SURE 静岡大学学術リポジトリ
Shizuoka University REpository

学ぶ意義を重視した数列の指導に関する考察

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2015-07-06 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 熊倉, 啓之 メールアドレス: 所属:
URL	https://doi.org/10.14945/00008915

〈論文〉

学ぶ意義を重視した数列の指導に関する考察

熊倉　啓之*

Teaching Students to Emphasize the Value of learning the Sequence

Hiroyuki　KUMAKURA

Abstract

A purpose of this study is to clarify the issue in teaching sequence at "Math B", and consider the desirable teaching by emphasizing the value of learning. First, the author called the peculiar value of learning a material as "Concept Extensional Value (CEV) and Useful Value (UV)", and defined that CEV of sequence is to comprehend sequence as the function that domain is the natural number, and to express change of quantity recursively. Second, the author clarified that there are little descriptions in the textbooks and preceding studies about CEV and UV, and there are little university students understanding CEV. Third, the author suggested 4 points for the desirable teaching by emphasizing the value of learning as follows;

1) To correlate the sequence with function in the case of introduction,
2) To comprehend by function the relation between difference sequence and original sequence,
3) To emphasize activities of making recurrence formulas,
4) To deal with the problem of researching change trend in the case of application.

キーワード：数列，学ぶ意義，自然数を定義域とする関数，概念拡張的意義

1．はじめに

平成20年1月中央教育審議会答申の中の算数・数学科の改善の基本方針に，次の記述がある．

「子どもたちが算数・数学を学ぶ意欲を高めたり，学ぶことの意義や有用性を実感したりできるようにすることが重要である．」（2008，p.84）

また，長崎は「数学の意義や社会的有用性など情意面を重視した授業を確立していくことが重要であろう．」（2009，p.176）と述べている．

さらに，日本数学教育学会誌第94巻第11号では「私の考える数学教育の意義」を特集に組み，計8本の論文が掲載された．この中で，例えば山崎は，「図形の証明はなぜ必要なのか，方程式を用いることのよさは何なのかなど，生徒の素朴な疑問と向き合い，その意味と必要性もきちんと指導をしていかなければならない．」（2012，p.39）と述べている．

一方で，「数学を学ぶ意義」に関わって，例えば，平成17年度高等学校教育課程実施状況調査の生徒質問紙に関する次の調査結果がある（2007）．

表1　「数学を学ぶ意義」の肯定的回答（数値は%）

受験（就職試験）に関係なくても大切だ	43.9
普段の生活や社会に出て役に立つ	37.9
論理的に考えることができる	30.1
数学が好きだ	38.9

以上の結果から，「数学を学ぶ意義」に関する指導の重要性が指摘されている一方で，「数学を学ぶ意義」を理解していない高校生が少なくない実態が浮かび上がる．

筆者は，「数学を学ぶ意義を重視した指導」の重要性に着目し，これまでに三角比，図形と方程式や，2次関数，三角関数，対数関数，微分など，高等学校数学科を中心とする様々な指導内容について，望ましい指導のあり方を追究してきた（熊倉，2004～2008，2010～2012）．

本研究では，数学Bで扱う数列（有限数列）に焦点を当て，学ぶ意義を重視した指導を追究する．その理由は，数列の一般項や和を求めたり，与えられた漸化式を解いたりすることはできても，数列を学ぶ意義が理解できていない高校生が少なくないと考えるからである．

静岡大学教育学部

2．研究の目的

本研究の目的は，数学 B で扱う数列について，現行の指導の課題を明らかにした上で，学ぶ意義を重視するという視点から，望ましい指導のあり方を追究することである．

3．研究の方法

以下の手順にしたがって，研究を進める．

(1) 学ぶ意義の指導に関する先行研究を基に，学ぶ意義を考察する枠組みを設ける．

(2) (1)の枠組みに基づいて，「数列を学ぶ意義」について考察する．

(3) (2)で考察した結果に基づいて，現行の数学Bの教科書分析，および大学生の理解の実態調査を通して，現行の指導の課題を明らかにする．

(4) (2)で考察した結果に基づいて，過去や海外の教科書の記述・問題，および先行研究を調査する．

(5) (2)～(4)の結果を踏まえて，「数列を学ぶ意義」を重視した望ましい指導のあり方を追究する．

4．数学を学ぶ意義を考察する枠組み

(1) 数学を学ぶ意義

「数学を学ぶ意義」は，生徒の立場に立つものであり，これを指導者の立場で言い換えると「数学を指導する意義」となる．これは，「数学教育の目的」に大きく関わる．「数学教育の目的」については，多くの研究が行われていて，例えば，長崎他（2007）は次の3つの目的を挙げている．

・実用的目的　　・人間形成的目的
・文化的目的

これら3つの目的に照らして考えると，生徒にとって「数学を学ぶ意義」は，次の3つに整理できるであろう．

・実用的意義　　・人間形成的意義
・文化的意義

「実用的意義」は，数学で学ぶ知識や技能が生活に役立つという意義である．「生活に役立つ」というとき，買い物場面で四則計算ができる等，日常生活に直接的に役立つ場合と，携帯電話の開発等，社会生活の様々な場面で間接的に役立っている場合とがある．日常生活に役立つのはすべての人であるのに対して，社会生活に役立つのは一部の専門家に限られるが，専門家が数学を使って開発した技術等は様々な場面で役立っていて，すべての人が数学の恩恵を受けていることを理解することは重要である．

