SURE 静岡大学学術リポジトリ
Shizuoka University REpository

非可換球面上のエンタングルメントエントロピー

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2016-06-14 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 鈴木, 真理子 メールアドレス: 所属:
URL	https://doi.org/10.14945/00009582

静岡大学　博士論文

非可換球面上のエンタングルメントエントロピー

2015年12月

大学院　自然科学系教育部

情報科学専攻

鈴木真理子

概 要

エンタングルメントエントロピーは量子もつれを測る量であり、重要な物理量の一つである。エンタングルメントエントロピーは素粒子物理だけでなく、物性物理や情報理論の分野にも活用されている。

可換な空間上の基底状態のエンタングルメントエントロピーの主要項が、着目している領域とそれ以外の領域の境界面積に比例する事が知られている。一方で、非可換な空間上での基底状態のエンタングルメントエントロピーの主要項が、着目している領域の体積に比例する事が推測されている。この振る舞いは、相互作用の非局所性に由来すると考えられている。

この論文では、非可換球面上でスカラー場のエンタングルメントエントロピーを、行列模型を用いて計算した。

エンタングルメントエントロピーの計算には、自由な理論と相互作用を持つ理論の両方で、レプリカ法を用いた。この方法は、先行研究と異なる方法である。

自由場に対しては、先行研究と矛盾しない結果を得た。また、エンタングルメントエントロピーへの有限温度の効果が、一般的な場の理論と同じく、着目する領域の体積に比例する事を発見した。

相互作用場に対しては、モンテカルロシミュレーションを使うことにより、初めて計算結果を得る事が出来た。この時のエンタングルメントエントロピーの振る舞いは、明らかに自由場の場合と異なる。特に、エンタングルメントエントロピーの値が、自由場に比べ、1/10 程度となる。

博 士 学 位 論 文 目 次

鈴木真理子

審査申請論文名：非可換球面上のエンタングルメントエントロピー

目 次

1 序論 **4**

2 エンタングルメントエントロピー **9**

2.1 エンタングルメントエントロピーの性質 9

2.2 ２粒子系のエンタングルメントエントロピー 10

2.3 レプリカ法 11

2.4 場の理論におけるエンタングルメントエントロピーの計算 14

3 非可換空間上の場の理論 **20**

3.1 非可換平面の幾何 20

3.2 UV/IR mixing 24

4 スカラー場の理論と非可換球面 **28**

4.1 コヒーレント状態 28

4.2 可換な理論と非可換な理論 32

4.3 行列模型と二つの領域 39

4.4 実際の計算量 41

4.5 非可換空間上の場の理論の計算方法 42

5 ハイブリッドモンテカルロシミュレーション **43**

6 数値解析の結果 **45**

6.1 $\lambda = 0$ 45

6.2 $\lambda = 1.0$ 49

7 まとめと展望 **53**

A de Sitter 時空上の場の理論 **56**

A.1 序論 56

A.2 de Sitter 時空上の赤外発散 58

A.3 宇宙項 Λ への量子補正 61

A.4 Liouville 重力と matter の結合項 61

A.5 2 次元 matter 場による量子補正 63

A.6 de Sitter 対称性の回復 66

A.7 まとめと展望 67

B 計算法 ($\lambda = 0$) **69**

C 誤差計算（ジャックナイフ法） **70**

D 補間計算（シンプソン法） **72**

E ハイブリッドモンテカルロ法のコード **75**

1　序論

近年、研究が盛んに行われている物理量の一つにエンタングルメントエントロピーという量がある。量子多体系において、量子状態が個々の状態のテンソル積で書き表す事が出来ない場合、この状態はエンタングルしている（もつれている）、という。量子のもつれの度合いを示す量の一つがエンタングルメントエントロピーである。エンタングルメントエントロピーは素粒子理論の発展の中で、重力理論に関連して発展してきた。一方で物性物理や情報理論の分野にも活用されている重要な物理量である。

素粒子理論において、エンタングルメントエントロピーは以下の様に研究されてきた。

万有引力とも呼ばれる様に、重力（一般相対論）は我々の宇宙の空間法則を記述する理論である。宇宙論における大きな課題の一つがブラックホールである。ブラックホールは非常に重く、サイズがとても小さい天体で、中心では重力場が非常に強い為、質量0の光さえもブラックホールから抜け出す事が出来ない。その為、ブラックホールの内部の情報を得る事は出来ない。一方、ブラックホールが熱力学を満たす事が発見され、ブラックホールエントロピーは次のベッケンシュタイン・ホーキングの公式を満たす事が知られている [1,2]。

$$S_{BH} = \frac{k_B c^3}{4G_n \hbar} \cdot A_{BH} \tag{1.1}$$

ここで、A_{BH} はブラックホールの表面積である。また、k_B はボルツマン定数、c は光速、G_N は重力定数、$\hbar$ はプランク定数である。この公式は、体積に比例するエントロピーを持つ通常の熱力学とは異なった性質を示し、ブラックホールの熱力学やエントロピーに対して、更なる理解が必要な事が分かる。

一方、(1.1) をミクロに理解するためには、量子重力が必要である。他の３つの相互作用と同様に重力の量子化を行うと、高エネルギースケールの寄与が大きくなり、紫外発散が存在し、繰り込む事が出来ない。

そのような中で、(1.1) を場の理論のエンタングルメントエントロピーを計算する事によって理解しようという研究がなされてきた。量子系では、系の一部が観測出来ない場合に生じるエントロピーをエンタングルメントエントロピーと呼ぶ。ブラックホールの内部が見えない事が、ブラックホールエントロピーの元と考えられる。これに習い、系を球殻を用いて２つに分け、球殻内の領域を観測出来ないブラックホールに見立てた研究が行われてきた [3]。

重力が繰り込み可能でないと言う問題を解決する理論の一つに、超弦理論がある。物質の最小単位を、今までの粒子から、1次元に広がった弦（ひも）であるとする理論で、統一理論の最有力候補である。実際、BPS 状態に対応する、ある種のブラックホールに対しては、超弦理論を用いて (1.1) を

ミクロに導出する事が出来た [4]。

超弦理論の研究の中で、AdS/CFT 対応が発見された [5]。AdS/CFT 理論とは、AdS 時空における重力理論が、それよりも 1 次元低い時空の共形場理論と等価であるという予測である。その中で、AdS/CFT 対応による笠-高柳公式

$$S_A = \frac{Area(\gamma_A)}{4G_N} \ . \tag{1.2}$$

が発見された [6]。S_A は場の理論の領域 A についてのエンタングルメントエントロピーであり、$Area(\gamma_A)$ はバルクの重力側における面で、その境界が領域 A の境界に一致し、面積が極小である面の面積である。この式は、エンタングルメントエントロピーが面積に比例する、という事を示し、(1.1) に類似している。この公式は、場の理論に置けるエンタングルメントエントロピーを幾何の情報で書き表す事が出来る事を示しているが、更なる研究から、エンタングルメントエントロピーが様々な幾何の情報を与える事が明らかになってきた。

これにより、エンタングルメントエントロピーを始めとする量子エンタングルメントの研究が量子重力の構築に繋がっていくと期待される。

本論文における、もう一つの重要な概念である非可換空間も、量子重力との間に深い関係がある。量子重力を考えると、時空の不確定性から、何らの意味で可換でない時空が自然に現れる事が期待される。また、超弦理論では B 場が非自明な背景においては、非可換空間上のゲージ理論が自然に現れる事が知られている [12]。超弦理論を非摂動的に定義すると期待されている行列模型 [7–9] においても、非可換空間上のゲージ理論が自然に現れる [10, 11]。よって、非可換空間上の場の理論によって、量子重力のある本質的な側面が捉えられていると期待される。

非可換空間上の場の理論は、可換な空間上の場の理論と異なる性質を持つ。その一つが UV/IR mixing と呼ばれる効果である [13]。可換な空間上の積は、非可換空間上でスター積となる。スター積は微分を含んでおり、場の 3 次以上の項を持つ場合、相互作用が非局所的になり、影響が表れる。スター積の効果を考えると、紫外発散に由来する、赤外発散が出現する。この現象を UV/IR mixing と呼ぶ。

エンタングルメントエントロピーの性質の一つに面積則と呼ばれる物がある。全領域を A と B の二つの領域に分ける事を考える。領域 A に制限されたエンタングルメントエントロピー S_A の主要項は、領域 A の境界の面積 $|\partial A|$ に比例する、という性質である。

$$S_A \sim \frac{\partial A}{\epsilon^{D-1}} \tag{1.3}$$

ϵ は紫外のカットオフであり、D は空間の次元である。

また、一方で、相互作用が非局所的な場の理論では、エンタングルメントエントロピーの主要項が体積に比例しうる事が予測されている。この事は体積則と呼ばれる。文献 [14] では、具体的な非局所

的な理論のモデルから体積則が計算されている。また、非局所的な理論の一つである非可換空間上の理論に対して、文献 [15,16] で、非可換空間上の超対称 Yang-Mills 理論の重力双対の解析が行われており [17,18]、体積則が成立する事が予想されている。体積則は、この UV/IR mixing に由来すると考えられる。

ここまでで、エンタングルメントエントロピーと量子重力の繋がり、および非可換幾何と量子重力との繋がりを見た。従って、非可換幾何におけるエンタングルメントエントロピーを研究する事によって、量子重力への新しい知見を得る事が出来ると期待される。

本論文で、我々は、非可換球面上のスカラー理論で、エンタングルメントエントロピーを計算する [19]。非可換球面は非可換空間の簡単な例であり、非可換球面上の場の理論は行列模型で記述出来る。そこでは、行列サイズで紫外発散のカットオフが自然に導入されるため、非可換平面などに比べて、量子論的に扱いやすい。文献 [20,21] では、自由場の場合にエンタングルメントエントロピーが計算された。(文献 [22,23] も参照) UV/IR mixing は非局所的な相互作用に由来するため、我々は相互作用がある場合に特に興味がある。

文献 [20,21] で用いられた、エンタングルメントエントロピーの計算方法は以下の様な物である [3]。この方法は、今まで自由な理論のエンタングルメントエントロピーの計算に用いられてきた。自由な理論のハミルトニアンは、以下の様に与えられる。

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}\left(\delta_{ij}p_i p_j + x_i K_{ij} x_j\right) \tag{1.4}$$

ここで、交換関係は $[x_i, p_j] = i\delta_{ij}$ を満たし、K_{ij} は positive definite matrix である。基底状態のエンタングルメントエントロピーを計算する。測定する領域 I に対して、変数 X_I と P_I を以下の様に定義する。

$$[X_I]_{ij} = \frac{1}{2}[K^{-1/2}]_{ij},\ \ [P_I]_{ij} = \frac{1}{2}[K^{1/2}]_{ij},\ \ i,j \leq I \tag{1.5}$$

X_I と P_I を用いると、エンタングルメントエントロピーは以下の様に計算する事が出来る。

$$S_I = \mathrm{Tr}\left\{\left(X_I\cdot P_I + \frac{1}{2}\mathbb{1}\right)\log\left(X_I\cdot P_I + \frac{1}{2}\mathbb{1}\right) - \left(X_I\cdot P_I - \frac{1}{2}\mathbb{1}\right)\log\left(X_I\cdot P_I - \frac{1}{2}\mathbb{1}\right)\right\} \tag{1.6}$$

この計算方法は、自由場の場合にしか適用出来ない。また、有限温度の場合には適用出来ない。

我々の用いた計算方法はレプリカ法に基づいており、自由場のみならず、相互作用場に対しても適用可能である [24,25]。特に相互作用がある場合には、ハイブリッドモンテカルロ法による、数値シミュレーションを行い、エンタングルメントエントロピーを計算した。[1]これは、非可換空間上の相互作用のある理論における、エンタングルメントエントロピーの初めての計算例である。

[1]特にスカラー場の場合は、文献 [26–31] を参照。また、非可換球面に関する数値シミュレーションについては文献 [32,33] を参照。

我々の計算結果は以下の物である。

自由場の場合では、時間の連続極限を取ると、エンタングルメントエントロピーが境界の面積の 2 乗と行列サイズに比例する事を観察した。この結果は、既出の結果と一致している [20, 21]。エンタングルメントエントロピーが、観測する領域の温度に依存する事を観測し、有限温度の寄与が領域の体積に比例する事を発見した。また、有限温度効果は行列模型のサイズ N と時間方向のカットオフに依存しない事が分かった。

相互作用のある場合では、エンタングルメントエントロピーの振る舞いが自由場と異なる事を観測した。この結果から、非局所的な理論の効果が見て取れた。また、エンタングルメントエントロピーの値は、自由場の理論のエンタングルメントエントロピーの約 1/10 の値を取る事が分かった。

この論文は、以下の様な構成である。

・第 2 章では研究で扱ったエンタングルメントエントロピーの一般的な性質のレビューを行う。例として 2 粒子系のエンタングルメントエントロピーの計算を行った。また、エンタングルメントエントロピーを計算する一般的な手法であるレプリカ法を解説した。そして、レプリカ法の計算例として、場の理論におけるエンタングルメントエントロピーを計算した。

・第 3 章では非可換空間の例として非可換平面についてレビューを行う。その中でも、非可換空間上の場の理論で特徴的な効果である UV/IR mixing について非可換平面上で議論する。

・第 4 章では、、我々が行列模型を用いて計算したモデルである、非可換球面上のスカラー ϕ^4 理論について説明した。$S_1\times\ S_2$ の多様体上で定義される可換な空間上のモデルを、行列模型を用いて、どのように非可換球面上へ拡張するかを述べる。特に、非可換球面上ではスター積が存在する事を示し、非局所的な効果が存在するモデルである事を示した。また、エンタングルメントエントロピーを求めるためには、領域を分ける必要がある。領域の分け方と計算に用いる行列模型の対応について、コヒーレント状態を用いて説明する。そして、非可換空間上で相互作用を持つ理論の場合の、補間作用 (interpolating action) を用いる計算法を述べる。

・第 5 章では、実際に非可換な理論の計算に用いた、ハイブリッドモンテカルロシミュレーションの説明を行う。この計算法では、新しい変数としてガウス分布で決まる共役運動量を用いる事により、一つの変数にのみよる場合に比べ、より効率的に結果を得る事が可能となる。

・第 6 章では自由場の理論と相互作用場の理論のシミュレーション結果を説明する。

・第 7 章では計算の結果に対するまとめと考察を行い、今後の展望について記述している。

・付録 A では宇宙論についての研究について述べている [34]。エンタングルメントエントロピーは宇宙論にも深く関係がある。その宇宙論の中の大きな問題の一つに、宇宙項問題がある。宇宙項問題とは、宇宙の加速度的膨張に対する問題である。我々の住む宇宙は de Sitter 時空と呼ばれる、曲がった時空で記述する事が出来る。曲がった時空の効果を考慮し、物質場の宇宙項への寄与を計算し

ている。

・付録Bでは、自由場の場合のエンタングルメントエントロピーの計算法を説明した。時間に対して離散化した自由場の作用を用い、直接自由エネルギーを計算する。そして、自由エネルギーをレプリカ法に代入し、エンタングルメントエントロピーを計算している。

・付録Cでは、誤差計算の方法の一つであるジャックナイフ法を説明した。ジャックナイフ法は、複雑な物理量を計算する際に用いられる誤差の計算方法であり、また、自己相関を含んだデーターから得られる物理量の誤差を求める方法である。我々は相互作用場の理論での誤差計算に、この方法を用いた。

・付録Dでは、近似法の一つである、シンプソン法を説明した。シンプソン法は、２次曲線によって近似する方法である。研究では、相互作用場の理論で補間作用の積分に用いた。

・付録Eでは、相互作用場の計算に用いた、ハイブリッドモンテカルロ法のコードをもせている。

2　エンタングルメントエントロピー

本章では研究で扱ったエンタングルメントエントロピーの一般的な性質について述べる。例として2粒子系のエンタングルメントエントロピーの計算を行った [35]。また、エンタングルメントエントロピーを計算する一般的な手法であるレプリカ法を解説した後に、場の理論におけるレプリカ法の計算例を述べる。

2.1　エンタングルメントエントロピーの性質

量子多体系全体が二つの系 A と B に分ける事が可能な時を考える。すなわち、全体系のヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ が各系のヒルベルト空間 $\mathcal{H}_A$ と $\mathcal{H}_B$ の積で書けるとする。

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \ . \tag{2.1}$$

例として、場の理論において考えてみると、系 A と系 B への分解として、図 2.1 の様に空間の領域が分解されている状況を考える事が出来る。

(2.1) 式が成立している時、系 A におけるエンタングルメントエントロピー S_A は、以下の様に定義される。

$$S_A = -\mathrm{Tr}[\rho_A \log \rho_A] \ . \tag{2.2}$$

ここで ρ_A は系全体の密度行列 ρ_{tot} について、領域 $\mathcal{H}_B$ でトレースを取った物である。

$$\rho_A = \mathrm{Tr}_B[\rho_{tot}] \ . \tag{2.3}$$

また、密度行列 ρ_{tot} が純粋状態である場合、エンタングルメントエントロピーは以下の性質を満たす。

$$S_A = S_B \ . \tag{2.4}$$

次に、エンタングルメントエントロピー S_A の主要項については以下の様な性質がある。$(d+1)$ 次元の局所的な場の理論の場合は境界面積に比例した主要項を持つ $(|\partial A|/\epsilon^{d-1})$。$|\partial A|$ は領域 A と B の境界の面積であり、ϵ は UV のカットオフである。この振る舞いは相互作用の局所性を反映している。一方で、相互作用が非局所的な場の理論では、エンタングルメントエントロピーの主要項が体積に比例しうる事が予測されている。この事は体積則と呼ばれる。文献 [14] では、体積則を示す具体的な非局所的な理論のモデルが提示された。また、非可換空間上の理論は非局所的な理論の一つであるが、文献 [15,16] では、非可換空間上の超対称 Yang-Mills 理論の重力双対の解析から、この理論においては体積則が成立する事が予想されている。我々は、非可換空間の一つである非可換球面上の場の理論で、直接エンタングルメントエントロピーを計算し、主要項の振る舞いを調べる。

