ではうまくいかないことを確認した。

② そこで、①の実態を踏まえて授業者は、線分 AB を 3 等分する方法をビデオ映像で動的・継時的に示した。生徒からは「あー」「おー」という声が挙がった。

③ 生徒は、映像に倣ってワークシート上に 3 等分する作図を行い、その方法でできることの証明に取り組んだ。

④ その作図でよい理由を、「平行線と比」の定理を使

って全体で確認した。

⑤ 確認問題として、線分 AB を 2:3 に分ける点を作図した。そして、その作図の方法と証明について、個人で解答し、小グループで確認し合った。

この展開では、③の段階で、作図方法が正しいことの証明を、⑤の段階では、作図方法と証明を生徒が見いだしている。作図の方法が正しいことは、既習である「平行線と線分の比」や「三角形と比」の定理の適用問題として位置付けられるが、半分を超える生徒は、相似な三角形に着目し相似比に基づいて証明していた。

この時間における授業者は、①で示した生徒の反応を踏まえて、線分を 3 等分する作図の方法を示し証明へと進み、さらに 2:3 の点をとる問題を考えさせて、本時の学習内容の理解と定着の程度を確認するとともに、作図や証明の方法を説明し合う活動の場を設けて表現する能力の育成を目指していた。

以上、「線分の 3 等分の作図」を例にして、「発見し証明する過程を重視する学習指導」のあり方、扱いの程度について分析し、その中でも特に(a-1)と(c-1)それぞれの展開について詳しく検討した。繰り返しになるが、どの扱いの程度によって授業を展開するのが好ましいかは、授業のねらいや生徒の実態によって決まってくる。そして、どのように展開するかは授業者の意図に依っている。

5. 作図し証明する過程を重視する図形指導

上で述べた(a-1)のような授業が効果的に展開されるには、中等教育の図形指導全体を見通して、「作図し証明する過程を重視する授業」を指導計画の中に意図的に設定することが重要である。筆者は「線分の 3 等分の作図」について上記(a-1)の扱いが望ましいと考えているが、それは中学校第 1 学年からの作図に関する計画的・意図的な指導があつて初めて可能となる展開である。

以下、中学校での図形学習のねらいを踏まえて、学年ごとに、取り上げたい主な作図問題を示し、「作図し証明する過程を重視する授業」のあり方を具体的実践に基づいて述べる。

(1) 中 1 における展開

① 取り扱う作図

基本作図を、「作図の方法を考え、根拠を持って説明すること」に重点を置いて実践する。取り上げる作図には、次のようなものが考えられる(高橋他, 2013, 2014; 他)。

- ・「直線の平行線」「直線の垂線」の作図
- ・「平行四辺形 ABCD で、底辺を BC にしたときの点 A を通る高さ」の作図
- ・「線分の垂直二等分線」「角の二等分線」の作図
- ・「平行四辺形 ABCD の点 A と C が重なるように折ったと

きの、折り目の線」の作図

- ・「平行四辺形 ABCD の辺 AB と辺 BC が重なるように折ったときの、折り目の線」の作図
- ・既習の作図方法を利用し、様々な角の作図
- ・作図の利用として「3 点を通る正方形」あるいは「円周上に頂点がある正三角形」の作図

中 1 での基本作図の学習指導においては、作図の方法が正しいことを説明するのに、何をその根拠として位置づけるのか問題になる。平成 23 年度版の中学校数学科教科書の記述を見ると、事前にひし形の対角線の性質を確認したり、2 つの円の中心線と共通弦との関係を扱ったりして、それらを説明の根拠として使おうとしている。

このような教科書や授業研究における実際の学習指導案等の記述から推測すると、何を説明の根拠に位置づけるかに関して、授業を構想する側の考え方はかなり明確になっている。

② 生徒が根拠として設定する性質

では実際の授業では、生徒はどのような性質等を説明の根拠とするのであろうか。中 1 での各々の作図の学習において、作図の方法が正しいことの説明の根拠として使われた性質を抜き出し、それをまとめた研究によれば、根拠として使われた主な性質は、次のように概括することができる(高橋他, 2014)。