「人間形成的意義」は，数学の学習を通して，思考力や表現力等を身に付けるという意義である．ここでいう「思考力や表現力等」とは，数学に限らず人間が生きていく上で重要とされる力を指す．

「文化的意義」は，文化としての数学を楽しむという意義である．楽しいから学ぶのであり，知的好奇心があって追究したいから学ぶのである．

(2) 各単元を学ぶ意義

(1)で挙げた 3 つの意義とは別に，例えば「三角比」や「2 次関数」を学習するとき，それぞれの単元に固有な学ぶ意義を考えることができるはずである．

これまでに筆者は，いくつかの単元について，それぞれの学ぶ意義を考察してきた．その結果は表 2 の通りである．

表 2　各単元を学ぶ意義

三角比	これまで求めることのできなかった三角形の辺の長さや角の大きさを求めることができ，そのことをもとに測量等に利用する（2006）．
図形と方程式	座標平面上で座標を使って図形を表すことができ，それを利用して図形の性質を代数的に探究する（2005）．
ベクトル	ベクトルを使って図形を表すことができ，それを利用して図形の性質を代数的に探究する（2004）．
2 次関数	差分が 1 次関数となる特徴を持つ数量の関係を式やグラフ等で表すことができ，それらをもとに関係を調べて未知の部分を予測する（2010）．
三角関数	周期的な事象の関係を式やグラフ等で表すことができ，それらをもとに関係を調べて未知の部分を予測する（2008）．
微分	瞬間変化率を計算で求めることができ，それを利用して関数の変化の様子を調べたり，未知の部分を求めたりする（2011）．

表 2 で，例えば三角比の場合，前半の「これまで求めることのできなかった三角形の辺の長さや角の大きさを求めることができ」は，sin，cos，tan という記号を新たに導入したことによって可能になった事柄であり，三角比という単元に固有な学ぶ意義である．これは，数学の概念の拡張に関わる事項といえよう．

同様にして，三角関数の「周期的な事象の関係を式やグラフ等で表すことができ」もまた，三角関数に固有な意義であり，概念の拡張に関わる事項である．

一方，三角比の「そのことをもとに測量等に利用する」や三角関数の「それらをもとに関係を調べて未知の部分を予測する」は「実用的意義」であり，単元の内容にある程度関連する意義である．

また，表 2 に特別な記載はないが，各単元の様々な問題の解決に基づく「人間形成的意義」や「文化的意

義」も当然含まれるといえよう．

以上の考察から，各単元を学ぶ意義を考察する枠組みとして，(1) で挙げた 3 つの意義に数学の概念の拡張という観点を加え，次の 4 つを，数学を学ぶ意義を考察する上での枠組みとして設けることとする．

・実用的意義	・人間形成的意義
・文化的意義	・概念拡張的意義

前述したように，4 つ目の意義として設けた「概念拡張的意義」は，単元に固有な意義である．この意義を「文化的意義」に含める考えもあるが，学ぶ意義を重視した指導を考察する上では，単元に固有な学ぶ意義をとらえることが重要であるとの考えから，「概念拡張的意義」を独立させることとする．

「概念拡張的意義」以外では，「実用的意義」もある程度単元の内容に関連する．一方，「人間形成的意義」や「文化的意義」は単元によって軽重の差はあるものの，基本的にどの単元にも考えられる意義である．いずれにせよ，上記の 4 つに基づき，各単元の学ぶ意義を考察していくことが重要であると考える．

5．数列を学ぶ意義に関する考察

(1) 概念拡張的意義

数列は，数学の研究分野のうち，解析学に含まれることが多い．特に，無限数列の極限は微分法につながり，無限級数は積分法（区分求積法）につながる．すなわち，無限数列の内容は，微分・積分の基礎としての意義があるといえよう．

では，数学 B で有限数列を学ぶ「概念拡張的意義」はどこにあるのだろうか．数列$\{a_n\}$は，n が決まるとそれに対応して a_n が 1 つに定まる．その意味で，一般項 a_n は自然数 n の関数ととらえることができる．

数列を「自然数 n を定義域とする関数」ととらえれば，数列で扱う内容と関数との間に，次の対応関係があると考えることができる．

表 3　数列と関数の対応関係

数列	関数
等差数列	1 次関数
等比数列	指数関数
数列の和	積分
階差数列	微分

例えば，一般項 a_n を求めることは関数式 f(x)を求めることに，初項から n 項までの和 S_n を求めることは積分 $\int f(x)dx$ を求めることに相当する．このように，数列の問題は，すべて関数の問題に関連付けられる．

一方，数列で扱う漸化式は，数量の変化を帰納的に表したものであり，数列の学習で初めて出会う表現である．一般項の式で表すことが困難，あるいは不可能な数列であっても，漸化式で表すことは容易にできる場合がある．漸化式で表すことで，一般項と同様に，任意の項の値を計算によって求めることができ，この点に，帰納的な表現の意義がある．

また，漸化式による表現は，再帰的（帰納的）なプログラミングの記述としても意義がある．下瀬も，「有限数列はコンピュータのための教材として，数学ⅡB で扱われるようになり」（1990，p.317）と分析している．

さらに，漸化式を解くことを通して，微小な関係から全体的な変化を読み解く微分方程式の考えにつなげることができる．特に，現行の学習指導要領では微分方程式を扱っていないだけに，漸化式を解く活動は，様々な事象の変化を解析する視点から意義がある．