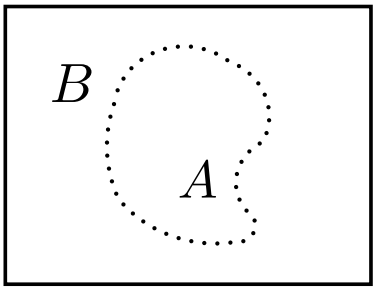


図 2.1: 全体に対する領域 A と B

2.2 ２粒子系のエンタングルメントエントロピー

この節では、具体例としてスピン 1/2 を持つ二つの粒子 A と B からなる系でのエンタングルメントエントロピーを計算する。まず、スピン 1 に合成された固有状態は、規格化すると次の 3 重項で書き表される。

$$|1,1\rangle = |\frac{1}{2}\rangle_A|\frac{1}{2}\rangle_B. \tag{2.5}$$

$$|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\frac{1}{2}\rangle_A|-\frac{1}{2}\rangle_B + |-\frac{1}{2}\rangle_A|\frac{1}{2}\rangle_B\right). \tag{2.6}$$

$$|1,-1\rangle = |-\frac{1}{2}\rangle_A|-\frac{1}{2}\rangle_B. \tag{2.7}$$

次に $|1,1\rangle$ に対応する純粋状態を考える。$|1,1\rangle$ の密度行列は、

$$\rho_{tot} = |1,1\rangle\langle 1,1| = |\frac{1}{2}\rangle_A|\frac{1}{2}\rangle_B\,{}_A\langle\frac{1}{2}|_B\langle\frac{1}{2}|, \tag{2.8}$$

である。(2.3) 式の定義より、領域 B についてトレースを取ると、

$$\begin{aligned}\rho_A &= \mathrm{Tr}_B[\rho_{tot}] \\ &= {}_B\langle\frac{1}{2}|\rho_{tot}|\frac{1}{2}\rangle_B + {}_B\langle-\frac{1}{2}|\rho_{tot}|-\frac{1}{2}\rangle_B \\ &= {}_B\langle\frac{1}{2}|\frac{1}{2}\rangle_A|\frac{1}{2}\rangle_B\,{}_A\langle\frac{1}{2}|_B\langle\frac{1}{2}|\frac{1}{2}\rangle_B + {}_B\langle-\frac{1}{2}|\frac{1}{2}\rangle_A|\frac{1}{2}\rangle_B\,{}_A\langle\frac{1}{2}|_B\langle\frac{1}{2}|-\frac{1}{2}\rangle_B \\ &= |\frac{1}{2}\rangle_A\,{}_A\langle\frac{1}{2}|,\end{aligned} \tag{2.9}$$

となる。よって、ρ_A は $|\frac{1}{2}\rangle$ についての純粋状態である。そのため、エンタングルメントエントロピーは 0 となる ($S_A = 0$)。

次に $|1,0\rangle$ についての純粋状態を考える。ρ_{tot} は $|1,0\rangle\langle 1,0|$ で書き表される。

$$\rho_{tot} = |1,0\rangle\langle 1,0|$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left(|\frac{1}{2}\rangle_A|-\frac{1}{2}\rangle_B + |-\frac{1}{2}\rangle_A|\frac{1}{2}\rangle_B\right)\left({}_A\langle\frac{1}{2}|_B\langle-\frac{1}{2}| + {}_A\langle-\frac{1}{2}|_B\langle\frac{1}{2}|\right)\\
&= \frac{1}{2}\Big(|\frac{1}{2}\rangle_A|-\frac{1}{2}\rangle_B\,{}_A\langle\frac{1}{2}|_B\langle-\frac{1}{2}| + |\frac{1}{2}\rangle_A|-\frac{1}{2}\rangle_B\,{}_A\langle-\frac{1}{2}|_B\langle\frac{1}{2}|\\
&\qquad +|-\frac{1}{2}\rangle_A|\frac{1}{2}\rangle_B\,{}_A\langle\frac{1}{2}|_B\langle-\frac{1}{2}| + |-\frac{1}{2}\rangle_A|\frac{1}{2}\rangle_B\,{}_A\langle-\frac{1}{2}|_B\langle\frac{1}{2}|\Big).
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

このとき、領域 A に制限された密度行列は同様にして計算される。

$$
\begin{aligned}
\rho_A &= \mathrm{Tr}_B[\rho_{tot}]\\
&= \frac{1}{2}\left(|-\frac{1}{2}\rangle_A\,{}_A\langle-\frac{1}{2}| + |\frac{1}{2}\rangle_A\,{}_A\langle\frac{1}{2}|\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\right)\\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

以上より、密度行列は $|\frac{1}{2}\rangle$ と $|-\frac{1}{2}\rangle$ の混合状態となる。この時のエンタングルメントエントロピー S_A は定義式より、求められる。

$$
\begin{aligned}
S_A &= -\mathrm{Tr}_A[\rho_A\log\rho_A]\\
&= \mathrm{Tr}\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right]\cdot\log 2\\
&= \log 2.
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

全体系では $|1,0\rangle$ に対応する純粋状態であったが、領域 A から見ると混合状態であった。以上より、全体系が純粋状態であっても、部分的な系のエンタングルメントエントロピーが消えない事（$S_A \neq 0$）が確かめられた。全体系は純粋状態であっても、部分形は混合状態と見なせるという理由で、一般的にエンタングルメントエントロピーは消えない。

2.3 レプリカ法

エンタングルメントエントロピーを計算する際、一般的な手法としてレプリカ法という方法がある [24]。この方法はエンタングルメントエントロピーの定義式 (2.2) を以下の様に定義を書き換える事から始める。

$$
S_A = \lim_{n\to 1}\left[-\frac{\partial}{\partial n}\mathrm{Tr}\rho_A^n\right] = \lim_{n\to 1}\left[-\frac{\partial}{\partial n}\log(\mathrm{Tr}\rho_A^n)\right]\ , \tag{2.13}
$$

ここで n はレプリカの数であり、元の理論を n 個コピーした事を示す。また n は、自然数から実数に拡張されている。(2.13) より、$\mathrm{Tr}\rho_A^n$ の計算方法を考えれば良い。

以下では、基底状態に対するエンタングルメントエントロピーを取り扱う。まず、場の理論における経路積分を考える。理論に現れる場を総称して ϕ と書く。また、時間についてはウィック回転 $(t \to -ix_0)$ を行い、時間 1 次元 + 空間 d 次元上で定義されていた ϕ を、空間 $d+1$ 次元上の場と定義する。今回は簡単のために $d=1$ の場合で考える $(\phi = \phi(x_0, x_1))$。分配関数は作用を $S[\phi]$ とした場合、

$$Z = \int \prod_{-\infty < x_0 < 0} \prod_{x_1} [D\phi(x_0, x_1)] e^{-S[\phi]}, \tag{2.14}$$

と、経路積分より表される。

次に、場の理論における基底状態の波動関数を経路積分を使って書き表す事を考える。時刻 $x_0 = X_0$ の波動関数は、場の配位 $\phi(X_0, x_1)$ の汎関数である。理論が並列対称性を持つ時、時刻を $X_0 = 0$ としてもよい。従って、これを $\Psi[\phi(x_1)]$ と書く事にする。基底状態の波動関数は以下の様に書ける。

$$\Psi[\phi(x_1)] = \frac{1}{\sqrt{Z}} \int \prod_{-\infty < x_0 < 0} \prod_{x_1} [D\phi(x_0, x_1)] e^{-S[\phi]} \delta[\phi(0, x_1) - \phi(x_1)]. \tag{2.15}$$

ここでは、δ は δ 汎関数であり、任意の汎関数 $G[\tilde{\phi}(x_1)]$ に対して、

$$\int \prod_{x_1} [D\phi(x_1)] G[\phi(x_1)] \cdot \delta[\phi(x_1) - \tilde{\phi}(x_1)] = G[\tilde{\phi}(x_1)], \tag{2.16}$$

を満たす。経路積分の意味を考えると、ある状態 $|\varphi\rangle$ を用いて以下の様に書く事が出来る。

$$\lim_{x_0 \to -\infty} \langle \phi(x_1) | e^{-H(-x_0)} | \varphi \rangle. \tag{2.17}$$

$|\varphi\rangle$ は、ハミルトニアン H の固有状態 $|i\rangle$ で展開出来る。

$$|\varphi\rangle = \sum_i c_i |i\rangle. \tag{2.18}$$

(2.17) は $|0\rangle$ を基底状態として、

$$\lim_{x_0 \to -\infty} e^{E_0 x_0} \sum_i c_i e^{(E_i - E_0) x_0} \langle \phi(x_1) | i \rangle = \lim_{x_0 \to -\infty} c_0 e^{E_0 x_0} \langle \phi(x_1) | 0 \rangle, \tag{2.19}$$

となる。(2.15) における因子 $1/\sqrt{Z}$ を考慮すると、$\Psi[\phi(x_1)]$ は基底状態の波動関数 $\langle \phi(x_1) | 0 \rangle$ に位相因子を除いて一致する事が分かる。

また、(2.15) の複素共役は

$$\Psi^*[\phi(x_1)] = \frac{1}{\sqrt{Z}} \int \sum_{0 < x_0 < \infty} \sum_{x_1} [D\phi(x_0, x_1)] e^{-S[\phi]} \delta[\phi(0, x_1) - \phi(x_1)], \tag{2.20}$$

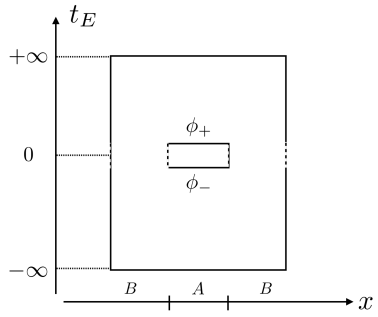


図 2.2: レプリカ法の積分領域

と書ける。

この波動関数を用いて全体の密度行列は以下の様に書く事が出来る。

$$[\rho_{tot}]_{\phi_-(x_1),\phi_+(x_1')} = \Psi[\phi_-(x_1)]\Psi^*[\phi_+(x_1')]. \tag{2.21}$$

ここで、場の理論のヒルベルト空間は $x_0 = 0$ における場の配位 $\phi(x_1)$ の関数全体で張られる空間である。そのため、密度行列 ρ_{tot} の足は、この空間で書く事が出来る。

計算を進めるために、領域 A をリーマン面上の線分とする。領域を図示すると、図 (2.2) となる。この A 領域に制限される密度行列 ρ_A は時刻 $x_0 = 0$ において、次の様に表される。

$$\begin{aligned}
[\rho_A]_{\phi_-,\phi_+} &= [\mathrm{Tr}_B \rho_{tot}]_{\phi_-,\phi_+} \\
&= \frac{1}{Z}\int \prod_{-\infty<x_0<\infty}\prod_{x_1}[D\phi(x_0,x_1)]e^{-S[\phi]} \\
&\quad \times \prod_{x_1\in A}\delta[\phi(-0,x_1)-\phi_-(x_1)]\cdot\delta[\phi(+0,x_1)-\phi_+(x_1)]
\end{aligned} \tag{2.22}$$

また、この式より $\mathrm{Tr}\rho_A = 1$ と規格化されている事が分かる。

次に ρ_A^n のトレースを取る事を考える。(2.22) の経路積分を n 個並べ、隣り合った物同士の上側と下側の境界を張り合わせる。これを、

$$\left(\prod_{j=1}^{n}[D\phi_j]\right)[\rho_A]_{\phi_1,\phi_2}[\rho_A]_{\phi_2,\phi_3}\cdots[\rho_A]_{\phi_n,\phi_1}, \tag{2.23}$$

と書く事が出来る。この式を図示すると、図 (2.3) となる。

以上より、$\mathrm{Tr}\rho_A^n$ は、n 枚のシートを領域 A で張り合わせ、2 次元リーマン面 Σ_n 上の分配関数と見る事が出来る。以上より書き換えると、

$$\mathrm{Tr}\rho_A^n = (Z)^{-n}\int \prod_{(x_0,x_1)\in\Sigma_n}[D\phi(x_0,x_1)]e^{-S[\phi]}, \tag{2.24}$$

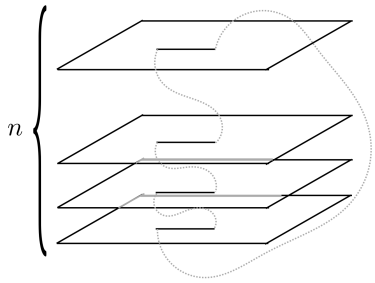


図 2.3: n 枚コピーしたリーマン面

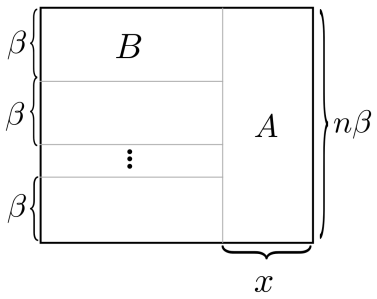


図 2.4: 分割法の違いはこのように図示される。領域 A におけるエンタングルメントエントロピーは領域 B を n 個コピーする事で記述される。

となる。今までは n 枚の各シートに場がある事を考えたが、これは 1 枚のシートに対して n 個の場を導入する事によっても表す事ができる。具体的には、後述する (4.63) 式の境界条件を与える事により、領域 A に対するエンタングルメントエントロピーを計算出来る。

2.4 場の理論におけるエンタングルメントエントロピーの計算

場の理論のエンタングルメントエントロピーの解析的な計算を、$d+1$ 次元、自由スカラー場理論について考える。まず、系を図 (2.5) の様に分ける。

時間一定面は $d-1$ 次元平面であり、$x_1 = 0$ を境に半分に分け、A と B を定義する。また、前節と同様に計算の為に全体の次元 R^{d+1} をユークリッド化し、時間を空間的に扱える様にする（$t \to -i\tau$）。$\tau, x_1 \sim x_d$ の各座標に対応する運動量（フーリエ変換時の波数）を $k_0, k_1, \cdots, k_d$ とする。この際、ユークリッド空間 R^{d+1} における自由スカラー場の分配関数を計算する。

自由場の作用は以下の様に書き下される。

$$S[\phi] = \int d\tau d^d x \left[\frac{1}{2}(\partial_\tau \phi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_i \phi)^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2 \right]$$

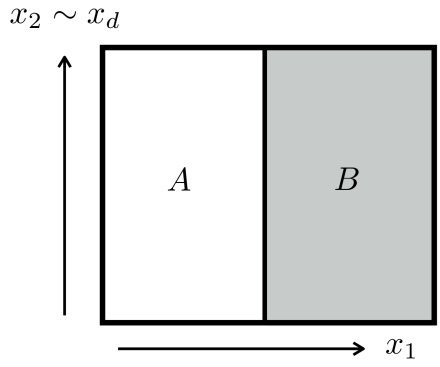


図 2.5: 部分系の分割方法

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int d^{d+1}x\phi(x)[-(\partial_\tau^2+\partial_i^2)+m^2]\phi(x) \\
&= \frac{1}{2}\int d^{d+1}\phi(x)[-\Delta+m^2]\phi(x)
\end{aligned}
\tag{2.25}
$$

ここで、ラプラシアン $\Delta = \partial_\tau^2 + \partial_i^2$ を導入した。分配関数は、

$$
\begin{aligned}
Z &= \int \mathcal{D}\phi e^{-S} \\
&= e^{-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\log[-\Delta+m^2]} \\
&= e^{-\frac{1}{2}\int d^{d+1}x\langle x|\log[p^2+m^2]|x\rangle}
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

となる。肩の積分に着目する。完備性 $\int \frac{d^{d+1}k}{(2\pi)^{d+1}}|k\rangle\langle k| = 1$ を用いて計算すると、

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\int d^{d+1}x\int\frac{d^{d+1}k}{(2\pi)^{d+1}}\int\frac{d^{d+1}k'}{(2\pi)^{d+1}}\langle x|k\rangle\langle k|\log[p^2+m^2]|k'\rangle\langle k'|x\rangle \\
&= -\frac{1}{2}\int d^{d+1}x\int\frac{d^{d+1}k}{(2\pi)^{d+1}}\int\frac{d^{d+1}k'}{(2\pi)^{d+1}}e^{ik'x}\log[k^2+m^2](2\pi)^{d+1}\delta^{d+1}(k'-k)e^{-ikx} \\
&= -\frac{1}{2}V_{d+1}\int\frac{d^{d+1}k}{(2\pi)^{d+1}}\log[k^2+m^2]
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

.