- ・線対称な図形の対称の軸は、対応点を結ぶ線分に垂直でその中点を通る。
- ・二等辺三角形は線対称な図形である。
- ・合同な図形の対応する部分の長さは等しい。
- ・ひし形の対角線は垂直に交わる。
- ・たこ形の対角線は垂直に交わる。
- ・対角線の長さが等しく、おのおのの中点で交わる四角形は長方形である。
- ・対角線の長さが等しく、おのおのの中点で垂直に交わる四角形は正方形である。

このように、生徒は小学校での学習や中 1 のその学級での合意内容に基づいて、根拠を設定し説明していることがわかる。生徒の思考として、当然のことである。

ところで、「使われるであろう根拠をあらかじめ確認しておき、作図の方法の説明に使わせる」という展開にするかどうかは、中 1 での作図問題の位置づけや扱いに関する授業者の問題意識に依存する。基本作図に関する学習に先だって作図の方法が正しいことの説明の根拠を確認し準備しておくよりも、「まず作図の方法を考え、そこで必要になった性質等を確認して授業を進める」ほうが展開として自然であり的確であろうと筆者は考えている。上の引用に概括されているように、説明の根拠として使われる性質は、生徒が考え出した作図の方法に応じて、いくつか考えられることを銘記したい。

なお、河端・松尾(2008)は、図形の作図指導の重要性を認

めながらも、その指導上の問題点を、中 1、中 2 生徒を対象に行った「角の二等分線の作図」に関する調査の結果に基づいて指摘している。特に小学校での図形指導に関連して、作図した図の中にひし形を見いだせなかったり、ひし形の性質を使った説明ができなかったりという実態を報告している。

(2) 中 2 における展開

① 取り扱う作図

中 2 での図形の論証の学習指導においては、「平行線の角の性質と条件」や「三角形の合同条件」を根拠にして証明が行われる。取り上げる作図には、次のようなものが考えられる(榛葉他, 2003; 高橋他, 2014)。

- ・「角の二等分線」「線分の垂直二等分線」の作図方法の再確認とその証明

- ・「二等辺三角形をい

ろいろな方法で作図

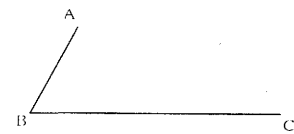
しよう」

- ・「(右の図を与えて)

平行四辺形 ABCD

をいろいろな方法

で作図しよう」



② 基本作図を再度取り扱うことに関連して

中 1 で学習済みの基本作図に関連して、中 2 では、例えば「角の二等分線の作図」の方法が正しいことを、三角形の合同条件を根拠にして証明することになる。すなわち、作図の方法が正しいことは、中 1 と中 2 では異なった根拠に基づいて説明が行われる。

中 1 と中 2 における図形の性質の調べ方の違いを生徒に明確に伝えることは、数学学習を進める上で極めて重要である。それは、「論証の意義」の理解(國宗, 1987; 他)を深めることに大きく関連する。中 2 では、例えば「二等辺三角形とはどんな三角形ですか。なるべく簡単な言葉で表しなさい」(中西, 1999)と問いかけ、仮定と結論の分離、定義の意味、命題とその逆の意味、合同条件の使い方と役割の理解を目指すことが、図形の論証の初期指導における中心的なねらいである。このような扱いと関連づけて、二等辺三角形や平行四辺形についても「作図し証明する過程」を重視して一連の授業を行う必要がある。そのような一連の授業は、「学習者が自ら論証の必要性を感じるためには、求められた特定の厳密性に応じたある数学体系を構築するという問題意識が必要」という宮川(2008)の指摘に対しても、プラスの貢献をするに違いない。

中 2 では、二等辺三角形や平行四辺形の性質と条件等の定理を得て数学概念を一層豊かにすると共に、「論証の意義」の理解を深めることを目指すことになる。そこでの「作図し証明する過程」を重視する授業の役割は大きい。

(3) 中3における展開

「相似と比」では、本稿で取り上げた「線分の3等分の作図」の扱いが面白い。また、「三角形と比」「平行線と線分の比」の定理、そして次のような2, 3の性質の扱いは、「作図し証明する」過程を重視するよりも、証明を見いだすことを中心とし、その多様性を楽しむことになろう。