学習指導要領における数列のこれまでの扱いを調べてみると，例えば，過去には次のような記述があり，数列を関数ととらえて指導することを重視していることが読み取れる．

「自然数に対応する関数として数列をとらえ，その値の変化の様子を式やその極限の考察から明らかにする．」(昭和 31 年告示)

「簡単な数列について，自然数との対応関係を考え，その数列の特徴をとらえさせる．」(昭和 36 年告示)

これに対して，昭和 45 年告示の学習指導要領では，関数と関連付けた記述がなくなり，代わりに指導内容に漸化式が加わって，次のような記述が挿入された．

「簡単な数列について，その特徴をとらえさせ，帰納的に定義するしかたとその意義を理解させる」(昭和 45 年告示)

これ以降は，基本的に同じ傾向が続き，現在に至っている。現在の学習指導要領に，関数と関連付けた記述はないが，数列の本質が関数と関連していることに代わりはない。

以上の考察を踏まえると，有限数列の「概念拡張的意義」は，関数の「概念拡張的意義」である「数量の関係を式やグラフ等で表すことができ」（熊倉，2003）と同様にとらえることができ，また帰納的表現にあるといえよう．以上から，有限数列の「概念拡張的意義」を，次のように規定することとする．

「数列を自然数を定義域とする関数としてとらえ，数量の変化を帰納的に表現する．」

(2) 実用的意義

数列は，どのような場面で利用されるだろうか．

「概念拡張的意義」で述べたように，数列は関数ととらえることができるので，数列の利用場面は，関数の利用場面と同様であると考えてよい．つまり，その「実用的意義」は，「～，数量の関係を調べて未知の部分を予測する」（熊倉，2003）といえる．

(3) 人間形成的意義

数列では，一般項を予測したり求めたりするのに，

帰納的にきまりを見つける力が必要とされる．また，数列の和を求めるのに，順序を逆にして加えたり，一定数をかけて項をずらして加えたりするなど，いくつかの特有な，しかし大切な考え方も必要とされる．これらも含めて，様々な問題の解決を通して，数学的な思考力や表現力を身に付けることが期待できる．

(4) 文化的意義

「ハノイの塔の問題」や「平面分割の問題」等，数列を使って解決するいくつかの興味深い問題がある．これらの問題解決を通して，数列への興味・関心を深め，学習意欲を高めることが期待できる．

以上の枠組みに基づいた考察を整理すると，表4の通りである．

表4 数列を学ぶ意義

概念拡張的意義	数列を自然数を定義域とする関数としてとらえ，数量の変化を帰納的に表現する．
実用的意義	数量の関係を調べて未知の部分を予測する．
人間形成的意義	帰納的にきまりを見つける力等が身に付く．
文化的意義	ハノイの塔の問題等に取り組む．

特に，数列に固有な学ぶ意義について，一文でまとめて述べると，次のようになる．

> 数列を自然数を定義域とする関数ととらえて，数量の変化を帰納的に表現することができ，それらをもとに数量の関係を調べて未知の部分を予測する．

6．現行の教科書分析

5で考察した結果を踏まえて，特に「概念拡張的意義」と「実用的意義」の観点から，数学B(H23検定済)の全教科書（5社15冊[1)]）について分析した．その結果，現行の数列の指導の課題として，次の点を指摘することができる．

(1) 数列と関数との関連

数列と関数の関連について，直接的に述べた教科書は，1冊も見られない．5冊の教科書は，等差数列の一般項がnの1次式であることを扱っているが，等差数列が1次関数であることについての記述はない．

また，等比数列を指数関数とみたり，数列の変化を表やグラフに表したりするなどの記述も見られない．

(2) 帰納的な表現としての漸化式の扱い

ほとんどの教科書は，漸化式による表現によって数列が1つに定まることについて触れている．漸化式を定義した後は，すべての教科書が，漸化式を解いて一般項を求める方法を扱っているが，一般項が求められない漸化式はどの教科書でも扱っていない．全体を通して，5 (1)で述べたような漸化式による帰納的表現の意義について触れた記述や問題は見られない．

(3) 現実事象と関連した問題・話題の扱い

現実事象と関連した問題を扱っていた教科書は，1冊も見られない．一方で，多くの教科書がコラム記事として現実事象と関連した話題を取り上げている．その話題は表5の通りである．

表5 現実事象と関連した話題

複利法	12冊
ローン	2冊
平均律	3冊

数列の「実用的意義」を理解する上で，これらの話題は有効であるが，コラム記事であるため，授業で扱われない可能性がある．

(4) その他

全体的に，いずれの教科書も，数列の一般項を求める，和を求める，漸化式を解く，といった技能面に関わる問題が多く，生徒が興味・関心を持つような問題や話題は少ないといえる．

長崎は，海外の教科書と比較したときの日本の教科書の特徴の1つに，「算数・数学を学ぶ意義については，教科書の項目として扱っていない」（2010，p.11）を挙げている．今回調査した数列においても，その点を裏付けることができた．