ここで、V_{d+1} は $d+1$ 次元の全空間の体積である。よって、分配関数の対数は以下の様に表される。

$$
\log Z_{R^{d+1}} = -\frac{1}{2}\frac{V_{d+1}}{(2\pi)^{d+1}}\int_{|k|\leq\lambda} d^{d+1}k\log(k^2+m^2). \tag{2.28}
$$

$\Lambda = 1/\epsilon$ は運動量の最大値（カットオフ）である。この式をシュインガーパラメータ s を用いて書き

換える。

$$\log Z_{R^{d+1}} = \frac{V_{d+1}}{(2\pi)^{d+1}} \int_{\epsilon^2}^{\infty} \frac{ds}{2s} \int_{|k|\leq\lambda} d^{d+1}k e^{-s(m^2+k^2)}$$
$$= V_{d+1} \int_{\epsilon^2}^{\infty} \frac{ds}{2s} (4\pi s)^{-\frac{d+1}{2}} e^{-sm^2}, \tag{2.29}$$

となる。エンタングルメントエントロピーの計算時の微分により定数項は落ちるため、定数項は無視している。

ここではレプリカ法を使ってエンタングルメントエントロピーを計算する為、$\mathrm{Tr}\rho_A^n$ を計算すれば良い。n が自然数の場合は $\mathrm{Tr}\rho_A^n$ を ∂A の周りに n 重巻きで出来る、$d+1$ 次元での分配関数と解釈出来る。$n = 1/N(N$ は自然数) と取る場合は $Tr\rho_A^n$ は R^{d+1} を N 等分したオービフォールド空間 $R^2/Z_N \times R^{d-1}$ の分配関数と考える事が出来る。R^2/Z_N は (x_0, x_1) で張られる空間 R^2 を、角度 $\theta = 2\pi/N$ の回転変換 g

$$g : (x_0, x_1) \to (\cos\theta x_0 - \sin\theta x_1, \sin\theta x_0 + \cos\theta x_1), \tag{2.30}$$

で同一視出来る空間である。$g^N = 1$ なので群としては Z_N となる。

この場合に、$\log \mathrm{Tr}\rho_A^n$ は以下の様に計算出来る。

$$\log \mathrm{Tr}\rho_A^n = \log Z_{R^2/Z_N \times R^{d-1}} - n \log Z_{R^{d+1}}. \tag{2.31}$$

2 項目は計算済みであるので、1 項目に着目して計算する。

まず、演算子 $\sum_{j=0}^{N-1} \frac{g^j}{N}$ を考えると、次の関係が成り立つ。

$$g \sum_{j=0}^{N-1} \frac{g^j}{N} = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{g^{j+1}}{N}$$
$$= \sum_{l=1}^{N} \frac{g^l}{N}$$
$$= \sum_{l=0}^{N-1} \frac{g^l}{N}. \tag{2.32}$$

また、この関係を用いると、

$$\sum_{i,j=0}^{N-1} \frac{g^i}{N} \frac{g^j}{N} = \sum_{i,j=0}^{N-1} \frac{g^{i+j}}{N^2}$$
$$= \sum_{i=0}^{N-1} \frac{N g^i}{N^2}$$

$$= \sum_{l=0}^{N-1} \frac{g^l}{N}, \tag{2.33}$$

となる。これより、この演算子は射影演算子であることがわかる。これより、$\log Z_{R^2/Z_N\times R^{d-1}}$ の計算は

$$\begin{aligned}\log Z_{R^2/Z_N\times R^{d-1}} &= -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[\log(-\Delta+m^2)\sum_{j=0}^{N-1}\frac{g^j}{N}\right] \\ &= -\frac{1}{2}\int d^{d+1}x\langle x|\log(p^2+m^2)\sum_{j=0}^{N-1}\frac{g^j}{N}|x\rangle,\end{aligned} \tag{2.34}$$

となる。さらに、完備性を用いて計算を行うと、以下の結果が得られる。

$$\begin{aligned}\log Z_{R^2/Z_N\times R^{d-1}} &= -\frac{1}{2}\int d^{d+1}x\int\frac{d^{d+1}k}{(2\pi)^{d+1}}\int\frac{d^{d+1}k'}{(2\pi)^{d+1}}\int\frac{d^{d+1}k''}{(2\pi)^{d+1}} \\ &\quad\times\langle x|k'\rangle\langle k'|\log(p^2+m^2)|k\rangle\langle k|\sum_{j=0}^{N-1}\frac{g^j}{N}|k''\rangle\langle k''|x\rangle \\ &= -\frac{1}{2}\int d^{d+1}x\int\frac{d^{d+1}k}{(2\pi)^{d+1}}\int\frac{d^{d+1}k'}{(2\pi)^{d+1}}\int\frac{d^{d+1}k''}{(2\pi)^{d+1}} \\ &\quad\times e^{-k'x}\log(k^2+m^2)(2\pi)^{d+1}\delta^{d+1}(k'-k) \\ &\quad\times\frac{1}{N}(2\pi)^{d+1}\delta^{d+1}(k-g^ik'')e^{ik''x} \\ &= -\frac{1}{2}\int\frac{d^{d+1}k}{(2\pi)^{d+1}}\int d^{d+1}k''(2\pi)^{d+1}(2\pi)^{d+1}\delta^{d+1}(k''-k)\log(k^2+m^2) \\ &\quad\times\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}(2\pi)^{d+1}(2\pi)^{d+1}\delta^{d+1}(k-g^jk) \\ &= -\frac{1}{2}\int\frac{d^{d+1}k}{(2\pi)^{d+1}}\log(k^2+m^2)\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}(2\pi)^{d+1}\delta^{d+1}(k-g^jk) \\ &= -\frac{1}{2}\int\frac{d^{d+1}k}{(2\pi)^{d+1}}\log(k^2+m^2)\frac{1}{N}\left[(2\pi)^{d+1}\delta^{d+1}(0)+\sum_{j=1}^{N-1}(2\pi)^{d+1}\delta^{d+1}(k-g^jk)\right] \\ &= \frac{1}{N}\log Z_{R^{d+1}} \\ &\quad-\frac{1}{2N}\int\frac{d^{d+1}k}{(2\pi)^{d+1}}\log(k^2+m^2)\left[\sum_{j=1}^{N-1}(2\pi)^{d-1}\delta^{d-1}(0)\cdot(2\pi)^2\delta^2(k-g^jk)\right] \\ &= \frac{1}{N}\log Z_{R^{d+1}} \\ &\quad-\frac{1}{2N}V_{d-1}\int\frac{d^{d+1}k}{(2\pi)^{d+1}}\log(k^2+m^2)\sum_{j=1}^{N-1}(2\pi)^2\delta^2(k-g^jk).\end{aligned} \tag{2.35}$$

ここで、デルタ関数の性質を使って計算を行うと、

$$\begin{aligned}\delta^2(k-g^jk) &= \delta^2((I-g^j)k)\\ &= \frac{1}{|\det(I-g^j)|}\delta^2(k)\end{aligned} \tag{2.36}$$

となる。$\theta = 2\pi/N$ を使って計算する。

$$\begin{aligned}|\det(I-g^j)| &= |\det\begin{pmatrix}1-\cos j\theta & \sin j\theta & 0\\ -\sin j\theta & 1-\cos j\theta & 0\\ 0 & 0 & I_{d-1}\end{pmatrix}|\\ &= |(1-\cos j\theta)^2+\sin^2 j\theta|\\ &= 2(1-\cos j\theta)\\ &= 4\sin^2\frac{j\pi}{N}.\end{aligned} \tag{2.37}$$

以上より、まとめると、

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N-1}\delta^2(k-g^jk) &= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N-1}\frac{\delta^2(k)}{4\sin^2\frac{\pi j}{N}}\\ &= \frac{N^2-1}{12N}\delta^2(k),\end{aligned} \tag{2.38}$$

となる。ここで、

$$\sum_{j=1}^{N-1}\frac{1}{\sin^2\frac{\pi j}{N}} = \frac{N^2-1}{3}, \tag{2.39}$$

を用いて計算している。

次に運動量 k について 2 次元 R^2/Z_N 方向（$k_\parallel$）と d-1 次元方向 R^{d-1} 方向（$k_\perp$）に分けて考える。この時、$k^2 = k_\parallel^2 + k_\perp$ となるので、

$$\begin{aligned}\log Z_{R^2/Z_N\times R^{d-1}} &= \frac{1}{N}\log Z_{R^d+1}\\ &\quad -\frac{1}{2}V_{d-1}\int\frac{d^2k_\parallel}{(2\pi)^2}\int\frac{d^{d-1}k_\perp}{(2\pi)^{d-1}}\log(k_\parallel^2+k_\perp^2+m^2)\frac{1}{12}\left(N-\frac{1}{N}\right)(2\pi)^2\delta^2(k_\parallel)\\ &= \frac{1}{N}\log Z_{R^d+1}\\ &\quad -\frac{1}{2}V_{d-1}\int\frac{d^{d-1}k_\perp}{(2\pi)^{d-1}}\log(k_\perp^2+m^2)\frac{1}{12}\left(N-\frac{1}{N}\right).\end{aligned} \tag{2.40}$$

ここで、Schwinger パラメータ s を使って書き直す。

$$(2.40) = \frac{1}{N}\log Z_{R^d+1}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{12}\left(N-\frac{1}{N}\right)V_{d-1}\int\frac{d^{d-1}k_\perp}{(2\pi)^{d-1}}\int_{\epsilon^2}^{\infty}\frac{ds}{2s}e^{-s(k_\perp^2+m^2)}\\
&=\frac{1}{N}\log Z_{R^d+1}\\
&\quad+\frac{1}{6}\left(N-\frac{1}{N}\right)\int_{\epsilon^2}^{\infty}\frac{ds}{s}e^{-sm^2}\cdot\frac{1}{(2\pi)^{d-1}}\sqrt{\frac{(2\pi)^{d-1}}{(2s)^{d-1}}}\\
&=\frac{1}{N}\log Z_{R^d+1}\\
&\quad+\frac{1}{6}\left(N-\frac{1}{N}\right)\int_{\epsilon^2}^{\infty}ds\frac{\pi}{(4\pi s)^{\frac{d+1}{2}}}e^{-sm^2}.
\end{aligned}
\tag{2.41}
$$

以上より、

$$
\log \mathrm{Tr}\rho_A^n=\frac{\pi}{6}\left(\frac{1}{n}-n\right)V_{d-1}\int_{\epsilon^2}^{\infty}\frac{ds}{(4\pi s)^{\frac{d+1}{2}}}e^{-sm^2},
\tag{2.42}
$$

が得られるので、レプリカ法の公式に代入する。

$$
\begin{aligned}
S_A&=-\frac{\partial}{\partial(1/N)}\left(\log Z_{R^2/Z_N\times R^{d-1}}-\frac{1}{N}\log Z_{R^{d+1}}\right)\\
&=\frac{\pi}{3}V_{d-1}\int_{\epsilon^2}^{\infty}\frac{ds}{(4\pi s)^{\frac{d+1}{2}}}e^{-m^2s}.
\end{aligned}
\tag{2.43}
$$

ここで紫外極限について考える $(\epsilon\to 0)$。(2.43) は $d>1$ の場合で

$$
S_A=\frac{V_{d-1}}{6(d-1)(4\pi)^{\frac{d-1}{2}}}\cdot\frac{1}{\epsilon^{d-1}}+\mathcal{O}(\epsilon^{-(d-3)}),
\tag{2.44}
$$

となる。$\epsilon\to 0$ で第一項目は明らかに発散する。また、$d=1$ の場合では

$$
S_A=-\frac{1}{6}\log(m\epsilon),
\tag{2.45}
$$

となる為、この場合も $\epsilon\to 0$ で発散する。以上より、自由場の理論でのエンタングルメントエントロピーは $\mathcal{O}(\epsilon^{-(d-1)})$ の紫外発散を持つ事が確かめられた。また、主要項が境界の面積 V_{d-1} に比例する事が確かめられた。

3　非可換空間上の場の理論

我々は非可換空間上の場の理論のエンタングルメントエントロピーの計算を行った。そのため、非可換空間の例として非可換平面についてレビューを行う [36]。また、非可換空間上の場の理論で特徴的な効果である UV/IR mixing について非可換平面上で議論する [13]。

3.1　非可換平面の幾何

非可換平面は、最も簡単な非可換空間である。簡単の為、まず 2 次元で考える。二つの座標を $\hat{x}_1, \hat{x}_2$ とする。(演算子である事を明確にする為、$\hat{}$ を付けている。) この時、座標は交換しない。

$$[\hat{x}_1, \hat{x}_2] = i\theta. \tag{3.1}$$

θ は実の定数であり、可換極限は $\theta \to 0$ に対応している。各座標に対し、共役運動量を以下の様に定義する。

$$\hat{p}_1 = \theta^{-1}\hat{x}_2, \;\; \hat{p}_2 = -\theta^{-1}\hat{x}_1. \tag{3.2}$$

(3.1) と (3.2) より、次の式が導かれる。

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij} \;\; (i, j = 1, 2). \tag{3.3}$$

この式は 2 次元での 1 粒子の量子力学の交換関係の形をしている。しかし、運動量 $\hat{p}_1, \hat{p}_2$ は $\hat{x}_2, \hat{x}_1$ と関係づいており、独立でない。つまり、ヒルベルト空間としては 1 次元の量子力学で考えている事に相当する。また、運動量同士の交換関係は以下の様になる。

$$[\hat{p}_1, \hat{p}_2] = i\theta^{-1}. \tag{3.4}$$

今、このヒルベルト空間に作用する演算子 $\hat{f}$ を座標 $\hat{x}_i$ でフーリエ展開する事を考える。

$$\hat{f} = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} f(k) e^{ik\cdot\hat{x}}. \tag{3.5}$$

$f(k) = f(k_1, k_2), k \cdot \hat{x} = k_i x_i$ を表す。非可換である為、フーリエ変換の指数関数は $e^{ik_1x_1} \cdot e^{ik_2x_2}$ と分解する事が出来ない事に注意する。$f(k)$ を使って $\hat{f}$ に対応する 2 次元平面上の関数 $f(x)$ は以下の様に定義出来る。

$$f(x) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} f(k) e^{ik\cdot x}. \tag{3.6}$$

ここで、逆フーリエ変換 $f(k) = \int d^2x f(x) e^{-ik\cdot x}$ を用いて $\hat{f}$ と $f(x)$ の関係を書き直す。

$$\hat{f} = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \int d^2x f(x) e^{-ik\cdot x} e^{ik\cdot\hat{x}}. \tag{3.7}$$

まず、非可換平面上における微分について述べる。(3.3) と (3.7) より、$\hat{p}_i$ と $\hat{f}$ の交換関係を計算する。

$$\begin{aligned}
[\hat{p}_i, \hat{f}] &= [\hat{p}_i, \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \int d^2x f(x) e^{-ik\cdot x} e^{ik\cdot\hat{x}}] \\
&= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \int d^2x e^{-ik\cdot x} [\hat{p}_i, e^{ik\cdot\hat{x}}] f(x) \\
&= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \int d^2x e^{-ik\cdot x} k_i e^{ik\cdot\hat{x}} f(x) \\
&= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \int d^2x e^{-ik\cdot x} (-i\partial_x) f(x) e^{ik\cdot\hat{x}}.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

ここで $\partial_x = \partial/\partial x$ であり、$k = -i\partial_x$ の書き換えと、次の式を用いる。

$$\begin{aligned}
[\hat{p}_i, e^{ik\cdot\hat{x}}] &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [\hat{p}_i, (ik\cdot\hat{x})^n] \\
&= k_i e^{ik\cdot\hat{x}}.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

(3.8) より、関数からオペレータで書き換えた場合における、R^2 上の計算において、以下の対応が分かる。

$$[\hat{p}_i, \ ] \leftrightarrow -i\partial_{x_i}. \tag{3.10}$$

つまり、交換子を取る事が微分に対応する事が示された。

次に、演算子の積の表し方を示す。(3.7) より、

$$\begin{aligned}
\hat{f}\hat{g} &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2l}{(2\pi)^2} \int d^2x \int d^2y f(x) g(y) e^{-ik\cdot x} e^{-il\cdot y} e^{ik\cdot\hat{x}} e^{il\cdot\hat{x}} \\
&= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2l}{(2\pi)^2} \int d^2x \int d^2y f(x) g(y) e^{-ik\cdot x} e^{-il\cdot y} e^{-\frac{i\theta}{2}(k_1 l_2 - k_2 l_1)} e^{i(k+l)\cdot\hat{x}} \\
&= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2l}{(2\pi)^2} \int d^2x \int d^2y e^{-\frac{i\theta}{2}(\partial_{x_1}\partial_{y_2} - \partial_{x_2}\partial_{y_1})} f(x) g(y) e^{i(k+l)\cdot\hat{x}} e^{-ik\cdot x - il\cdot y}.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

この計算では、$[[A,B],A] = [[A,B],B] =$ の時に成り立つ、ベーカー・ハウスドルフの公式の特別な場合

$$e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A,B]}, \tag{3.12}$$

を用いた。ここで、積分の変数変換を行う。$p = k + l$,$q = \frac{k-l}{2}$ と置き、$k = \frac{1}{2}(p+2q)$,$l = \frac{1}{2}(p-2q)$ と書き換える。この時、ヤコビアンは 1 である。演算子を含まない指数関数部分については、$k\cdot x + l\cdot y = \frac{p}{2}(x+y) + q(x-y)$ となる為、q 積分はデルタ関数となる。その為、

$$(3.11) = \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \int d^2x \int d^2y e^{-\frac{i\theta}{2}(\partial_{x_1}\partial_{y_2} - \partial_{x_2}\partial_{y_1})} f(x) g(y) e^{i(p)\cdot\hat{x}} e^{-i(\frac{p}{2}(x+y) + q(x-y))}$$

$$= \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \int d^2x \int d^2y e^{-\frac{i\theta}{2}(\partial_{x_1}\partial_{y_2} - \partial_{x_2}\partial_{y_1})} f(x)g(y) e^{i(p)\cdot\hat{x}} e^{-i(\frac{p}{2}(x+y))} \delta(x-y)$$
$$= \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \int d^2x (e^{-\frac{i\theta}{2}(\partial_{x_1}\partial_{y_2} - \partial_{x_2}\partial_{y_1})} f(x)g(y))_{y=x} e^{ik\cdot\hat{x}} e^{-k\cdot x}, \tag{3.13}$$

が得られる。最後に $k+l$ を改めて k と置いている。以上より、演算子の積を整理すると、

$$\begin{aligned} \hat{f}\hat{g} \leftrightarrow f(x) \star g(x) &= e^{-\frac{i\theta}{2}(\partial_{x_1}\partial_{y_2} - \partial_{x_2}\partial_{y_1})} f(x)g(y)|_{y=x} \\ &= f(x)g(x) - \frac{i\theta}{2}(\partial_{x_1}\partial_{y_2} - \partial_{x_2}\partial_{y_1}) f(x)g(y) + \cdots, \end{aligned} \tag{3.14}$$