- ・「 $\triangle ABC$ の $\angle A$ の二等分線と辺BCとの交点をDとすると、 $AB:AC=BD:DC$ である。」(高橋他, 2013)
- ・「四角形の各辺の中点を結んでできる四角形は平行四辺形である。」

また、「円外の1点からひいた接線の作図」は、「接線が引けたとして」作図の方法を見いだすという点で、作図問題での「解析」の方法に近い指導が行われる。

高等学校の現行の教育課程において「数学A」に新たに登場した「正五角形の作図」の扱いでは、「解析」が重要である。次の指摘を引き合いに出すまでもなく、「正五角形はこのように作図できる」と方法を示しその理由を解説したところで何になるのか。

「数学への定義—定理—証明の接近は、数学的な解説とその高等教育のほとんど唯一の模範になっている。もちろん、これは数学が創造され、伝達され、それどころか、理解される仕方ではない。…数学は活動であり…」
(Davis et al. 1982, p.295)

(4) 「補助線を引く方法の意識化」との関連

実は、作図の方法をいろいろと見いだす学習活動は、「補助線をいかに引くか」において関係している。本研究では、「補助線を引く方法の意識化」すなわち「生徒達が引いた補助線に着目し、それがどのように引かれたのかを全体で検討しまとめて、補助線を引く方法を顕在化させること」を重視している(國宗他, 2013)。意識化のために、多様な証明方法の検討に続いて、「どうしてその補助線を引いたのか、その補助線で何に着眼しようとしたか、補助線の引き方に共通点はあるか」等々、互いのアイディアを交換し検討する場を意図的に用意する。それによって、その方法を以後の問題解決に生かすようになることが期待できる。

6. 学習指導の改善に向けて

前項までの検討に関連して、図形の論証の学習指導改善に関する留意点を2つほど述べる。

1) 「問題」を生徒の思考の観点から吟味する。

ある「問題」の解決の際に現れる思考を分析し、生徒に何を見いださせるのかを構想することは重要である。それを、本稿では「線分の3等分の作図」に焦点を当てて検討した。生徒自らが見いだすことができる内容を、授業者が一方的に解説してしまうことはないか。逆に生徒が見いだすのが困難な内容を、無理に考えさせようとするのではないのか。個々の命題を詳細に分析し、生徒自らが追究する

「問題」の質を吟味して、授業計画の作成に反映させる必要がある。

2) 証明を記述することの重要性を再検討する。

数学学習は、学習者自らが問題に活動的に取り組むことが本質的である。それを進めたり成果を評価したりするには、解答や証明を生徒自身が記述することが欠かせない。

国公立大学生5946名を対象に行われた「大学生数学基本調査」に基づく提言(日本数学会, 2012)において、中等教育機関に対しては「充実した数学教育を通じ論理性を育む。証明問題を解かせる等の方法により、論理の通った文章を書く訓練を行う」、大学に対しては「数学の入試問題ではできるかぎり記述式にする」と述べられていて、証明を記述することの重要性がここでも指摘されている。

本稿では「作図し証明する過程を重視する授業」の重要性を述べてきたが、そこでは証明を口述することとともにそれを記述することも欠かせない。初期の段階では図にしろしを入れて言葉で説明し合う場を設けたり、学習が進んできた段階では生徒が書いた説明を添削したり等々、授業者には手間と時間がかかる指導が要求される。証明を記述する学習の位置づけや指導段階を再検討し、その重要性を明確にする必要がある。

7. まとめと今後の課題

本稿ではまず、「発見し証明する過程」を重視する学習指導の意義、及び「発見の対象」を明らかにし、「線分の3等分の作図」を例にして「作図し証明する過程を重視する学習指導」に関する種々の展開の仕方を示して、図形の論証の授業改善に関する示唆を得た。

今後の課題として、次のことがあげられる。

- ・「発見し証明する過程」を重視する学習指導について、代数や関数の内容に関しても考察する。
- ・数学の授業において、生徒の解答や思考の多様性にいかに対応するかに関して実証的に検討し、その改善の方向を明らかにする。