以上の分析から，現行の教科書には「概念拡張的意義」や「実用的意義」に関わる記述が極めて少ないことが明らかになった．

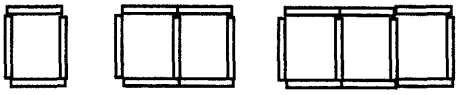
7．大学生の実態

次に，実際に数学Bで数列を学んだ大学生が，数列の「概念拡張的意義」のうち，特に数列を関数と関連付けてとらえているかの実態を明らかにするために，調査を実施した．調査は，以下に述べる問題調査と意識調査からなり，2014年5月に行った．調査対象は，教育学部数学科に所属する大学1年生33名である．

(1) 問題調査

① 調査のねらいと調査問題

調査のねらいは，関数あるいは数列のいずれの表記や知識を用いても解決可能な複数の問題に対して，関数の考えを用いて解く学生がどの程度いるかを明らかにすることである．調査問題は，次の通りである．

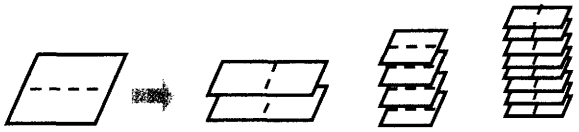
> [1] 次のように，同じ長さのストローを並べて，正方形を横につないだ形を作っていく．
>
> 
>
> 1個：4本　2個：7本　3個：10本

正方形が1個，2個，3個，...のときに必要なストローの本数は，4本,7本,10本，...である．

(1) 正方形が10個のときの必要なストローの本数を求めよ．

(2) 正方形が100個のときの必要なストローの本数を求めよ．

[2] 次のように，長方形の紙を半分に切り，切った紙を重ねて再び半分に切ることを繰り返す．

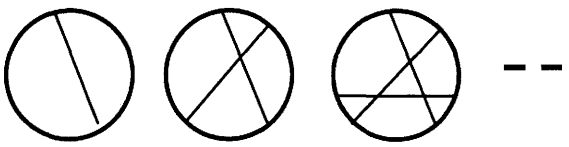


1回目　2回目　3回目

2枚　4枚　8枚

切った回数が1回，2回，3回，...のときの紙の枚数は，2枚，4枚，8枚，...である．切った回数が10回のときの紙の枚数を求めよ．

[3]次のように，円の内部に弦を引き，分割数が最大になるように円を分割していく．



1本:2個　2本:4個　3本:7個

弦の本数が1本，2本，3本，...のときの円の最大分割数は，2個,4個,7個,...である．弦の本数が100本のときの円の最大分割数を求めよ．

各問題は，現行あるいは過去の教科書にある次の問題を参考に，作成した類似題である．

問題[1]：小学校算数4年「伴って変わる量」
学校図書（H16検定）下p.78
中学校数学1年「文字式」（導入）
学校図書（H17検定）p.50

問題[2]：中学校3年「いろいろな関数」
大日本図書（H23検定）p.127

問題[3]：高等学校・数学B「数列」（漸化式）
数研出版（H24検定）p.106

問題[1]は「数量関係（関数）」領域あるいは「数と式」領域の，問題[2]は「数量関係（関数）」領域の，問題[3]は「数列」の問題として解いた経験があると想定される．

② 調査結果と考察

各問題の解法を整理して，次のように分類した．例で挙げたものは，すべて問題[1](1)の解法である．

ア 計算式のみを作って求めた．
例）3×10+1=31

イ 一般化した文字式を作った上で，式に数値を代入して求めた．
例）n個の場合は3n+1だからn=10を代入

ウ 数列の表記や考えを用いて求めた．
例）$a_n=3n+1$だから，$a_{10}=31$
例）初項4，公差3の等差数列の第10項だから，
4+(10−1)×3=31

エ 関数の表記や式，表を用いて求めた．
例）f(x)=3x+1だから，f(10)=31
例） y=3x+1だから，n=10を代入
例） 表よりy=3n+1だから，n=10を代入

オ 無回答あるいは判定不能な記述

それぞれの解答者数は，表6の通りである．ただし，表中の人数は，計算ミスなど，答えが誤っているものを含めて集計した．

表6 調査問題の解法（人数）

解法	[1]	[2]	[3]
ア 計算式	1	4	5
イ 文字式	18	15	0
ウ 数列	9	9	19
エ 関数	5	5	4
オ 無回答等	0	0	5

この結果から，次の点を指摘できる．

ア 問題[1]，[2]はいずれも関数の領域・単元で扱っているにもかかわらず，関数の知識や考えを用いた回答は5人（15%）のみであった．一方で，目立った回答は，いずれも文字式を作った上で文字に数値を代入している解法であった．これは，[1]については，中1での「文字式」の学習経験の影響を受けていると考えられ，[2]についても[1]の解法の影響を受けたことが推測される．

イ 問題[3]は数列の問題であるが，数列の知識や考えのみで解決しようとした回答は19人（58%）で，半数以上であった．教科書の問題の類似題であり，学習経験の影響を強く受けたものと推測される．

ウ 学習経験によらず，3つの問題を，一貫して数列の知識や考えを用いて解いた学生は9人（27%），一貫して関数の知識や考えを用いて解いた学生は4人（12%）いた．ただし，問題[3]については，4人とも表を書いた上で，計算式を作ったり，数列の知識を用いたりして，関数と数列の両方の考えを用いて解決していた．後述するように，[3]は関数の表記や考えのみで解決可能であるが，そのような学生は1人もいなかった．このように，一貫して数列，あるいは関数の知識や考えを用いて解く学生がいることがわかったが，その中で特に関数の知識や考えを用いて回答した学生はわずかであった．