となる。このように書き表される積は、Moyal 積 (スター積) と呼ばれる。式の形より、明らかに $f(x)\star g(x) \neq g(x)\star f(x)$ である。一方で演算子の積は結合則を満たす ($(\hat{f}\hat{g})\hat{h} = \hat{f}(\hat{g}\hat{h})$) ため、Moyal 積も結合則を満たす ($(f(x)\star g(x))\star h(x) = f(x)\star(g(x)\star h(x))$)。また、Moyal 積を用いた場合の交換関係は以下の様になる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{i\theta}[f(x), g(x)]_\star &= \frac{1}{i\theta}\left(\frac{i\theta}{2}(\partial_{x_1}\partial_{x_2} - \partial_{x_2}\partial_{x_1} + \partial_{x_1}\partial_{x_2} - \partial_{x_2}\partial_{x_1}) + \mathcal{O}(\theta^2)\right) f(x)g(x) \\ &= \partial_{x_1} f(x) \partial_{x_2} g(x) - \partial_{x_2} f(x) \partial_{x_1} g(x) + \mathcal{O}(\theta). \end{aligned} \tag{3.15}$$

最後に演算子のトレースの意味について考える。ヒルベルト空間において、基底を以下の様に考える。

$$\hat{x}_1|x\rangle = x_1|x\rangle. \tag{3.16}$$
$$\hat{x}_2|x\rangle = x_2|x\rangle. \tag{3.17}$$

量子力学とのアナロジーより、正規直交条件については以下の様に書ける。

$$\int \frac{dx_1}{\sqrt{2\pi\theta}} |x_1\rangle\langle x_1| = 1 \tag{3.18}$$
$$\int \frac{dx_2}{\sqrt{2\pi\theta}} |x_2\rangle\langle x_1| = 1 \tag{3.19}$$
$$\langle x_1|x_2\rangle = e^{i\theta^{-1}x_1x_2} \leftrightarrow \langle x|p\rangle = e^{ipx}. \tag{3.20}$$

これらの性質を用いる事により、トレースは書き直す事が出来る。

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(\hat{f}) &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \int d^2x f(x) e^{-k\cdot x} \int \frac{dx_1'}{\sqrt{2\pi\theta}} \langle x_1'|e^{ik\cdot\hat{x}}|x_1'\rangle \\ &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \int d^2x f(x) e^{-k\cdot x} \int \frac{dx_1'}{\sqrt{2\pi\theta}} \langle x_1'|e^{ik_1\hat{x}_1} e^{ik_2\hat{x}_2} e^{-\frac{1}{2}i[k_1\hat{x}_1, k_2\hat{x}_2]}|x_1'\rangle \\ &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \int d^2x f(x) e^{-k\cdot x} \int \frac{dx_1'}{\sqrt{2\pi\theta}} \langle x_1'|e^{ik_1\hat{x}_1} e^{ik_2\hat{x}_2} e^{-\frac{1}{2}i[k_1\hat{x}_1, k_2\hat{x}_2]}|x_1'\rangle \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \int d^2x \int \frac{dx_1'}{\sqrt{2\pi\theta}} \int \frac{dx_2'}{\sqrt{2\pi\theta}} f(x) e^{-k\cdot x} e^{-\frac{i\theta}{2}k_1k_2} \langle x_1'|e^{ik_1\hat{x}_1} e^{ik_2\hat{x}_2}|x_2'\rangle\langle x_2'|x_1'\rangle \\
&= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \int d^2x \int \frac{d^2x'}{2\pi\theta} f(x) e^{-k\cdot x} e^{-\frac{i\theta}{2}k_1k_2} e^{ik_1x_1} e^{ik_2x_2} \langle x_1'|x_2'\rangle\langle x_2'|x_1'\rangle \\
&= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \int d^2x \int \frac{d^2x'}{2\pi\theta} f(x) e^{-k\cdot x} e^{-\frac{i\theta}{2}k_1k_2} e^{ik_1x_1} e^{ik_2x_2} \\
&= \int \frac{d^2x}{2\pi\theta} f(x). \qquad (3.21)
\end{aligned}
$$

以上より、トレースが R^2 上の積分に対応する事が分かる。

$$
\mathrm{tr} \leftrightarrow \int \frac{d^2x}{2\pi\theta}. \qquad (3.22)
$$

右辺は位相空間の体積を $2\pi\hbar$ で割った物に相当する。

Moyal 積で表される物の積分を行う事を考える。トレースは巡回性 ($\mathrm{tr}[ABC] = \mathrm{tr}[BCA] = \mathrm{tr}[CAB]$) を持つため、以下の性質が成り立つ。

$$
\int d^2x f_1(x) \star f_2(x) \star \cdots \star f_n(x) = \int d^2x f_n(x) \star f_1(x) \star \cdots \star f_{n-1}(x). \qquad (3.23)
$$

特に、二つの場の Moyal 積の場合について積分を考えると、

$$
f(x) \star g(x) = f(x)g(x) - \frac{i\theta}{2}(\partial_{x_1} f(x) \partial_{x_2} g(x) - \partial_{x_2} f(x) \partial_{x_1} g(x)) + \cdots, \qquad (3.24)
$$

である為、第二項目以降は部分積分を使う事によって打ち消す事が出来る。以上より、

$$
\int d^2x f(x) \star g(x) = \int d^2x f(x) g(x), \qquad (3.25)
$$

が成り立つ。

以上の性質を用い、外場 $\hat{p}_i$ が入った行列模型を考える。

$$
S = \sqrt{(2\pi)^2 \det(\theta_{ij})} \mathrm{tr} \left(-\frac{1}{2}[\hat{p}_i, \hat{\phi}]^2 + \frac{m^2}{2}\hat{\phi}^2 + \frac{\lambda}{4}\hat{\phi}^4 \right). \qquad (3.26)
$$

対応関係を用いて関数の形で書き換えると、

$$
\begin{aligned}
S &= \int d^2x \left(\frac{1}{2}(\partial_{x_i}\phi(x)) \star (\partial_{x_i}\phi(x)) + \frac{m^2}{2}\phi(x) \star \phi(x) + \frac{\lambda}{4}\phi(x) \star \phi(x) \star \phi(x) \star \phi(x) \right) \\
&= \int d^2x \left(\frac{1}{2}(\partial_{x_i}\phi(x))^2 + \frac{m^2}{2}\phi(x)^2 + \frac{\lambda}{4}\phi(x) \star \phi(x) \star \phi(x) \star \phi(x) \right). \qquad (3.27)
\end{aligned}
$$

場の 2 次の項は、可換な場の理論の場合の ϕ^4 理論と一致しているが、相互作用項は Moyal 積より、微分を含む項が余分に出てくる為一致しない。

3.2 UV/IR mixing

非可換空間上の場の理論の性質として重要な、UV/IR mixing について述べる。紫外発散と赤外発散が混ざる現象の事で、今は非可換空間上でプロパゲータに対する 1-loop 補正を計算する中で確認する。

二次元非可換空間上の ϕ^4 理論で考える。

$$S = \int d^2x \left(\frac{1}{2} \left(\partial_{x_i} \phi(x) \right)^2 + \frac{m^2}{2} \phi^2(x) + \frac{\lambda}{4} \phi(x) \star \phi(x) \star \phi(x) \star \phi(x) \right). \tag{3.28}$$

(3.28) の前二項は自由な理論であり、ϕ^4 項は相互作用項である（$S = S_{free} + S_{int}$）。S_{free} では ϕ の二乗のみ存在する。前節より、Moyal 積は部分積分を用いる事で、二乗についてはただの積に置き換える事が出来るので、(3.28) の様に書ける。この作用をフーリエモードで書き換えると、以下の様になる。

$$S_{free} = \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} (2\pi)^2 \delta^{(2)}(p+q) \frac{1}{2} (p^2 + q^2) \phi(p) \phi(q). \tag{3.29}$$

$$\begin{aligned} S_{int} = \frac{\lambda}{4} \quad & \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2r}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2s}{(2\pi)^2} (2\pi)^2 \delta^{(2)}(p+q+r+s) \\ & \times e^{\frac{i\theta}{2}(p_1 q_2 - p_2 q_1 + (p_1+q_1)(r_2+s_2) - (p_2+q_2)(r_1+s_1) + r_q s_2 - r_2 s_1)} \\ & \times \phi(p)\phi(q)\phi(r)\phi(s). \end{aligned} \tag{3.30}$$

ここで S_{int} の Moyal 積の計算は (3.14) 式を用いた。

$$\phi(x) \star \phi(y) = e^{\frac{i\theta}{2}(\partial_{x_1}\partial_{y_2} - \partial_{x_2}\partial_{y_1})} \phi(x)\phi(y) \tag{3.31}$$

$$\phi(z) \star \phi(l) = e^{\frac{i\theta}{2}(\partial_{z_1}\partial_{l_2} - \partial_{z_2}\partial_{l_1})} \phi(z)\phi(l) \tag{3.32}$$

$$(\phi(x) \star \phi(y)) \star (\phi(z) \star \phi(l)) = e^{\frac{i\theta}{2}\{(\partial_{x_1}+\partial_{y_1})(\partial_{z_2}+\partial_{l_2}) - (\partial_{x_2}+\partial_{y_2})(\partial_{z_1}+\partial_{l_1})\}} \tag{3.33}$$

$$\times e^{\frac{i\theta}{2}(\partial_{x_1}\partial_{y_2} - \partial_{x_2}\partial_{y_1})} \phi(x)\phi(y) \tag{3.34}$$

$$\times e^{\frac{i\theta}{2}(\partial_{z_1}\partial_{l_2} - \partial_{z_2}\partial_{l_1})} \phi(z)\phi(l). \tag{3.35}$$

以上の様に計算し、フーリエモードに移せば良い。

プロパゲータの 1-loop 補正を計算する。Moyal 積が非可換なので、行列と同様に二重線を用いてダイアグラムを書くのが妥当である。このとき、図 (3.1) の二種類の 1-loop ダイアグラムが出てくる。

図 (3.1) のように、プラナーダイアグラム (a) は

$$2\lambda \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \frac{1}{q^2 + m^2} \tag{3.36}$$

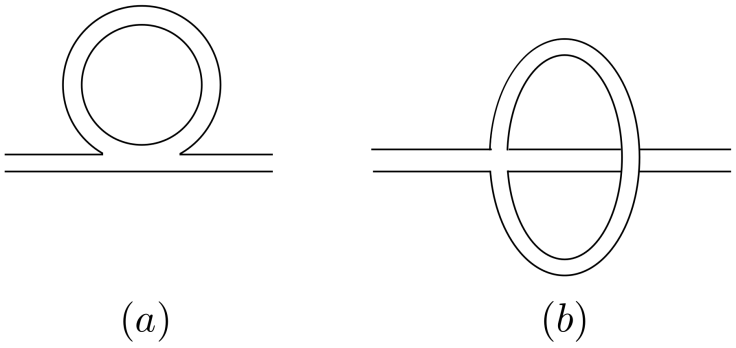


図 3.1: (a):プラナーダイアグラム (b):非プラナーダイアグラム

であり、非プラナーダイアグラム (b) は

$$\lambda \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \frac{e^{-i\theta(p_1q_2-p_2q_1)}}{q^2+m^2}, \tag{3.37}$$

である。今、p_i は外線の運動量である。この二つの式の間の大きな違いは $e^{-i\theta(p_1q_2-p_2q_1)}$ の位相因子の有る無しである。(3.36) は位相因子を持っておらず、図 (3.1)(a) は通常の場の理論における ϕ^4 理論の寄与と一致する。一方で、(3.37) は位相因子を持っている、また、通常の場の理論における ϕ^4 理論では図 (3.1)(a) と (b) は同じダイアグラムとなる。図 (3.1)(b) は行列模型特有の効果を示す。そのため、以下では (3.37) について計算する。

計算には Schwinger 表示

$$\frac{1}{q^2+m^2} = \int_0^\infty ds e^{-(q^2+m^2)s}, \tag{3.38}$$

を用いて非可換空間上の特性を見る。(3.37) は以下の様に計算される。

$$\begin{aligned}
(3.37) &= \lambda \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} e^{i\theta(p_1q_2-p_2q_1)} \cdot \int_0^\infty ds e^{-(q^2+m^2)s} \\
&= \lambda \int_0^\infty ds e^{-m^2s} \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} e^{-q^2s+iqp^\dagger} \\
&= \lambda \int_0^\infty ds e^{-m^2s} \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} e^{-s(q-i\frac{\theta p^\dagger}{2s})^2} e^{-\frac{\theta^2p^2}{4s}} \\
&= \lambda \int_0^\infty ds e^{-m^2s} \int_0^\infty \frac{dq}{(2\pi)^2} q(2\pi) e^{-s(q-i\frac{\theta p^\dagger}{2s})^2} e^{-\frac{\theta^2p^2}{4s}} \\
&= \lambda \int_0^\infty ds e^{-m^2s-\frac{\theta^2p^2}{4s}} \times \frac{1}{2\pi}\left[0+\frac{1}{2s}\right] \\
&= \frac{\lambda}{2\pi} \int_0^\infty ds \frac{1}{2s} e^{-m^2s-\frac{\theta^2p^2}{4s}}.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

途中で運動量 q についての積分は極座標で書き換えた。

$$\int d^2q = \int_0^\infty dq \int_0^{2\pi} d\varphi q = \int_0^\infty dqq(2\pi). \tag{3.40}$$

まずこの計算結果に対して、可換な理論 ($\theta = 0$) との対応を見る。

$$(3.39) \to_{\theta\to 0} \frac{\lambda}{2\pi} \int_0^\infty ds \frac{1}{2s} e^{-m^2 s}, \tag{3.41}$$

ここで、s についての積分は、積分の下端を x とすると、

$$\int_x^\infty \frac{ds}{s} e^{-s} = \frac{1}{a} \left[\gamma + \log x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k\, k!} \right]. \tag{3.42}$$

となる。ここで γ はオイラーの数である。今、$x \to 0$ なので、(3.42) は対数発散を取る。この事は可換な理論における紫外発散と一致する。

次に、UV のカットオフ (Λ) を導入し、この紫外発散を正則化する事を考える。

$$\begin{aligned}
(3.37) &= \frac{\lambda}{2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{2s} \exp[-m^2 s - \frac{\theta^2 p^2}{4s} - \frac{1}{4\Lambda s}] \\
&= \frac{\lambda}{2\pi} \int_0^\infty \frac{ds'}{m^2} \frac{m^2}{2s'} \exp[-s' - \frac{m^2\theta^2 p^2}{4s'} - \frac{m^2}{4\Lambda s'}] \\
&= \frac{\lambda}{2\pi} \int_0^\infty ds' \frac{1}{2s'} \exp[-s' - \frac{1}{4s'}\{m^2(\theta^2 p^2 + \frac{1}{\Lambda^2})\}].
\end{aligned} \tag{3.43}$$

第二種ベッセル関数

$$K_0(x) = \frac{1}{2} \int_0^\infty dt \frac{1}{t} e^{-t - \frac{x^2}{4t}}, \tag{3.44}$$

を用いると、(3.43) は次の様に書き換えられる。

$$(3.43) = \frac{\lambda}{2\pi} K_0 \left(m \sqrt{\theta^2 p^2 + \frac{1}{\Lambda^2}} \right). \tag{3.45}$$

ベッセル関数の展開

$$K_0(x) = \sum_{a=0}^{\infty} \frac{1}{a!^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2a} \left(-\gamma + \sum_{b=1}^{a} \frac{1}{b} - \log \frac{x}{2} \right), \tag{3.46}$$

を用いると、UV のカットオフを導入した非プラナーダイアグラムの 1-loop の寄与は

$$(3.45) = -\frac{\lambda}{2\pi} \left(\gamma + \log \left(\frac{m}{2} \sqrt{\theta^2 p^2 + \frac{1}{\Lambda^2}} \right) \right) \left(1 + \mathcal{O}\left(m \sqrt{\theta^2 p^2 + \frac{1}{\Lambda^2}} \right) \right), \tag{3.47}$$

となる。

$\theta = 0$ の時は (3.47) は対数発散を持ち、可換な理論の場合と一致する。

$\theta \neq 0$ の位相がある場合については、紫外極限 $\Lambda \to \infty$ においても $\sqrt{\theta^2 p^2 + 0}$ より $\log 0$ とならず発散しない。つまり、$p \neq 0$ ならば紫外発散が存在しない。これは、$\theta \neq 0$ より、位相因子 θ が存在し、紫外発散を抑制しているために起こる現象である。ところが、$\Lambda \to \infty$ かつ $p \to 0$ の時に、発散する。つまり、可換な理論の紫外発散に由来する、赤外発散が出てきてしまった。この現象を UV/IR mixing と呼ぶ。

今回、我々の研究では非可換空間として非可換球面を扱っている。この時、体積が有限となるため、赤外領域のカットオフが自動的に導入される。我々の計算については UV/IR mixing による発散はないが、可換な理論との有限の差が出る事が考えられ、この違いを UV/IR アノマリーと呼ぶ [37,38]。

4　スカラー場の理論と非可換球面

この章では、我々が行列模型を用いて計算したモデルである、非可換球面上のスカラー ϕ^4 理論について述べる。まず、4.1 節ではブロッホコヒーレント状態についてレビューを行い、状態の広がりについて述べる [39]。次に、4.2 節では $S_1\times\ S_2$ の多様体上で定義される可換な空間上のモデルを、行列模型を用いて、どのように非可換球面上へ拡張するかを述べる。特に、非可換平面で取り扱った Moyal 積と同様に、非可換球面上ではスター積が存在する事を示した。そして、4.3 節では領域の分け方と行列模型の対応について、コヒーレント状態を用いて説明する。4.4 節では研究において実際に計算した物理量について説明する。最後に 4.5 節では非可換空間上で相互作用を持つ理論 ($\lambda = 1.0$) の場合の、補間作用 (interpolating action) を用いる計算法を述べる。