引用・参考文献

- Davis, P.J. and Hersh, R. (1982). *The Mathematical Experience*, Birkhäuser Boston.; 柴垣和三雄・清水邦夫・田中裕訳『数学的経験』, 1986年, 森北出版
- Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics* 3, Reidel Publishing Company, Dordrecht- Holland. pp.413-435.
- Hershkowitz, R. (1990). Psychological Aspects of Learning Geometry. In P. Nesher & Kilpatrick (Eds), *Mathematics and Cognition*. Cambridge Univ. Press. pp.256-261.
- 石谷茂(1957). 『図形と論証』, 啓林館.
- Jones, K., Fujita, T., & Kunimune, S. (2012). Promoting Productive Reasoning in the Teaching of Geometry in Lower

- Secondary School: Towards A Future Research Agenda. *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*, pp.2222-2231.
- 河端善登・松尾七重(2008),「図形の作図指導から証明指導への接続を促す図形指導に関する問題点」,第32回年会論文集,日本科学教育学会,pp.261-262.
- 小関熙純編著(1987),『図形の論証指導』,明治図書.
- 國宗進(1987),「『論証の意義』の理解に関する発達の研究」,日本数学教育学会誌数学教育学論究,Vol.47・48, pp.3-23.
- 國宗進(2007),「論証についての理解に関する総合的研究—図形の論証と文字式による論証の観点から—」,第40回数学教育論文発表会論文集, pp.619-624.
- 國宗進研究代表(2013),『発見し証明する過程を重視した幾何教育に関する研究』,平成22~24年度科研費補助金研究成果報告書.
- 國宗進・熊倉啓之・松元新一郎(2013),「図形の論証の理解とその学習指導—図形の相似に関する補助線を引く方法の意識化—」,日本数学教育学会誌第95巻『数学教育学論究 臨時増刊』,第46回秋期研究大会特集号, pp.113-120.
- 國宗進・羽田明夫・榛葉伸吾(1999),「中学校での図形指導の改善」,第32回数学教育論文発表会論文集, pp.221-226.
- 丸井理恵(2011),「平行線と線分の比の性質の活用」;吉田明史編著『「わかる」授業をつくる 中学校数学科教材研究&授業デザイン』明治図書, pp.87-91.
- 宮川健(2008),「論証の特殊性: 厳密性の視点より」,第32回年会論文集,日本科学教育学会, pp.155-156.
- 宮川健・溝口達也(2014),「中等教育を一貫する論証指導を捉える枠組みの提案」,第2回春期研究大会論文集,日本数学教育学会, pp.41-48.
- 望月美樹(2006),「多様な見方・考え方を伸ばす図形の授業—線分の3等分の作図を題材として—」第88回全国算数・数学教育研究(東京)大会発表資料.
- 中西知真紀(1999),「第2学年 図形の「定義」に関する指導」;小関熙純・國宗進編著『「よい授業」の創造と展開』,明治図書, pp.119-144.
- 日本数学会(2012),「『大学生数学基本調査』に基づく数学教育への提言」.
- 日本数学会・教育委員会(2013),「第一回 大学生数学基本調査報告書」.
- 岡崎正和・岩崎秀樹(2003),「算数から数学への移行教材としての作図—経験的認識から論理的認識への転化を促す理論と実践—」,日本数学教育学会誌 数学教育学論究, Vol.80, pp.3-27.
- 榛葉伸吾・園田博人・國宗進(2004),「作図から証明への過程を重視した「相似な図形」の学習指導」,静岡大学教育学部附属教育実践総合センター紀要, No.10, pp.11-22.
- 真野祐輔・國宗進(2014),「理論的枠組みに基づく「単元を通した数学的活動」の構想: 単元「数列」における論証指導の系列と課題」,第2回春期研究大会論文集,日本数学教育学会, pp.49-56.
- 高橋達也・鈴木直・國宗進(2013),「補助線を引く方法を意識化させる図形指導—説明する活動を重視して—」,静岡大学教育学部附属教育実践総合センター紀要, No.21, pp.21-30.
- 高橋達也・鈴木直・國宗進(2014),「作図し証明する過程を重視した図形指導—説明の根拠に着目して—」,静岡大学教育学部附属教育実践総合センター紀要, No.22, pp.11-20.