(2) 意識調査

① 調査のねらいと調査内容

調査のねらいは，数列と関連すると考える他の分野

の内容を複数の選択肢の中から選択させることで，関数に関わる内容を選択する学生がどの程度いるかを明らかにすることである．質問の内容は次の通りである．

> 数学Bで学習した「数列」について，関連すると思われる学習内容を以下の中から最大3つまで選び，順序を付けてください．ただし，「数列」自身は除きます．
>
> 数と式，2次関数，図形と計量，場合の数
> 確率，図形の性質，図形と方程式，三角関数
> 指数関数，対数関数，微分，積分，数列，
> ベクトル，行列，2次曲線，関数(全般)
> 図形の面積・体積

選択肢で挙げた内容は，平成11年告示高等学校学習指導要領の数学科の指導内容のうち，多くの学生が学習したと想定されるものである．ただし，数学Ⅱ「微分・積分の考え」と数学Ⅲ「微分法」「積分法」は，まとめて「微分」「積分」としている．またそれ以外に，中学までの学習内容も含めて，「関数(全般)」「図形の面積・体積」を加えている．

② 調査結果と考察

調査結果は，表7の通りである．ただし，1位の人数を3倍，2位の人数を2倍，3位の人数を1倍してそれらを加えた値を「関連点」として，点数が10点以上の内容を点数順に示し，10点未満の点数を合計したものを「その他」に示している．

表7 意識調査 質問[1]

内容	関連点	1位	2位	3位
数と式	35点	10人	2人	1人
確率	33	5	8	2
関数(全般)	22	5	2	3
場合の数	19	3	3	4
指数関数	17	3	3	2
行列	10	1	2	3
その他	37			

この結果から，次の点を指摘できる．

ア 数と式が，「関連点」も1位に挙げる人数も最も多かった．数列の和の計算過程で，展開や因数分解を使うためと考えられる．

イ 「関連点」が2番目に多かったのは，確率であった．これは，入試問題等で，数列と確率の融合問題を解いた経験があるためと考えられる．行列も同様の理由であると推測される．

ウ 関数(全般)の「関連点」は3番目に多かったが，1位，2位に挙げた人数は5人，2人であり，数と式や確率に比べると少なかった．また，指数関数を選んだ学生は，等比数列と指数関数の関連を意識したものと推測されるが，「関連点」は5番目であった．これより，数列と関数を関連付けてとらえている学生は多くないといえる．

以上の2つの調査結果から，関数と関連付けた「概念拡張的意義」を理解している学生は，少ないことが推測される．6で分析した結果と合わせると，「概念拡張的意義」に関する指導がほとんど行われず，結果として「概念拡張的意義」を理解していない学生が多い，という実態が浮かび上がる．

8．過去および海外の教科書の記述・問題

ここでは，数列を学ぶ意義を重視した望ましい指導のあり方を追究するために，過去および海外の教科書の記述や問題について，特に「概念拡張的意義」「実用的意義」の観点から参考となるものを調査した．

(1) 過去の教科書

① 関数との関連

数列の定義として，解析Ⅱ（好学社，1954）に次のような記述がある．

> A たとえば1次関数 $y=2x-1$ において，xに1，2，3，4，… を与えると，yの値は，1，3，5，7，…(1)と変化し，また2次関数 $y=x^2$ において，xに1，2，3，4，… を与えると，yの値は，1，4，9，16，…(2)と変化する．上の(1)，(2)のように，何番目は幾つと定まっている数の列を数列という．[p.13]

数列と関数の関連が明確に記述された定義である．さらに，同じ教科書の等差数列，等比数列を扱ったページには，次の問題や記述がある．

> B $y=ax+b$ という1次関数で，xを1，2，3，…とおいて得られる数列は等差数列であることを示し，その初項と公差を求めよ．[p.15]
>
> C たとえば，2を底とする指数関数 $y=2^x$ において，xを0，1，2，3，…および−1，−2，−3，…とすると，
>
x	…−3	−2	−1	0	1	2	3	4	…
y	… 1/8	1/4	1/2	1	2	4	8	16	…
>
> となる．（中略）ここに得られた数列は隣り合う2項の比がつねに一定である．このように，ある数から始まって，つぎつぎと一定の数をかけて作られる数列を等比数列といい，かける一定の数をこの等比数列の公比という．[p.23]

これらの記述や問題は，数列を「自然数を定義域とする関数」ととらえる「概念拡張的意義」に関する内容であるといえる．

② 現実事象と関連した問題

現行の教科書には見られない数列の利用の問題として，解析Ⅱ（大日本図書，1951）に，次のような問題がある．

D 毎年度の初めに一定額を積み立て，10年目の末に10万円にするには，いくら積み立てればよいか．ただし，年利率5%の複利とする．[p.87]

E ある年度の初めにA円を借り，その年の末から始めて毎年度末に一定額a円ずつを返し，n年間で返しきるには，

$$a = A\frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

にすればよいことを示せ．ただし年利率rの複利とする．[p.87]

Dは貯金，Eは借金返済の問題である．いずれも複利法に関する問題であり，等比数列の和の利用問題である．問題Dは複雑な計算を行うため，筆算で計算するのは困難であり，計算尺等の利用を想定している．