4.1　コヒーレント状態

この節では、ブロッホコヒーレント状態の時がどのような性質を持っているか、レビューを行う [39]。

まず最初に、ブロッホコヒーレント状態について述べる。ここで $SU(2)$ の代数のスピン j 表現を考える。一般的な基底 $|jm\rangle$ $(m = -j, -j+1, \cdots, j)$ は、以下の関係式を満たす。

$$L_\pm|jm\rangle = \sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}|jm\pm 1\rangle, \tag{4.1}$$

$$L_3|jm\rangle = m|jm\rangle\ , \tag{4.2}$$

ここで、$L_\pm = L_1 \pm iL_2$ である。図 (4.1) のように、z 方向の単位ベクトルに対応する状態を $|jj\rangle$ とする。この状態は単位球の北極点に対応する。すると、単位球面上の他の点に対応する状態は、回転演算子 $(R = e^{-i\vec{\theta}\cdot\vec{L}})$ を $|jj\rangle$ に作用させる事によって得られる。以下では、図 (4.1) の破線矢印で示した、単位球面上の点 $\Omega = (\theta, \varphi)$ に対応する状態を、$|\Omega\rangle$ と記す。$|\Omega\rangle$ は以下の様に与えられる。

$$|\Omega\rangle = e^{i\theta(\sin\varphi L_1 - \cos\varphi L_2)}|jj\rangle\ . \tag{4.3}$$

この事より、以下の式が得られる。

$$n_iL_i|\Omega\rangle = j|\Omega\rangle\ . \tag{4.4}$$

ここで、$\vec{n} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$ である。状態に対して回転を行った分、演算子 L_i に対しても回転を行っている事に相当する。

ここで、角運動量演算子の固有値の分散 $\sum_i(\Delta L_i)^2$ を考える。

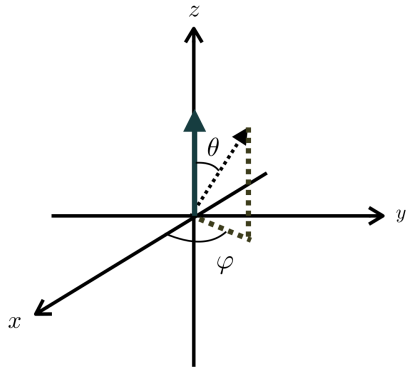


図 4.1: $|jj\rangle$ は z 軸方向の大きさ 1 の実線の矢印に対応する。$|\Omega\rangle$ は大きさ 1 の破線の矢印に対応する。

$$\begin{aligned}\sum_i (\Delta L_i)^2 &= \sum_i \langle (L_i - \langle L_i \rangle)^2 \rangle \\ &= \sum_i \left(\langle L_i^2 \rangle - \langle L_i \rangle^2 \right) \\ &= \sum_i \left(\langle \Omega | L_i^2 | \Omega \rangle - \left(\langle \Omega | L_i | \Omega \rangle \right)^2 \right) \\ &= j(j+1) - \sum_i \left(\langle \Omega | L_i | \Omega \rangle \right)^2 \end{aligned} \tag{4.5}$$

$\sum_i (\Delta L_i)^2$ が最小値を取る時、この状態 $|\Omega\rangle$ はブロッホコヒーレント状態（the Bloch coherent states）と呼ばれる。つまり、L_i の揺らぎが最も小さい状態である。

次に、コヒーレント状態の性質を述べる。(4.3) をベーカー・ハウスドルフの公式と $z = \tan\frac{\theta}{2} e^{i\varphi}$ を使い書き換えると、

$$|\Omega\rangle = e^{zL_-} e^{-L_3 \log(1+|z|^2)} e^{-\bar{z}L_+} |jj\rangle \ , \tag{4.6}$$

となる。指数関数部分について、$e^{-zL_+} = 1 - zL_+ + \cdots$ と展開する。この時、ケットに L_+ が掛かると $L_+|jj\rangle = 0$ より、展開の第一項目しか残らない。また、$L_3|jj\rangle = j|jj\rangle$ である事より、

$$\begin{aligned}(4.6) &= \frac{1}{(1+|z|^2)^j} e^{zL_-} |jj\rangle \\ &= \frac{1}{(1+|z|^2)^j} \sum_{n=0}^{2j} \frac{1}{n!} z^n {L_-}^n |jj\rangle \\ &= \frac{1}{(1+|z|^2)^j} \sum_{m=-j}^{j} \frac{1}{(j-m)!} z^{j-m} {L_-}^{j-m} |jj\rangle \ . \end{aligned} \tag{4.7}$$

となる。

$$
\begin{aligned}
{L_-}^n|jj\rangle &= \sqrt{\frac{(j+j)!}{(j+j-n)!}\frac{(j-j+n)!}{(j-j)!}}|jj-n\rangle \\
&= \sqrt{\frac{2j!n!}{(2j-n)!(0)!}}|jj-n\rangle \\
&= \sqrt{\frac{2j!(j-m)!}{(j+m)!}}|jm\rangle \ , \qquad (4.8)
\end{aligned}
$$

を (4.7) に代入すると、

$$
\begin{aligned}
(4.7) &= \frac{1}{(1+|z|^2)^j}\sum_{m=-j}^{j}\frac{1}{(j-m)!}z^{j-m}\sqrt{\frac{2j!(j-m)!}{(j+m)!}}|jm\rangle \\
&= \frac{1}{(1+|z|^2)^j}\sum_{m=-j}^{j}\left(\begin{array}{c}2j\\ j+m\end{array}\right)^{\frac{1}{2}} z^{j-m}|jm\rangle \\
&= \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2j}\sum_{m=-j}^{j}\left(\begin{array}{c}2j\\ j+m\end{array}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)^{j-m} e^{i(j-m)\varphi}|jm\rangle \\
&= \sum_{m=-j}^{j}\left(\begin{array}{c}2j\\ j+m\end{array}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{j+m}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{j-m} e^{i(j-m)\varphi}|jm\rangle \ . \qquad (4.9)
\end{aligned}
$$

となり、(4.9) 式で $|\Omega\rangle$ を書き換えられる。

状態の性質は (4.9) を用いて、以下の様に求める事が出来る。

$$
\begin{aligned}
\langle\Omega_1|\Omega_2\rangle &= \sum_{m=-j}^{j}\left(\begin{array}{c}2j\\ j+m\end{array}\right)\left(\cos\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}\right)^{j+m}\left(\sin\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}\right)^{j-m} e^{i(j-m)(\varphi_2-\varphi_1)} \\
&= \left(\cos\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}+e^{i(\varphi_2-\varphi_1)}\sin\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}\right)^{2j} \ , \qquad (4.10)
\end{aligned}
$$

ここで、2 項展開を用いた。これより、

$$
\begin{aligned}
|\langle\Omega_1|\Omega_2\rangle| &= \left(\cos^2\frac{\theta_1}{2}\cos^2\frac{\theta_2}{2}+\sin^2\frac{\theta_1}{2}\sin^2\frac{\theta_2}{2}+\cos\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}\left(2\cos(\varphi_2-\varphi_1)\right)\right)^j \\
&= \left(\frac{1+\cos\theta_1}{2}\frac{1+\cos\theta_2}{2}+\frac{1-\cos\theta_1}{2}\frac{1-\cos\theta_2}{2}+\frac{1}{2}\sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)\right)^j \\
&= \left(\frac{1}{2}(1+\cos\theta_1\cos\theta_2)+\frac{1}{2}\sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)\right)^j \ , \qquad (4.11)
\end{aligned}
$$

となる。ここで、$\chi=\arccos(\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2)$ とすると、

$$
\cos\chi = \sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)+\cos\theta_1\cos\theta_2 \ , \qquad (4.12)
$$

であり、これより

$$\cos\frac{\chi}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\chi}{2}}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos\theta_1\cos\theta_2) + \frac{1}{2}\sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}\ , \tag{4.13}$$

となるので、以下の式が成り立つ。

$$|\langle\Omega_1|\Omega_2\rangle| = \left(\cos\frac{\chi}{2}\right)^{2j}\ . \tag{4.14}$$

最後に完全性について計算を行う。(4.9) で書き換えると、

$$\frac{2j+1}{4\pi}\int d\Omega|\Omega\rangle\langle\Omega| = \frac{2j+1}{4\pi}\int_{-1}^{1} d\cos\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\sum_{m=-j}^{j}\sum_{m'=-j}^{j}\begin{pmatrix}2j\\ j+m\end{pmatrix}^{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}2j\\ j+m'\end{pmatrix}^{\frac{1}{2}}$$
$$\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2j+m+m'}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{2j-m-m'}e^{i(j-m-j+m')}|jm\rangle\langle jm'|$$
$$= \frac{2j+1}{2}\int_{-1}^{1}d\cos\theta\sum_{m=-j}^{j}\begin{pmatrix}2j\\ j+m\end{pmatrix}\left(\cos^2\frac{\theta}{2}\right)^{j+m}\left(\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^{j-m}|jm\rangle\langle jm|$$
$$= \frac{2j+1}{2^{2j+1}}\sum_{m=-j}^{j}\int_{-1}^{1}dx\begin{pmatrix}2j\\ j+m\end{pmatrix}(1+x)^{j+m}(1-x)^{j-m}|jm\rangle\langle|$$
$$= \frac{2j+1}{2^{2j+1}}\sum_{m=-j}^{j}\int_{-1}^{1}dx\begin{pmatrix}2j\\ j+m\end{pmatrix}\frac{(j+m)!}{(2j)!}\frac{d^{j-m}}{dx^{j-m}}(1+x)^{2j}$$
$$(-1)^{j+m}\frac{2j!}{(j-m)!}\frac{d^{j+m}}{dx^{j+m}}(1-x)^{2j}|jm\rangle\langle jm|$$
$$= \frac{2j+1}{2^{2j+1}}\sum_{m=-j}^{j}\frac{1}{(2j)!}\int_{-1}^{1}dx(1+x)^{2j}(-1)^{j+m+j-m}\frac{d^{2j}}{dx^{2j}}(1-x)^{2j}|jm\rangle\langle jm|$$
$$= \frac{2j+1}{2^{2j+1}}\sum_{m=-j}^{j}\frac{1}{(2j)!}\int_{-1}^{1}dx(1+x)^{2j}|jm\rangle\langle jm|$$
$$= \sum_{m=-j}^{j}|jm\rangle\langle jm| = 1\ , \tag{4.15}$$

となる。以上より完全性が確かめられた。

$\chi = \frac{2}{\sqrt{j}}$ を (4.14) の右辺に代入する。j が大きい極限で

$$\left(\cos\frac{\chi}{2}\right)^{2j} \approx \left(1-\frac{1}{2j}\right)^{2j} \approx e^{-1} \tag{4.16}$$

が得られる。(4.16) より、ブロッホコヒーレント状態の有効な幅がスピン j に依存しており、$\frac{1}{\sqrt{j}}$ に比例している事を示している。

4.2 可換な理論と非可換な理論

最初に、可換な空間上の理論として、$S^1 \times S^2$ 上のスカラー ϕ^4 理論を考える。

$$S_C = \frac{R^2}{4\pi}\int_0^\beta dt \int d\Omega \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2R^2}(\mathcal{L}_i\phi)^2 + \frac{\mu^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4}\phi^4\right) , \tag{4.17}$$

ここで β は時間方向 S^1 の円周であり、系の温度の逆数である（$\beta = 1/T$）。R は空間方向の多様体 S^2 の半径であり、S^2 の積分測度は $R^2\int d\Omega = R^2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin\theta$ と与えられる。また、時間 t の微分は $\dot{}$、空間微分は以下の $\mathcal{L}_i$ (i=1,2,3) を用いて書き表す。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\pm &\equiv \mathcal{L}_1 \pm i\mathcal{L}_2 = e^{\pm i\varphi}\left(\pm\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) , \\ \mathcal{L}_3 &= -i\frac{\partial}{\partial\varphi} .\end{aligned} \tag{4.18}$$

この理論に対応する非可換球面上の理論を以下の様に導入する。

$$S_{NC} = \frac{R^2}{2j+1}\int_0^\beta dt\ \mathrm{tr}\left(\frac{1}{2}\dot{\Phi}^2 - \frac{1}{2R^2}[L_i,\Phi]^2 + \frac{\mu^2}{2}\Phi^2 + \frac{\lambda}{4}\Phi^4\right) , \tag{4.19}$$

ここで、j はスピンを表す 0 以上の整数、または半整数であり、Φ は $(2j+1)\times(2j+1)$ の大きさのエルミート行列である。このエルミート行列は時間によっている。L_i は $SU(2)$ のリー代数（$[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk}L_k$）の生成子であり、今はスピン j 表現で書かれている。この理論 (4.19) を行列サイズを大きくする極限を取る（連続極限、$j\to\infty$）と、連続な理論 (4.17) と古典論のレベルで一致する。しかし量子論レベルで考えると、非可換空間上の場の理論による UV/IR アノマリーの為に、連続極限は一致しない。

(4.17) と (4.19) の対応を見る為に Berezin symbol $f_{\hat{\phi}}(\Omega) = \langle\Omega|\hat{\phi}|\Omega\rangle$ [45] を導入する。以下で

$$f_{[L_i,\hat{\phi}]}(\Omega) = \mathcal{L}_i f_{\hat{\phi}}(\Omega) . \tag{4.20}$$

である事を示す。前節の (4.9) 式を用いて $|\Omega\rangle$ の計算を進める。

$$\begin{aligned}\langle\Omega|[L_3,\hat{\phi}]|\Omega\rangle &= \langle\Omega|(L_3\hat{\phi} - \hat{\phi}L_3)|\Omega\rangle \\ &= \sum_{m,m'}\begin{pmatrix} 2j \\ j+m\end{pmatrix}^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{j+m}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{j-m}e^{+im\phi} \\ &\quad \begin{pmatrix} 2j \\ j+m'\end{pmatrix}^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{j+m'}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{j-m'}e^{-im'\phi}(m-m')\langle jm|\hat{\phi}|jm'\rangle \\ &= -i\frac{\partial}{\partial\phi}\langle\Omega|\hat{\phi}|\Omega\rangle\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -i\frac{\partial}{\partial\phi} f_{\hat{\phi}}(\Omega) \\
&= \mathcal{L}_3 f_{\hat{\phi}}(\Omega)\ . \qquad (4.21)
\end{aligned}
$$

同様にして、$\mathcal{L}_\pm$ についても考える。

$$
\begin{aligned}
&\langle\Omega|[L_+,\hat{\phi}]|\Omega\rangle \\
&= \sum_{m,m'} \left(\begin{array}{c} 2j \\ j+m \end{array}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{j+m} \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{j-m} \\
&\quad \left(\begin{array}{c} 2j \\ j+m' \end{array}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{j+m'} \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{j-m'} e^{i(m-m')\phi}\langle jm|L_+\hat{\phi}-\hat{\phi}L_+|jm'\rangle \\
&= \sum_{m,m'} \left[\left(\begin{array}{c} 2j \\ j+m+1 \end{array}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\begin{array}{c} 2j \\ j+m' \end{array}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2j+m+m'+1} \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{2j-m0m'-1} e^{i\phi}e^{i(m-m')}\right. \\
&\quad \left.\sqrt{(j+m+1)(j-m)}\right. \\
&= \sum_{m,m'} \left(\begin{array}{c} 2j \\ j+m+1 \end{array}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\begin{array}{c} 2j \\ j+m' \end{array}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2j+m+m'+1} \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{2j-m0m'-1} e^{i\phi}e^{i(m-m')} \\
&\quad \left.\sqrt{(j+m+1)(j-m)}\right] \langle jm|\hat{\phi}|jm'\rangle \\
&= \sum_{m,m'} \left(\begin{array}{c} 2j \\ j+m+1 \end{array}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\begin{array}{c} 2j \\ j+m' \end{array}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i(m-m')\phi} \left[e^{i\theta}(j-m)\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2j+m+m'+1} \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{2j-m-m'-1}\right. \\
&\quad \left. -e^{i\phi}(j+m')\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2j+m+m'-1} \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{2j-m-m'+1}\right] \langle jm|\hat{\phi}|jm'\rangle\ . \qquad (4.22)
\end{aligned}
$$

以上よりまとめ直す。

$$
\begin{aligned}
\cot\theta &= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} - \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}\right)\ , \qquad (4.23)
\end{aligned}
$$

も用いて書くと、

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_+ f_{\hat{\phi}}(\Omega) &= e^{i\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\langle\Omega|\hat{\phi}|\Omega\rangle \\
&= \sum_{m,m'} \left(\begin{array}{c} 2j \\ j+m \end{array}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\begin{array}{c} 2j \\ j-m' \end{array}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i(m-m')\phi} \\
&\quad \left[(2j+m+m')\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2j+m+m'-1} \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{2j-m-m'+1}\right.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(2j-m-m')\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2j+m+m'+1}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{2j-m-m'-1}\\
&-(m-m')\left(\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2j+m+m'+1}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{2j-m-m'-1}\right.\\
&\qquad\left.-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2j+m+m'-1}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{2j-m-m'+1}\right)\Bigg]\\
&\qquad\langle jm|\hat{\phi}|jm'\rangle\\
=\ &\langle\Omega|[L_+,\hat{\phi}]|\Omega\rangle\ , \qquad (4.24)
\end{aligned}
$$