いずれも現実事象と関連付けられていて，数列の「実用的意義」を理解することができる問題である．一方で，複利法以外の問題は見られなかった．

なお，昭和30年代以降の教科書でも，複利法に関する問題は扱っているが，その扱い方は徐々に軽くなり，現在は前述したようにコラム記事のみでしか扱っていない．

(2) 海外（フィンランド）の教科書

海外でも特にフィンランドの教科書を調査した．フィンランドの教科書（M.Per äsalo 他，2006）を対象とした理由は，次の2点である．

・フィンランドの教科書は，日本の教科書に比べて現実事象と関連した問題を多く扱っている（熊倉他，2009）．

・フィンランドの「短い数学」[2]では，「数学的モデルⅡ」という単元の中で数列を扱っていて，現実事象に関わる問題を解決するために数列を利用する，という位置づけになっている．

以下では，特に「数学的モデルⅡ」の中の数列で扱っていて，日本の現在や過去の教科書に見られない興味深い問題を挙げる．

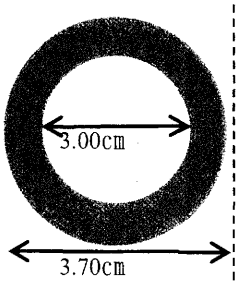
F 患者は，2週間，毎朝食事時に5㎎の薬を飲む治療を行う．1日当たり体内に入った薬の量のうちの30%は減少する．[p.76]

a) 初日から5日間の体内に蓄積された薬の量を求めよ．

b) 体内に蓄積された薬の量を求める式を作れ．

c) 日数と体内に蓄積された薬の量の関係をグラフに表せ．

G 長さ30mの市販のロールフィルムがある．Maijaは，このフィルムの厚さを求めるために，フィルムの外側の直径と内側の直径を測ったところ，3.70cm，3.00cmであった．この値をもとにして，フィルムのおよその厚さを求めよ．[p.92]



H 地球には，消費量が毎年2%ずつ増加するとして，40年間は十分に消費できるだけの石油埋蔵量があることが知られている．もし，毎年の消費量が0.5%のみの上昇だとしたら，何年間分の石油埋蔵量があるといえるか．[p.110]

I 森林管理区内では，1200羽の水鳥がいて，毎年5%ずつ増加すると予想されている．毎年30羽が狩りで捕獲され，毎年同じように鳥の数は推移する．[p.122]

a) 5年間の鳥の数はどのように推移するか．

b) 毎年の鳥の数が計算できる式を求めよ．

c) 式を使って，10年後，20年後の鳥の数をそれぞれ求めよ．

Fは，薬の体内残存量を題材とした問題で，漸化式を作り，それをもとにグラフに示す問題である．グラフに示すことで関数と関連付けている点，一般項を求めずに漸化式をもとに変化を調べている点に特徴がある．体内残量を題材とするような類似問題は，他の文献にも散見される（川添他，2012）．

Gは，フィルムの断面がn重のリングであるとして，等差数列の和を利用して解く問題で，興味深い．この問題は，厚さをxcmとして，3000xが断面積に等しいことから方程式を立てて求めることもできる．近似値で答えるので，電卓の使用が前提となっている．

Hは，石油埋蔵量を題材にした問題で，等比数列の和の利用問題である．この問題の解決過程において，$1.005^x = 1.302$ を解くのに，対数を利用して $x = \log 1.302 / \log 1.005 \fallingdotseq 52.91\ldots$ としていた．xの値の範囲を必ずしも自然数に限定せず，$y = 1.005^x$ を指数関数とみなした上で，$y = 1.302$ となるxを求める，すなわち指数方程式を解く点に特徴がある．

Iは，生体個数の変化を題材にした問題で，漸化式を作り，それをもとに一般項を求め，固体数の変化の推移を調べる問題である．ただし，漸化式の解き方は，日本で指導するような一定のアルゴリズムに従う解き方ではなく，次のように，等比数列の和の公式を用いた方法で求めている．

$a_1 = 1200q - 30$

$a_2 = a_1 q - 30$

$= (1200q - 30)q - 30 = 1200q^2 - 30q - 30$

$a_3=a_2q-30=1200q^3-(30+30q+30q^2)$
一般に，$a_n=1200q^n-(30+30q+\ldots+30q^{n-1})$
$=1200\,q^n-30\times(1-q^n)/(1-q)$ ◢

以上のF～Iは，いずれもそれらの問題解決を通して，数列の「実用的意義」を理解させることが期待できる問題といえよう．

9．数列の指導に関する先行研究

ここでは，数列を学ぶ意義を実感させる望ましい指導のあり方をさらに追究するために，日本数学教育学会誌や論文発表会論文集を中心に，実践的な先行研究を調査した．その結果，生徒に興味・関心を持たせる工夫をした「文化的意義」に関わる実践研究や教材研究は複数あった（例えば，横,2009;滝沢,1999;栗原,1991;新上,1984;本間,1982 等）．一方で，「概念拡張的意義」「実用的意義」に関わる先行研究はわずかしかなかった．それらの研究は，次の通りである．

(1) 小寺の実践研究

小寺（2003）は，「数列を離散的関数，漸化式を差分方程式として中学～高校1年で指導し，それを基礎として基本的な微分方程式を高校で扱うことをこれからのカリキュラムに組み込みたい」（p.6）として，中3を対象として，関数の授業の一環として，生物の個体数変化の授業実践を行い，生徒が意欲的に課題に取り組む姿を明らかにした．その後も個体数変化の実践を継続的に実践している．

(2) 岡部の教材研究

岡部（1998）は，数列の単元の導入において，年次別データの出ている記事を教材として用意し，データを数列として並べ，グラフに表して，等差数列や等比数列を指導することを提案した．特に，数列をグラフに表すことに特徴がある．

(3) 横澤の実践研究

横澤（2004）は，数列の漸化式の利用の場面で，数学的モデル化の実践として，フィンランドの教科書問題 D と類似の「薬の体内残量」を求めるという教材を扱った．岡部の実践と同様に，体内残量の変化をグラフで予想させる点に特徴がある．漸化式を解いた上で，エクセルを用いて極限値まで扱っている．

いずれの研究も，何らかの形で数列を関数と関連付けていて，数列の「概念拡張的意義」に関わる研究といえる．同時に，そこで扱っている問題は「実用的意義」が理解できるものといえよう．

10．学ぶ意義を重視した指導

8，**9**で調査した教科書の記述・問題や先行研究を踏まえて，数列を学ぶ意義，特に「概念拡張的意義」および「実用的意義」を重視した望ましい指導のあり方を考察し，次の4点にまとめた．

(1) 導入では，グラフ等を示して関数と関連付ける

数列を関数と関連付けて理解するために，数列の導入場面では，過去の教科書記述Aのように，数列の1例として，1次関数や2次関数において x＝1，2，3，…のときの対応するyの値を並べたものを例示することが考えられる．

等差数列の導入では，公差が $\Delta x=1$ のときの Δy，すなわち「変化の割合」に等しいことに触れ，一般項はnの1次関数であることを扱う．このことにより，等差数列の一般項を求める問題を，教科書で扱っている方法とは別に，次のように関数の考えで解く方法を扱うことができる．

（問題）等差数列$\{a_n\}$で $a_3=2$，$a_6=14$ のとき，一般項を求めよ．

＜解答＞一般項はnの1次関数なので，
$a_n=pn+q$ として，
$a_3=3p+q=2$，$a_6=6p+q=14$
これを解いて $p=4$，$q=-10$ より $a_n=4n-10$ ◢

同様に，等比数列の導入では，公比が正の場合，公比を底とする指数関数であることを扱う．

また，等差数列や等比数列の変化をグラフ（図 1）に表すことを扱う．このことにより，数列の変化の特徴について理解を深めることができる．

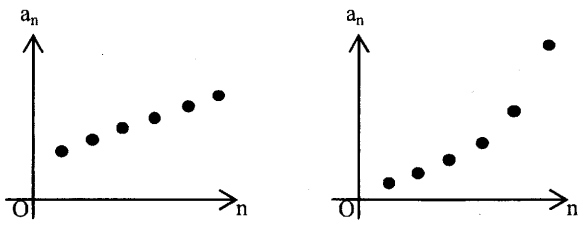


図1 等差数列と等比数列のグラフ

(2) 階差数列と元の数列の関係を関数でとらえる

階差数列は，$\Delta x=1$ のときの Δy の変化を表す関数とみなすことができる．例えば，階差数列が一定，すなわち定関数であれば，元の数列は1次関数，すなわち等差数列である．同様に，階差数列が等差数列，すなわち1次関数であれば，元の数列は2次関数であり，一般項は2次式で表される．一般に，数列がn次関数であれば，第1階差数列はn－1次関数，第2階差数列はn－2次関数，…となる．この考えを利用すると，第1階差数列，第2階差数列，…を調べることで，もとの数列がどのような関数であるかを推測することができる．

階差数列の指導場面では，上記の内容を扱う．このことにより，例えば，前述の調査問題[3]の類似題である典型的な階差数列の利用問題を，次のように関数の考えで解く方法を扱うことができる．

（問題）どの3本も1点で交わることのないn本の直線で，平面は最大いくつに分割されるか．

＜解答＞　求める最大分割数を a_n として，その階差数列を b_n する．

n	1	2	3	4	5	6
a_n	2	4	7	11	16	22
b_n		2	3	4	5	6

b_n は等差数列で1次関数だから，a_n は2次関数．そこで $a_n=pn^2+qn+r$ とおく（以下略）．◢

階差数列を求めることは関数の微分に，階差数列からもとの数列を求めることは積分に通ずるものであり，この課題解決を通して，関数の変化を調べる方法の理解を深めることができる．

(3)　漸化式をつくる活動を重視する

漸化式は解くことだけが目的ではないこと，漸化式に表すことで数列の特徴がわかることを理解するために，一般項が求められない漸化式も含めて，漸化式を作る活動を積極的に取り入れる．例えば，フィンランドの教科書問題 D を扱ったり，次の課題に取り組んだりする活動が考えられる．

> J　自分で2項間漸化式を作り，初項から5項までを表に示そう．次に，友達の作った表から漸化式を予想し，それをもとに10項を求めよう．

J の課題解決を通して，自分で作成した漸化式は，必ずしも解くことができるとは限らないが，漸化式をもとに数列の変化の特徴がわかることについて，理解を深めることができる．

(4)　活用場面で変化の推移を調べる課題を扱う

関数と関連付けた数列の理解を深めるために，数列の活用の場面では，関数の活用問題で扱うような「変化の推移」や「未知の部分を予測する」課題を取り上げる．例えば，小寺や岡部の課題，フィンランドの問題 F，I を扱ったり，次のような課題に取り組んだりする活動が考えられる．