となる。L_- についても同様である。よって、(4.20) が示された。

次に非可換球面上では、UV/IR mixing がどうなるかを述べる。非可換平面上では UV/IR mixing は Moyal 積の計算から導いた。同様に非可換球面上のスター積を考える。非可換球面上では二つの行列 A、B に対して、スター積が以下の様に定義される。

$$
f_A(\Omega)*f_B(\Omega)\equiv f_{AB}(\Omega)=\frac{2j+1}{4\pi}\int d\Omega'\ \langle\Omega|A|\Omega'\rangle\langle\Omega'|B|\Omega\rangle\ , \qquad (4.25)
$$

各状態 $|\Omega\rangle$ を複素平面上で記述し、スター積の効果を見る。

射影にはステレオ射影 (sterepgraphic projection) を用いる。複素座標として、$z=\tan\frac{\theta}{2}e^{i\theta}$ を導入する。測度の変換を考えると、

$$
\begin{aligned}
dzd\bar{z}&=\begin{vmatrix}\frac{\partial z}{\partial\theta} & \frac{\partial z}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial\bar{z}}{\partial\theta} & \frac{\partial\bar{z}}{\partial\varphi}\end{vmatrix}d\theta d\varphi\\
&=\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\cdot\frac{1}{\sin\theta}\cdot\sin\theta d\theta d\varphi\\
&=\frac{1}{2}\frac{1}{\cos^4\frac{\theta}{2}}\sin\theta d\theta d\varphi\\
&=\frac{1}{2}(1+|z|^2)^2\sin\theta d\theta d\varphi\ , \qquad (4.26)
\end{aligned}
$$

となる。また、$dxdy=2d^2z$ である事を考慮すると、積分測度の変換は

$$
4\frac{1}{(1+|z|^2)^2}dzd\bar{z}=\sin\theta d\theta d\varphi \qquad (4.27)
$$

となる。

次に各状態を z 平面上の座標で書き表す事を考える ($|\Omega\rangle=|z\rangle$)。(4.9) 式より、

$$
\begin{aligned}
&|\Omega\rangle=|z\rangle\\
&\quad=\sum_{m=-j}^{j}\binom{2j}{j+m}^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{j+m}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{j-m}e^{i(j-m)\varphi}|jm\rangle
\end{aligned}
$$

$$= \left(\frac{1}{2}\sin\theta e^{i\varphi}\right)^j \sum_{m=-j}^{j} \begin{pmatrix} 2j \\ j+m \end{pmatrix}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}\right)^m e^{-im\varphi}|jm\rangle \ , \tag{4.28}$$

となる。状態 $|\Omega\rangle$ は z のみで書き表す事が出来ない。

次に $\langle\beta|A|\alpha\rangle/\langle\beta|\alpha\rangle$ を考える。(4.28) より、$\bar{\alpha}$ と β が分母と分子で打ち消し合うため、α と $\bar{\beta}$ で表記される。従って、

$$\begin{aligned} \frac{\langle\beta|A|\alpha\rangle}{\langle\beta|\alpha\rangle} &= e^{\beta\frac{\partial}{\partial\alpha}} \frac{\langle\beta|A|\alpha+\beta\rangle}{\langle\beta|\alpha+\beta\rangle} \\ &= e^{\beta\frac{\partial}{\partial\alpha}} e^{\alpha\frac{\partial}{\partial\beta}} \frac{\langle\beta|A|\beta\rangle}{\langle\beta|\beta\rangle} \\ &= e^{\beta\frac{\partial}{\partial\alpha}} e^{\alpha\frac{\partial}{\partial\beta}} \langle\beta|A|\beta\rangle \\ &= e^{\beta\frac{\partial}{\partial\alpha}} e^{\alpha\frac{\partial}{\partial\beta}} f_A(\beta,\bar{\beta}) \end{aligned} \tag{4.29}$$

となる。ここで、Berezin symbol$f_A(\Omega)$ を $f_A(\beta,\bar{\beta})$ と書き換えている。同様に計算すると、

$$\begin{aligned} \frac{\langle\alpha|A|\beta\rangle}{\langle\alpha|\beta\rangle} &= e^{\bar{\beta}\frac{\partial}{\partial\bar{\alpha}}} e^{\bar{\alpha}\frac{\partial}{\partial\bar{\beta}}} \langle\beta|A|\beta\rangle \\ &= e^{\bar{\beta}\frac{\partial}{\partial\bar{\alpha}}} e^{\bar{\alpha}\frac{\partial}{\partial\bar{\beta}}} f_A(\beta,\bar{\beta}) \ , \end{aligned} \tag{4.30}$$

が得られる。また、完全性関係についていは、パラメータを Ω から z に書き換えて、

$$\frac{2j+1}{4\pi}\cdot 4\int d^2z \frac{1}{(1+|z|^2)^2}|z\rangle\langle z| = 1 \ , \tag{4.31}$$

となる。(4.31) 式は次の様に書き換えられる。

$$\begin{aligned} f_A(\beta,\bar{\beta}) \star f_B(\beta,\bar{\beta}) &= \langle\beta|AB|\beta\rangle \\ &= 4\frac{2j+1}{4\pi}\int d^2\alpha \frac{1}{(1+|\alpha|^2)^2} \frac{\langle\beta|A|\alpha\rangle}{\langle\beta|\alpha\rangle} \frac{\langle\alpha|B|\beta\rangle}{\langle\alpha|\beta\rangle} |\langle\beta|\alpha\rangle|^2 \\ &= 4\frac{2j+1}{4\pi}\int \frac{d^2\alpha}{(1+|\alpha|^2)^2} e^{-\beta\frac{\partial}{\partial\alpha}} e^{\alpha\frac{\partial}{\partial\beta}} f_A(\beta,\bar{\beta}) e^{-\bar{\beta}\frac{\partial}{\partial\bar{\alpha}}} e^{\bar{\alpha}\frac{\partial}{\partial\bar{\beta}}} f_B(\beta,\bar{\beta}) |\langle\beta|\alpha\rangle|^2 \ . \end{aligned} \tag{4.32}$$

(4.32) を、非可換球面上で β 積分すると $\frac{4\pi}{2j+1}\mathrm{Tr}(AB)$ となる事は以下の様に示される。

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{2j+1}\mathrm{Tr}(AB) &= \frac{4\pi}{2j+1}\left(4\frac{2j+1}{4\pi}\right)^2 \int d^2\alpha d^2\beta \frac{1}{(1+|\alpha|^2)^2}\frac{1}{(1+|\beta|^2)^2} \\ &\qquad \mathrm{Tr}(|\beta\rangle\langle\beta|A|\alpha\rangle\langle\alpha|B|\beta\rangle) \\ &= \frac{2j+1}{4\pi}4^2 \int d^2\alpha d^2\beta \frac{1}{(1+|\alpha|^2)^2}\frac{1}{(1+|\beta|^2)^2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& e^{-\beta\frac{\partial}{\partial\alpha}}e^{\alpha\frac{\partial}{\partial\beta}}f_A(\beta,\bar{\beta})e^{-\bar{\beta}\frac{\partial}{\partial\bar{\alpha}}}e^{\bar{\alpha}\frac{\partial}{\partial\beta}}f_B(\beta,\bar{\beta})|\langle\beta|\alpha\rangle|^2 \\
&= 4\int\frac{d^2\beta}{(1+|\beta|^2)^2}f_A(\beta,\bar{\beta})\star f_B(\beta,\bar{\beta})\ . \qquad (4.33)
\end{aligned}
$$

(4.33) について、$j\to\infty$ で、非可換平面と類似の以下の式が成り立つ事を示す。

$$
4\int\frac{d^2\beta}{(1+|\beta|^2)^2}f_A(\beta,\bar{\beta})\star f_B(\beta,\bar{\beta}) = 4\int\frac{d^2\beta}{(1+|\beta|^2)^2}f_A(\beta,\bar{\beta})f_B(\beta,\bar{\beta})\ . \qquad (4.34)
$$

(4.34) が言えたとすると、(4.33) と (4.26)、および次の同一視

$$
f_{\Phi(t)}(\Omega)=\phi(t,\Omega) \qquad (4.35)
$$

より、(4.25) の自由場部分 (Φ^2 の部分) は (4.23) の自由場部分に一致する。

(4.33) の積分を計算する際に部分積分を行う。$\alpha,\bar{\alpha}$ について考えると、部分積分の微分は $\langle\beta|\alpha\rangle$ と $\frac{1}{(1+|\alpha|^2)^2}\frac{1}{(1+|\beta|^2)^2}$ にしか掛からない。

$$
\begin{aligned}
(4.33) = \frac{2j+1}{4\pi}4^2\int d^2\alpha d^2\beta\frac{1}{(1+|\alpha+\beta|^2)^2}\frac{1}{(1+|\beta|^2)^2}|\langle\beta|\alpha+\beta\rangle|^2 \\
e^{\alpha\frac{\partial}{\partial\beta}}f_A(\beta\bar{\beta})e^{\bar{\alpha}\frac{\partial}{\partial\beta}}f_B(\beta\bar{\beta})\ . \qquad (4.36)
\end{aligned}
$$

$|\Omega\rangle$ を z を用いて書き換える。

$$
\frac{1}{2}\sin\theta=\cos^2\frac{\theta}{2}\tan\theta=\frac{z}{1+|z|^2}\ , \qquad (4.37)
$$

を用いると、

$$
|z\rangle=\left(\frac{z}{1+|z|^2}\right)^j\sum_{m=-j}^{j}\binom{2j}{j+m}\frac{1}{z^m}|jm\rangle\ , \qquad (4.38)
$$

となり、

$$
\begin{aligned}
\langle\beta|\alpha\rangle &= \left(\frac{\alpha}{1+|\alpha|^2}\right)^j\left(\frac{\bar{\beta}}{1+|\beta|^2}\right)^j\sum_{m=-j}^{j}\binom{2j}{j+m}\frac{1}{\bar{\beta}^m\alpha^m} \\
&= \left(\frac{\alpha}{1+|\alpha|^2}\right)^j\left(\frac{\bar{\beta}}{1+|\beta|^2}\right)^j\sum_{n=0}^{2j}\binom{2j}{n}\frac{1}{(\bar{\beta}\alpha)^{j-n}} \\
&= \left(\frac{\alpha}{1+|\alpha|^2}\right)^j\left(\frac{\bar{\beta}}{1+|\beta|^2}\right)^j\frac{1}{(\bar{\beta}\alpha)^j}(1+\bar{\beta}\alpha)^{2j} \\
&= \left(\frac{1}{(1+|\alpha|^2)(1+|\beta|^2)}\right)^j(1+\bar{\beta}\alpha)^{2j}\ , \qquad (4.39)
\end{aligned}
$$

となる。

次に、$|\langle\beta|\alpha+\beta\rangle|^2$ を計算する。$e^{\alpha\frac{\partial}{\partial\beta}}$ と $e^{\bar{\alpha}\frac{\partial}{\partial\bar{\beta}}}$ が作用し、$\beta\to\beta-\alpha$、$\bar{\beta}\to\bar{\beta}-\bar{\alpha}$ とずらす事を考えると、

$$\begin{aligned}
|\langle\beta|\alpha+\beta\rangle|^2 &= \langle\beta|\alpha+\beta\rangle\langle\alpha+\beta|\beta\rangle \\
&= \left(\frac{1}{(1+|\alpha+\beta|^2)(1+|\beta|^2)}\right)^{2j}(1+\bar{\beta}(\alpha+\beta))^{2j}(1+\beta(\bar{\alpha}+\bar{\beta}))^{2j} \\
&\to \left(\frac{1}{(1+(\bar{\alpha}+\bar{\beta})(\alpha+\beta-\alpha))}\frac{1}{(1+\bar{\beta}(\beta-\alpha))}\right)^{2j}(1+\bar{\beta}(\alpha+\beta-\alpha))^{2j}(1+(\beta-\alpha)(\bar{\alpha}+\bar{\beta}))^{2j} \\
&\to \left(\frac{1}{(1+(\bar{\alpha}+\bar{\beta}-\bar{\alpha})\beta)}\frac{1}{(1+(\bar{\beta}-\bar{\alpha})(\beta-\alpha))}\right)^{2j}(1+(\bar{\beta}-\bar{\alpha})\beta)^{2j}(1+(\beta-\alpha)(\bar{\alpha}+\bar{\beta}-\bar{\alpha})^{2j}\ ,
\end{aligned} \tag{4.40}$$

となる。この結果を (4.33) に代入すると以下の様になる。

$$\begin{aligned}
(4.33) = \frac{2j+1}{4\pi}4^2\int d^2\alpha d^2\beta\frac{1}{(1+|\beta|^2)^2}\frac{1}{(1+|\beta-\alpha|^2)^2} \\
\left(\frac{1}{(1+|\beta|^2)(1+|\beta-\alpha|^2)}\right)^{2j}(1+(\bar{\beta}-\bar{\alpha})\beta)^{2j}(1+(\beta-\alpha)\bar{\beta})^{2j}f_A(\beta,\bar{\beta}-\bar{\alpha})f_B(\beta-\alpha,\bar{\beta})\ .
\end{aligned} \tag{4.41}$$

新しい変数 $\gamma=\beta-\alpha$ と置いて、更に書き換えると、

$$(4.41) = \frac{2j+1}{4\pi}4^2\int d^2\beta d^2\gamma\frac{1}{(1+|\beta|^2)^2}\frac{1}{1+|\gamma|^2)^2}|\langle\beta|\gamma\rangle|^2 f_A(\beta,\bar{\gamma})f_B(\gamma,\bar{\beta})\ , \tag{4.42}$$

となる。

非可換平面の Moyal 積と比較すると、自由な理論については積分が一つであったので、γ 積分を実行する事を考える。$|\beta\rangle$ を北極 ($|0\rangle$) とし、図 (4.2) の様に二つの状態間の角度 θ を設定すると、

$$|\langle\beta|\gamma\rangle|^2 = \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{4j} \tag{4.43}$$

である。これは $j\to\infty$ で $\theta=0$ となり、鋭いピークを持つ。これを用いると、

$$\begin{aligned}
\frac{2j+1}{4\pi}4\int\frac{d^2\gamma}{(1+|\gamma|^2)^2}|\langle 0|\gamma\rangle|^2 &= \frac{2j+1}{4\pi}\int d\theta d\varphi\sin\theta\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{4j} \\
&= \frac{2j+1}{2}\int_0^{\epsilon}d\theta 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{4j} \\
&= 2(2j+1)\int_{\cos\epsilon/2}^{1}dx x^{4j+1} \\
&= (2j+1)2\frac{1}{4j+2}
\end{aligned}$$

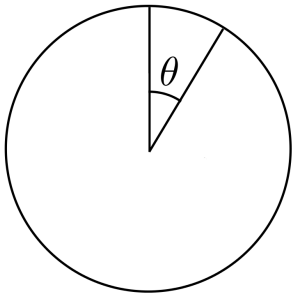


図 4.2: 状態間の角度

$$\to {}_{j\to\infty} 1 \ , \tag{4.44}$$

となる。以上より、$\frac{2j+1}{4\pi} 4 \frac{1}{(1+|\gamma|^2)^2} |\langle\beta|\gamma\rangle|^2$ が $j \to \infty$ で、デルタ関数の様に振る舞う事が分かった。これを用いると、

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{2j+1}\mathrm{Tr}(AB) &= 4\int d^2\beta \frac{1}{(1+|\beta|^2)^2} f_A(\beta,\bar{\beta}) \star f_B(\beta,\bar{\beta}) \\ &= 4\int d^2\beta \frac{1}{(1+|\beta|^2)^2} f_A(\beta,\bar{\beta}) f_B(\beta,\bar{\beta}) \\ &= \int d\Omega f_A(\Omega) f_B(\Omega) \ . \end{aligned} \tag{4.45}$$

となる。以上より (4.34) が示された。

次に、相互作用項について考える。ϕ^4 理論より ϕ の 4 乗項が存在し、スター積は複雑になる。この事を理解するために 2 乗の場合のスター積は微分を含めた形で書くと、

$$f_A \star f_B(0,0) \approx e^{\frac{1}{2j}\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{\partial}{\partial\beta}} f_A(\alpha,\bar{\alpha}) f_B(\beta,\bar{\beta})|_{\alpha=\beta=0} \ , \tag{4.46}$$

となる。(4.46) は $j \to \infty$ の極限で、4 乗より (4.46) のスター積 $(f_A \star f_B(0,0)) \star (f_C \star f_D(0,0))$ を考える。この時、部分積分を用いて、スター積から微分をなくす事が出来ない。よって、非可換平面上と同じく、非可換球面上で、4 乗項は可換な空間上の理論と一致しない。

以上の様に、非可換球面上で考えた場合でも、物理量の 3 乗以上を計算すると、スター積の寄与が存在する事が分かった。3.2 節で述べた様に、この非可換な効果のために、UV/IR アノマリーが存在する。ただし、f_A と f_B が緩やかに変化している場合（運動量が小さい場合）では、$j \to \infty$ で (4.46) は通常の積に帰着する。これにより、非可換な理論と可換な理論では $j \to \infty$ で *tree* レベルでは一致する。

4.3 行列模型と二つの領域

この節では、非可換球面を二つの領域に分け、行列模型と領域の対応を見る [20]。Berezin symbol と行列要素 $\langle jm|\Phi|jm'\rangle$ の関係は以下の様に与えられる。

$$f_\Phi(\Omega) = \sum_{m,m'} \langle\Omega|jm\rangle\langle jm|\Phi|jm'\rangle\ \langle jm'|\Omega\rangle. \tag{4.47}$$

ここで、(4.9) を使う事により、

$$\langle\Omega|jm\rangle\langle jm'|\Omega\rangle \sim \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2j+m+m'} \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{2j-m-m'} e^{i(m-m')\varphi}\ , \tag{4.48}$$

が得られる。

$\langle\Omega|jm\rangle\langle jm'|\Omega\rangle$ の振る舞いについて $\cos\theta = y$ とし考える。

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+y}{2}} \tag{4.49}$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-y}{2}}\ , \tag{4.50}$$

の書き換えと、$x = (m+m')/2j$ と置く事によって、

$$\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2j+m+m'} \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{2j-m-m'} = \frac{1}{2^{2j}}\,(1+y)^{j(1+x)}\,(1-y)^{j(1-x)}\ . \tag{4.51}$$

となる。(4.51) がどこで極値を取るのか調べる。

$$f(y) = (1+y)^{j(1+x)}\,(1-y)^{j(1-x)}\ . \tag{4.52}$$

y 微分を行う。

$$f'(y) = (1+y)^{j(1+x)-1}(1-y)^{j(1-x)-1}\{j(1+x)(1-y) - j(1-x)(1+y)\}\ . \tag{4.53}$$

ここから、$y = x$ で $f(y)$ は極値を持つ事が分かる。極値の周りで展開する事を考える。

$$\begin{aligned}
\ln f &= \ln\left[(1+y)^{j(1+x)}\,(1-y)^{j(1-x)}\right] \\
&= j(1+x)\ln(1+y) + j(1-x)\ln(1-y) \\
&= j(1+x)\ln(1+x+\Delta y) + j(1-x)\ln(1-x-\Delta y) \\
&= j(1+x)\ln(1+x) + j(1+x)\ln\left(1+\frac{\Delta y}{1+x}\right) + j(1-x)\ln(1-x) + j(1-x)\ln\left(1-\frac{\Delta y}{1-x}\right) \\
&= j(1+x)\ln(1+x) + j(1-x)\ln(1-x) \\
&\quad + j(1+x)\left(\frac{\Delta y}{1+x} - \frac{1}{2}\frac{(\Delta y)^2}{(1+x)^2} + \mathcal{O}((\Delta y)^3)\right) + j(1-x)\left(-\frac{\Delta y}{1-x} - \frac{1}{2}\frac{(\Delta y)^2}{(1-x)^2} + \mathcal{O}((\Delta y)^3)\right)
\end{aligned}$$

$$= j(1+x)\ln(1+x) + j(1-x)\ln(1-x) - \frac{1}{2}j\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)(\Delta y)^2 + \mathcal{O}((\Delta y)^3)$$
$$= j(1+x)\ln(1+x) + j(1-x)\ln(1-x) - \frac{1}{2}j\frac{2}{1-x^2}(\Delta y)^2 + \mathcal{O}((\Delta y)^3)\ . \tag{4.54}$$

今、y と角度 θ に対しては、以下の様な関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} y &= \cos(\theta_0 + \Delta\theta) \\ &= \cos\theta_0 - \sin\theta_0\Delta\theta + \mathcal{O}((\Delta\theta)^2) \\ &= x - \sqrt{1-x^2}\Delta\theta + \mathcal{O}((\Delta\theta)^2) \end{aligned} \tag{4.55}$$

$$\Delta y = -\sqrt{1-x^2}\Delta\theta + \mathcal{O}((\Delta\theta)^2)\ . \tag{4.56}$$

これを代入すると、

$$\begin{aligned} (4.54) &= j(1+x)\ln(1+x) + j(1-x)\ln(1-x) - j\frac{1}{1-x^2}(1-x^2)(\Delta\theta)^2 + \mathcal{O}((\Delta\theta)^3) \\ &= j(1+x)\ln(1+x) + j(1-x)\ln(1-x) - j(\Delta\theta)^2 + \mathcal{O}((\Delta\theta)^3)\ , \end{aligned} \tag{4.57}$$

となる。以上より f の形に書き直す。

$$f = (1+x)^{j(1+x)}(1-x)^{j(1-x)}e^{-j(\Delta\theta)^2}\ . \tag{4.58}$$

この事から $\Delta\theta$ の幅が $1/\sqrt{j}$ である事が求まる。すなわち、(4.54) より $j \to \infty$ で鋭いピークを持つ事が分かる [20]。以上より、

$$\cos\theta = \frac{m+m'}{2j}\ . \tag{4.59}$$

の関係が成り立ち、この幅は $\Delta\theta \sim \frac{1}{\sqrt{j}}$ である。この事は、行列要素 $\langle jm|\Phi|j\ n-m\rangle$ が $\cos\theta = \frac{n}{2j}$ における場 ϕ に対応する事を示している [20]。行列サイズは N と記す。$N = 2j+1$ である。

ここまでの議論より、行列要素と θ の関係を示す事が出来る。

我々の研究では、非可換球面を二つの領域に分けた [20]。対応は図 (4.59) である。領域 A と B を指定するために、我々は新しいパラメータ x を導入する。図の角度のパラメータ θ とは、以下の様な関係を持つ。

$$x = 1 - \cos\theta\ . \tag{4.60}$$

x は 2π によって分けられた領域 A の面積を表す。行列で書き表す為の行列 Φ のパラメータ (m, m') は、以下の不等式を用いて領域 A と B を区別する。領域 A の場合は

$$m + m' > 2j - u\ , \tag{4.61}$$

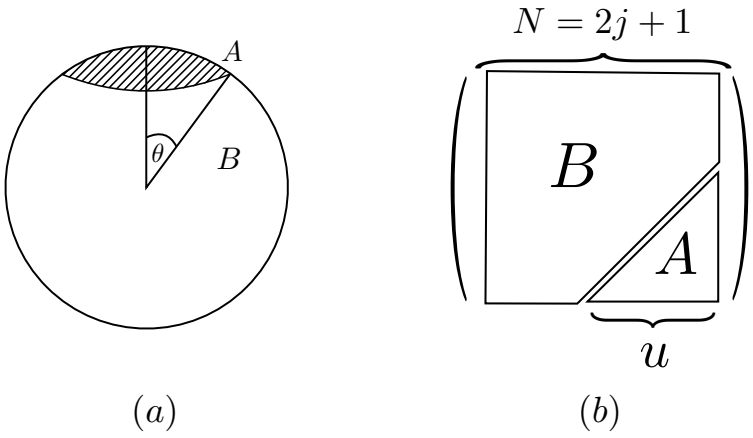


図 4.3: 非可換球面上の二つの領域 A, B と、行列模型の二つの領域 A, B

を満たす。ここで、$u = 0, 1, 2, \cdots, 4j$ であり、u が領域 A の大きさを記述する。ここで、この事は (4.59)、(4.60) 、 (4.61) に従い、u と x の関係は以下の様になる。

$$x = \frac{u}{2j} \ . \tag{4.62}$$

4.4 実際の計算量

(4.19) において、$\Phi(t)$ をどのようにおくかを述べる。今、領域 B に対して n 個のレプリカがあると考える。よって、$\Phi(t) = \Phi_I(t)$ に対して、以下の様な周期境界条件を課す。この事は図 2.4 に対応する。

$$\begin{aligned} &\Phi_I(\beta, m, m') = \Phi_{I+1}(0, m, m') \ \text{領域 A} \ , \\ &\Phi_I(\beta, m, m') = \Phi_I(0, m, m') \ \text{領域 B} \ , \end{aligned} \tag{4.63}$$

$I = 1, \cdots, n$ であり、$n+1$ は $I = 1$ に対応する。その際、我々は以下の関係式を得る。

$$\mathrm{Tr}\rho_A^n = \frac{Z(x, n)}{Z^n} \ , \tag{4.64}$$

ここで、Z は x を変数として持ち $Z(n = 1)$ である。(4.64) を (2.13) に代入して、S_A を書き換えると

$$S_A(x) = -\lim_{n \to 1} \frac{\partial}{\partial n} \ln \left(\frac{Z(x, n)}{Z^n} \right) \ . \tag{4.65}$$

ここから、$\beta \to \infty$ の極限を取る事により、基底状態のエンタングルメントエントロピーを得る事が出来る。有限の β を考えると、$\beta = 1/T$ の関係より、有限温度の効果を見る事が出来る。

今回エンタングルメントエントロピー S_A をパラメータ x で微分した量を計算した。

$$\frac{\partial S_A(x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[-\lim_{n\to 1}\frac{\partial}{\partial n}\ln\left(\frac{Z(x,n)}{Z^n}\right)\right] = \lim_{n\to 1}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial n}F[x,n]\ , \tag{4.66}$$

ここで、$F[x,n]$ は図 2.4 で指定される系の自由エネルギーである。計算時、n 微分に対し近似を用いると、以下の様になる。[2]

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to 1}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial n}F[x,n]\\ &\to \frac{\partial}{\partial x}(F[x,n=2]-F[x,n=1]) = \lim_{j\to\infty}\frac{F[x+\varepsilon,n=2]-F[x,n=2]}{\varepsilon}\ ,\end{aligned} \tag{4.67}$$

$\varepsilon = \frac{1}{2j}$ である。ここで、(2.4) より、 $\beta\to\infty$ の極限を取ると、

$$\begin{aligned}&S_A(x) = S_A(2-x)\ ,\\ &\frac{\partial S_A}{\partial x}(x) = -\frac{\partial S_A}{\partial x}(2-x)\ ,\end{aligned} \tag{4.68}$$

である。これは $\theta\to\pi-\theta$ の元での系の対称性を反映している。

4.5 非可換空間上の場の理論の計算方法

エンタングルメントエントロピーは前出の様に、レプリカ法を用いて計算した。相互作用項を持つ場の理論 $\lambda\neq 0$ の場合は、補間作用 (interpolating action) $S_{int} = (1-\gamma)S_{x+\varepsilon} + \gamma S_x$ を導入して計算する。ここで $S_{x+\varepsilon}$ と S_x は、領域 A のサイズ $u = 2j(x+\varepsilon),\ 2jx$ にそれぞれ対応する作用であり、自由エネルギー $F[x+\varepsilon,n=2]$ と $F[x,n=2]$ にも対応している。数値的に計算をする為に、以下の様な積分を行う。

$$F[x+\varepsilon,n=2]-F[x,n=2] = \int_0^1 d\gamma\ \langle S_{x+\varepsilon}-S_x\rangle_\gamma\ , \tag{4.69}$$

ここで、$\langle\cdots\rangle_\gamma$ はカノニカル分布 $e^{-S_{int}}$ の重みで計算した期待値を表す。実際の計算においては、γ は 0 から 1 まで、0.1 刻みで計算している。また、$\langle S_{x+\varepsilon}-S_x\rangle_\gamma$ を各 γ について数値計算しており、最後の積分については、シンプソン公式を用いる。

自由場の理論 $\lambda = 0$ の場合、我々は直接 $F[x,n=2]$ を数値的に計算した。詳しくは付録 B に記述する。

どちらの場合についても、時間方向について格子理論を用いて計算しており、格子間隔は a である。

[2]厳密には、レンニエントロピーの x 微分を計算している。ここではレンニパラメータは $n=2$ である。

5　ハイブリッドモンテカルロシミュレーション

$\lambda = 1$ のモデルに対しては、ハイブリッドモンテカルロ法を用いた計算機シミュレーションで計算を行った [40]。モンテカルロ法は、様々な状態の平均が、マルコフ過程で生成された状態の列での平均で近似される事を利用している。マルコフ過程とは、、その状態になる前の状態にのみよる遷移確率を持つ理論である。

その中でも、ハイブリッドモンテカルロ法を実際には用いて計算を行った。この計算法では、新しい変数としてガウス分布で決まる共役運動量を用いる事により、一つの変数にのみよる場合に比べ、より効率的に結果を得る事が可能となる。変数 ϕ は与えられた物を用い、補助変数である共役な運動量 π を含めた作用は以下の様になる。

$$H[\phi, \pi] = \frac{1}{2}\pi^2 + S(\phi)\ . \tag{5.1}$$

$S(\phi)$ は理論より決まる作用である。このハミルトニアンから、古典的な理論を考える。運動方程式から、以下の式を得る。

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial \pi} = \pi,\ \ \frac{d\pi}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = -\frac{\partial S}{\partial \phi}\ . \tag{5.2}$$

(5.2) に従い、状態は発展する。実際はコンピュータを用いた数値的な計算のため、離散的な扱いが必要となる。その為、我々はリープフロッグ法（かえる跳び法）を用いた。この方法は時間に対して可逆性を持つ理論である。今、二つの変数 ϕ と π を $\tau = 0, \tau_f$ の間で発展させる事を考える。この時間間隔をステップ数 N_t で分割する。この間隔をステップサイズ $\epsilon = \tau_f / N_t$ とし、ϵ ごとに ϕ と π を更新する事を考える。

まず、時間 $\tau = 0$ に対し、与えられた ϕ とガウス分布で生成される運動量 π を設定する。

$$\begin{cases} \phi(0) = \phi \\ \pi(0) = \pi \end{cases} \tag{5.3}$$

次に、(5.2) 式より以下の様に発展を行う。

第一ステップ

$$\pi(1/2) = \pi(0) - \frac{1}{2}\epsilon \frac{\partial S(\phi(0))}{\partial \phi(0)} \tag{5.4}$$

主ステップ

$$\begin{cases} \phi(n+1) = \phi(n) + \epsilon\pi(n+1/2) \\ \pi(n+3/2) = \pi(n+1/2) - \epsilon \dfrac{\partial S(\phi(n+1))}{\partial \phi(n+1)} \end{cases} \tag{5.5}$$

最終ステップ

$$\phi' = \phi(N_t) = \phi(N_t - 1) + \epsilon\pi(N_t - 1/2) \tag{5.6}$$

$$\pi' = \pi(N_t) = \pi(N_t - 1/2) - \epsilon \frac{\partial S(\phi(N_t))}{\partial \phi(N_t)} \tag{5.7}$$

時間を N_t 等分している為、N_t 回に分けて発展を行っている。また、$\phi(n) \equiv (t = n\epsilon)$ と略記している。

最後にこの発展結果が受け入れられるかどうかをメトロポリステストで決める。ハミルトニアンは古典的に連続的に解かれる場合は保存される。この時、ハミルトニアンの発展の前後の差、

$$\Delta H = H(\phi', \pi') - H(\phi, \pi) \ , \tag{5.8}$$

は 0 になる。しかし、シミュレーションでは連続でなく離散であるから $\delta H \neq 0$ である。今回の様な離散的な計算では、運動エネルギーが保存せず正しい確率分布による発展にならない。この欠点を克服する為、乱数を用いて受け入れるか否かのテストを行う。このテストはメトロポリステストと呼ばれる。まず、$\Delta H < 0$ の場合は、無条件で受け入れる。また、$\Delta H > 0$ の場合では乱数 r を用いて $r < e^{-\Delta H}$ の場合は受け入れる。そして、受け入れられた場合は新しく $\phi = \phi', \pi = \pi'$ と置き、1 スイープが終了する。次のスイープは (5.3) から行う。

十分に小さい $\Delta\tau$ を選ぶ事で ϕ' と π' を受け入れる回数を増やす事は出来る。この事をアクセプタンスを大きくするという。アクセプタンスを大きくすると、計算時間も長くなるため、通常は適切なアクセプタンスを選び計算を行う。

6　数値解析の結果

この章では、自由場の理論 ($\lambda = 0$) の結果と相互作用がある理論 (ϕ^4 理論) の結果を述べる。相互作用がある場合は、ϕ^4 項の結合定数を $\lambda = 1.0$ として計算を行った。これは強結合の場合に対応する。また、全ての理論で質量 $\mu = 1.0$ で計算を行った。

6.1　$\lambda = 0$

我々は最初に $F[x, \alpha = 2]$ を数値計算した。詳しい方法は付録 B に示している。LAPAC を用いて、LU 分解から、付録 B にある、行列 T の対数を求めた。そこから、測定値であるエンタングルメントエントロピー S_A の x 微分 $\partial S_A/\partial x$ を (4.67) 式を用いて求めた。領域を分けるパラメータ u の定義式 (4.62) より、以降のグラフに対し、u を $2j$ で割った物 x が、横軸のパラメータである。縦軸はエンタングルメントエントロピー S_A を x で微分し、$2j$ で割った量を表す。

行列サイズ $N = 16$、$\beta = 1.0, 2.0, 3.0$、時間方向の格子間隔 $a = 3.125 \times 10^{-2}$ 場合のグラフは図 6.1 となる。$\beta = 1.0$ のグラフから、u が奇数の場合と偶数の場合とで、振る舞いが異なる事が見て取れる。また、奇数のみ、偶数のみのグラフでは滑らかになる事が見て取れる。一方で、β を大きくすると、偶奇の違いによる振る舞いの違いが小さくなる事が見て取れる。

我々は様々な β の値でエンタングルメントエントロピーを測定したため、また、シミュレーションとの関係により、以下は u が奇数の場合に着目して議論を進める。

図 6.2 と図 6.3 では、時間方向の格子間隔を変える事により、時間方向の連続極限を調べた。図 6.2 は $N = 16,\ \beta = 1.0$ の結果を示している。また、図 6.3 では $N = 16,\ \beta = 3.0$ の結果を示している。グラフにおいては、4 つの異なる格子間隔 a のデータを示した。両方のグラフにおいて $a = 3.125 \times 10^{-2}$ と $a = 4.167 \times 10^{-2}$ のデータがほぼ重なっている事が見て取れる。これは、連続極限がとれている事を意味する。

$a = 3.125 \times 10^{-2}$ に対して直線 $\frac{1}{2j}\frac{\partial S_A}{\partial x} = cx + d$ でフィッティングを行った。この際、端である $x = 0$ と $x = 2.0$ の近くのデータを除いて行っている。$x = 0$ と $x = 2.0$ の近くは、A または B 領域がとても狭い事に対応する。この時、行列のサイズ N が有限である事からくる 2 つの領域の曖昧さのために、これらのデータを取り除く事は妥当である。