> K　40人がドアの前に1列に並んで，ドアから順番に部屋を出るとき，全員が部屋を出るのにどれくらいの時間がかかるであろうか．ただし，一歩進むのに1秒かかるとして，前の人が1歩前に出た後に次の人が1歩前に出ることとする．
>
> 
>
> また，人数を 50 人，100 人と増やしたら，時間はどのように増えるだろうか．

K は，セルオートマトンの問題（西成，2011）を参考に作成した課題である．一般に，1 列に並ぶ人数を n 人，全員が部屋から出る時間を a_n 秒とすると，$a_n=2n-1$ で表される．このような課題解決を通して，「未知の部分を予測する」関数と同様の「実用的意義」の理解を深めることができる．

11. おわりに

10 (1) ～ **(4)** で示した指導は，数列の「概念拡張的意義」や「実用的意義」を理解させることにとどまらず，関数の理解を深め，学ぶ意義を理解させることが期待できる。

今後の課題は，**10 (1)** ～ **(4)** に基づいて実際に授業実践を行い，その有効性を検証することである．

＜参考・引用文献＞

新上勇(1984)「興味・関心をもたせる指導について」日本数学教育学会誌.66 巻 9 号.pp.216-222

本間政幸(1982)「キューブシュガーを使った数列の学習」日本数学教育学会誌.64 巻 5 号.pp.110-114

川添充･岡本真彦(2012)『思考ツールとしての数学』共立出版.pp.19-54

小寺隆幸(2003)「事象の変化を差分でとらえる力を育てる中学校の関数指導」日本数学教育学会誌.85 巻 11 号.pp.3-14

国立教育政策研究所(2007)「平成 17 年度高等学校教育課程実施状況調査結果」

熊倉啓之(2000)「学ぶ意義を実感させる数学の指導に関する研究-三角比の授業を通して-」日本数学教育学会誌.82 巻 11 号.pp.2-10

熊倉啓之(2003)「学ぶ意義を実感させる関数の指導に関する研究」日本数学教育学会誌.85 巻 11 号.pp.40-49

熊倉啓之(2004)「学ぶ意義を実感させるベクトルの指導に関する研究～中学と高校の接続を重視して～」第 37 回数学教育論文発表会論文集.pp.337-342

熊倉啓之(2005)「学ぶ意義を実感させる図形と方程式の指導に関する研究～中学と高校の接続を重視して～」第 38 回数学教育論文発表会論文集.pp.361-366

熊倉啓之(2006)「学ぶ意義を実感させる三角比の指導に関する研究～中学と高校の接続を重視して～」第 39 回数学教育論文発表会論文集. pp.355-360

熊倉啓之(2008)「学ぶ意義を実感させる三角関数の指導に関する研究～関数の 1 つである三角関数の指導に焦点を当てて～」第 41 回数学教育論文発表会論文集.pp.453-458

熊倉啓之(2010)「学ぶ意義を実感させる 2 次関数の指導に関する研究」第 43 回数学教育論文発表会論文集(第 1 巻).pp.199-204

熊倉啓之(2011)「学ぶ意義を実感させる微分の指導に関する研究」第 44 回数学教育論文発表会論文集(第 1 巻).pp.585-590
熊倉啓之・吉田明史・長尾篤志・國宗進・川合公孝(2009)「教科書と授業からみるフィンランドの数学教育」日本数学教育学会誌.91 巻 7 号.pp.40-51
栗原幹夫(1991)「問題内容を造形化する（数列）」第 24 回数学教育論文発表会論文集.pp.203-208
M.Per äsalo・R.Solo・H.Wuolijoki(2006)「Lukiolaisen matematiikka 6」WSOY
長崎栄三・滝井章編著(2007)『何のための算数教育か』東洋館出版.pp.12-34
長崎栄三・國宗進・太田伸也・相馬一彦(2009)『新たな数学の授業を創る』明治図書.p.176
西成活浩(2011)『とんでもなく役に立つ数学』朝日出版社.p.168
岡部進(1998)「社会現象の教材化-年次別データ，数列，片対数方眼紙,関数電卓を活用して-」日本数学教育学会誌.80 巻 1 号.pp.15-22.
下瀬新(1990)「解析教育における数列・級数の取扱いの変遷」第 23 回数学教育論文発表会論文集.pp.313-318
末綱恕一・菅原正巳(1951)「解析Ⅱ」大日本図書.p.87
滝沢洋(1999)「試行錯誤しながら創造性を育む課題について」日本数学教育学会誌.81 巻 7 号.pp.204-212
中央教育審議会(2008)「幼稚園,小学校,中学校,高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善について(答申)」pp.83-87
辻正次・吉田洋一(1954)「高等学校解析Ⅱ」好学社.p.23/15/23
山崎浩二(2012)「算数・数学を学習することの意義を考える」日本数学教育学会誌.94 巻 11 号.pp. 38-41
横澤克彦(2004)「数列-Excel を利用して数学的モデル化を行う」長崎栄三他編著『授業研究に学ぶ高校新数学科の在り方』明治図書.pp.126-141
横弥直浩(2009)「高等学校における数学的活動を重視した授業の提案」日本数学教育学会誌.91 巻 3 号.pp.18-23

註

1)東京書籍 301,302，実教出版 303～305，啓林館 306～308，数研出版 309～313，第一学習社 314,315

2)フィンランドの高等学校数学科カリキュラムは，長い数学と短い数学の 2 つのシラバスがあり，短い数学は日本の文系コースに相当する.