具体的には $\beta = 1.0$ に対し領域 $0.333 \leq x \leq 1.8$ で、$\beta = 3.0$ に対し領域 $0.2 \leq x \leq 1.8$ でフィッティングを行った。その結果 $\beta = 1.0$ に対して、$c = -0.1672(26)$ かつ $d = 0.2623(32)$、$\beta = 3.0$ に対して $c = -0.1612(29)$ かつ $d = 0.1629(33)$ となる事が分かった。図 6.3 では $N = 16$、$\beta = 3.0$ に加え、$N = 16$、$\beta = 4.0$、$a = 4.167 \times 10^{-2}$ のデータを示している。また、この結果は $N = 16$、$\beta = 3.0$、$a = 4.167 \times 10^{-2}$ の結果とほぼ等しい事が見て取れる。これより、$\beta = 3.0$ は十分低温極限 ($\beta \to \infty$

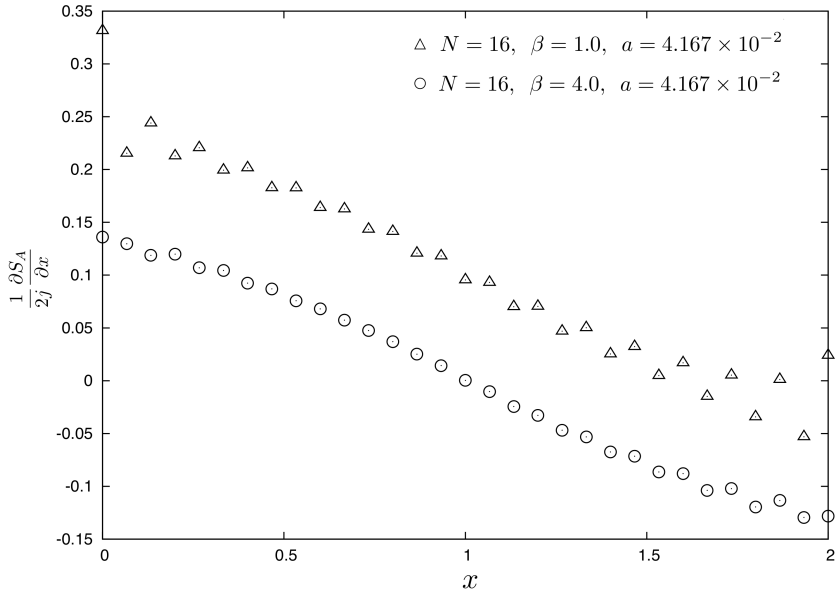


図 6.1: 縦軸は $\frac{1}{2j}\frac{\partial S_A}{\partial x}$, 横軸は x を表す全てのデータに対して、行列サイズ $N = 16$、時間方向の格子間隔 $a = 4.167 \times 10^{-2}$ は一定である。三角形、円の各点はそれぞれ $\beta = 1.0, 4.0$ に対応している。今、$x = u/2j$ であるので、u が奇数に対応するデータ、または偶数に対応するデータがそれぞれ滑らかに振る舞う事が分かる。また、グラフから分かる様に β を大きくするに従い、偶奇の差は小さくなる。

の極限) に近いと言える。確かに、$N = 16$, $\beta = 3.0$、$a = 3.125 \times 10^{-2}$ のデータをフィットした関数 $\frac{1}{2j}\frac{\partial S_A}{\partial x} = cx + d$、$c = -0.1612(29)$、$d = 0.1629(33)$ は低温極限で成立する (4.68) を満たす。また、この関数は誤差の範囲内で、$1 - x$ に比例している。この事より、エンタングルメントエントロピーの振る舞いとして、

$$S_A \propto 2x - x^2 = \sin^2\theta\ . \tag{6.1}$$

が予測される。この振る舞いは [20, 21] において観測された結果と係数を除いて等しい。$\beta = 1.0$ と $\beta = 3.0$ のフィッティングによって得られた c と d の値を比較する事により、二つの関数 $\frac{1}{2j}\frac{\partial S_A}{\partial x} = cx + d$ の違いが定数である事が分かった。この事はエンタングルメントエントロピーへの有限温度効果が x に比例している事を示す。すなわち、有限温度効果は体積に比例する事が分かった。我々は今回 u が奇数の場合に着目したが、偶数の場合も同様に有限温度の寄与が存在する。

また、図 6.2 では、異なる a に対して、$x = 1$ で同じ値を取っている。この値を異なる a の各データから引くと、$x = 0, 2$ の近傍を除いて式 (4.68) を満たす。この事より、有限温度効果は a によらない事が分かる。

最後に $N \to \infty$ の極限を調べる。図 (6.4) は行列サイズ $N = 16, 24, 32$ に対して、$\beta = 1.0$、

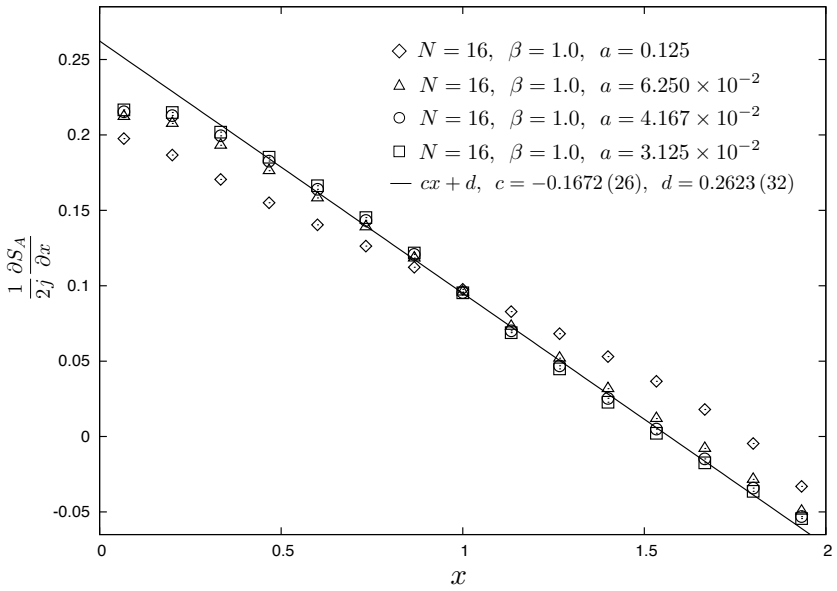


図 6.2: 縦軸は $\frac{1}{2j}\frac{\partial S_A}{\partial x}$, 横軸は x を表す。全てのデータに対して、行列サイズ $N = 16$、時間方向の長さ $\beta = 1.0$ で一定である。菱形、三角形、円、四角形の各点は時間方向の格子間隔 a がそれぞれ $a = 0.125, 6.250 \times 10^{-2}, 4.167 \times 10^{-2}, 3.125 \times 10^{-2}$ の場合に対応する。また、直線は四角形のデータ $(a = 3.125 \times 10^{-2})$ を、領域 $0.333 \leq x \leq 1.800$ で $\frac{1}{2j}\frac{\partial S_A}{\partial x} = cx + d$ にフィッティングした結果である。$c = -0.1672(26)$、$d = 0.2623(32)$ の値を取る。

$\alpha = 4.167 \times 10^{-2}$ のグラフである。この図では、他の図と異なり、縦軸が $2j$ で割られていない。この 3 つのグラフは $x = 1.0$ で重なる。この値の平均を各データから引き、縦軸を $\frac{1}{2j}\frac{\partial S_A}{\partial x}$ としたグラフを、図 (6.5) に描いた。すると、すべての点がほぼ重なる事が分かった。以上より、有限温度の効果が N に依存しない事、低温極限で $\beta \to \infty$ ではエンタングルメントエントロピー S_A は N に比例する事が分かった。

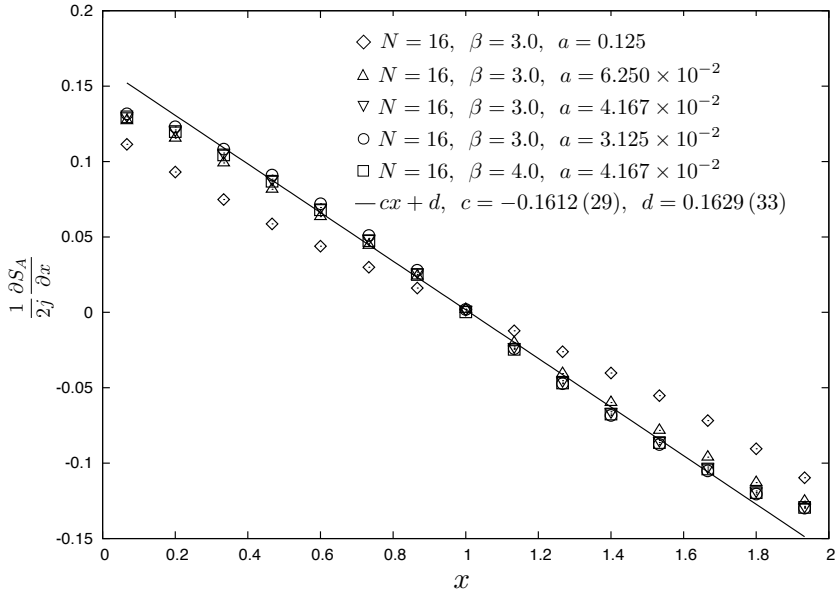


図 6.3: 縦軸は $\frac{1}{2j}\frac{\partial S_A}{\partial x}$、横軸は x を表す。全てのデータに対して、行列サイズ $N = 16$ で一定である。菱形、三角形、逆三角形、円の各点は時間方向の長さ $\beta = 3.0$ で一定であり、時間方向の格子間隔 a はそれぞれ $a = 0.125, 6.250 \times 10^{-2}, 4.167 \times 10^{-2}, 3.125 \times 10^{-2}$ の場合に対応する。また、直線は円のデータ $(\beta = 3.0, a = 3.125 \times 10^{-2})$ を、領域 $0.200 \leq x \leq 1.800$ で $\frac{1}{2j}\frac{\partial S_A}{\partial x} = cx + d$ にフィッティングした結果である。$c = -0.1612(29)$、$d = 0.1629(33)$ の値を取る。四角形の点は時間方向の長さは $\beta = 4.0$、時間方向の格子間隔 a は $a = 4.167 \times 10^{-2}$ の場合に対応する。

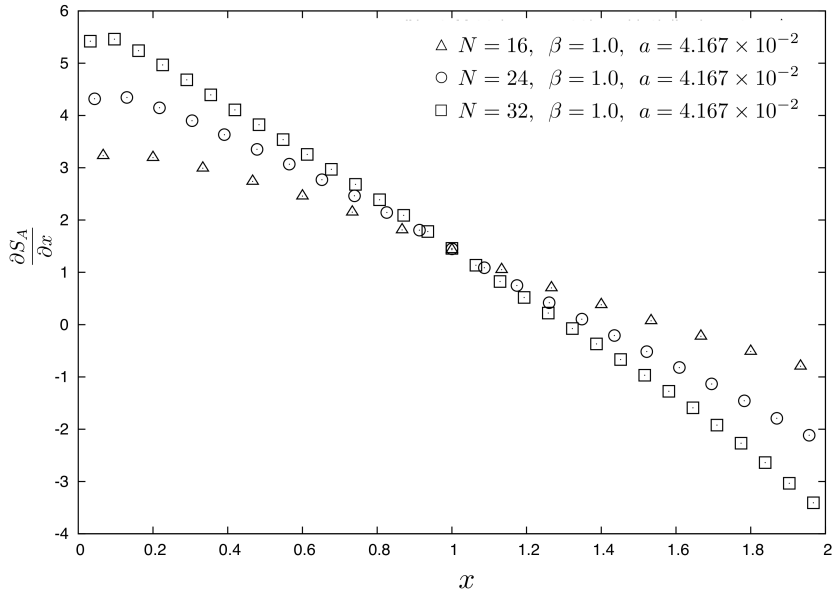


図 6.4: 縦軸は $\frac{\partial S_A}{\partial x}$, 横軸は x を表す。全てのデータに対して、時間方向の長さ $\beta = 1.0$、時間方向の格子間隔 $a = 4.167 \times 10^{-2}$ で一定である。三角形、円、四角形の各点は行列サイズ N がそれぞれ $N = 16, 24, 32$ の場合に対応する。全てのデータは $x = 1$ で重なっている。

6.2 $\lambda = 1.0$

この節では、$\lambda = 1.0$ の場合についての結果を述べる。第 5 章で説明した、ハイブリッドモンテカルロ法を使い、シミュレーションを行った。この計算には京都大学基礎物理学研究所のスーパーコンピュータ SR16000 と東京大学情報基盤センターのスーパーコンピュータ FX10 を利用した。付録 C にある、ジャックナイフ法による誤差の解析には、東京大学情報基盤センターのスーパーコンピュータ SR16000 を利用した。また、プログラム言語には Fortran を利用し、OpenMP によるスレッド並列化を用いて、計算の高速化を行った。プログラムコードについては、付録 E に載せている。

モンテカルロシミュレーションで用いたパラメータは、以下の表 (6.6) の通りである。$\lambda = 0$ の節では、有限温度効果が β の値でコントロール出来る事が分かった。その為、計算にかかる時間との関係上、$N = 16$、$\beta = 1.0$、$a = 0.125$ の場合と $N = 16$、$\beta = 1.0$、$a = 6.250 \times 10^{-2}$ の場合をモンテカルロシミュレーションで計算した。図 (6.7) で、縦軸は $\frac{1}{2j}\frac{\partial S_A}{\partial x}$、横軸は x を表す。$\lambda = 1.0$ においても、$\lambda = 0$ の場合と同じく u が奇数の場合にのみ着目した。有限温度効果を別に考える。

まず、$N = 16$、$\beta = 1.0$、$a = 0.125$ の場合について述べる。この際、各 $u = 2j \times x$ に対し、(4.69) 式の $\langle S_{x+\epsilon} - S_x \rangle$ を計算した。$\gamma = 0.0, 0.1, \cdots, 1.0$ として、11 の試行を行った。各試行に対しては $3,000,000$ 回のトラジェクトリを取っている。また、最初の $100,000$ 回は熱平衡になる過程であると

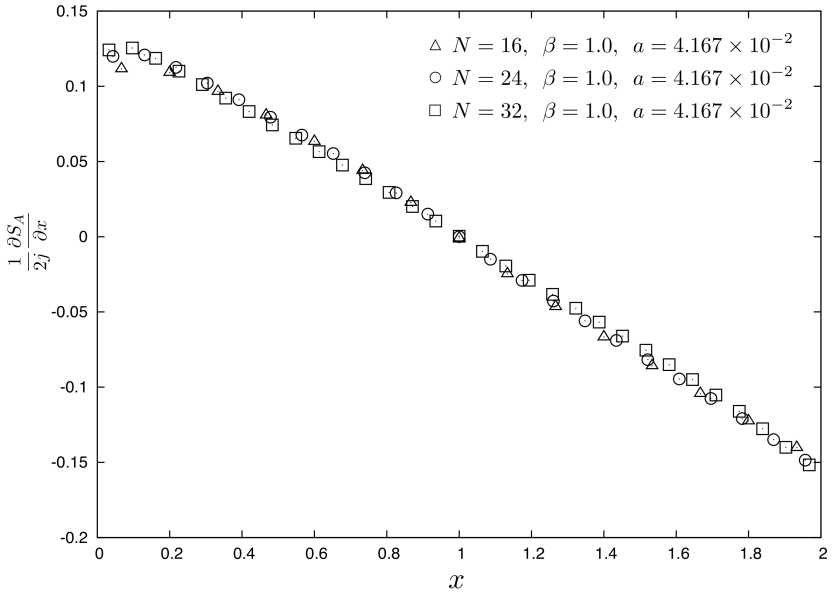


図 6.5: 縦軸は $\frac{1}{2j}\frac{\partial S_A}{\partial x}$, 横軸は x を表す。全てのデータに対して、時間方向の長さ $\beta = 1.0$、時間方向の格子間隔 $a = 4.167 \times 10^{-2}$ で一定である。三角形、円、四角形の各点は行列サイズ N がそれぞれ $N = 16, 24, 32$ の場合に対応する。各データから $\frac{\partial S_A}{\partial x}|_{x=1.0}$ の平均値を引いた値を、改めて $\frac{\partial S_A}{\partial x}$ と定義しプロットしている。

行列サイズ N	時間方向長さ β	時間格子間隔 a	時間間隔 τ_f	ステップ数 N_t	スウィープ数
16	1.0	0.125	3.0	20	$3,000,000$
16	1.0	6.250×10^{-2}	3.0	20	$5,000,000$

図 6.6: 相互作用のある理論 ($\lambda = 1.0$) に対するハイブリッドモンテカルロシミュレーションのパラメータ。各場合におけるアクセプタンスは、共に約７０％である。

見なし、残りの $2,900,000$ 回のデータを用いた。

有限温度の効果より、グラフ全体が y 方向に定数分大きな値を持つと考える。この値を考慮すると、$x = 0.867, 1.000, 1.133$ のデータを除いて (4.68) を満たす。

図 (6.2) の $N = 16$、$\beta = 1.0$、$a = 0.125$ と比較すると、同じ N, β, a であっても $\lambda = 1.0$ の結果は $\lambda = 0$ と異なる振る舞いをする事が分かる。$x = 0.0, 1, 0$ の近傍では、一定値を取る傾向がある。これは、非局所的な相互作用の寄与のためと考えられる。[3]絶対値は自由場の場合に比べ、10 分の 1 程度となっている。これは、強結合及び非可換性の効果のためと考えられる。

次に、$N = 16$、$\beta = 1.0$、$a = 6.250 \times 10^{-2}$ の場合について述べる。この際も、各 $u = 2j \times x$ に対し、(4.69) 式の $\langle S_{x+\epsilon} - S_x \rangle$ を計算した。$\gamma = 0.0, 0.1, \cdots, 1.0$ として、11 の試行を行った。各試行に

[3]これは、素朴に期待される体積則と矛盾しない。ただし、この点に対しては第 7 章における議論を参照

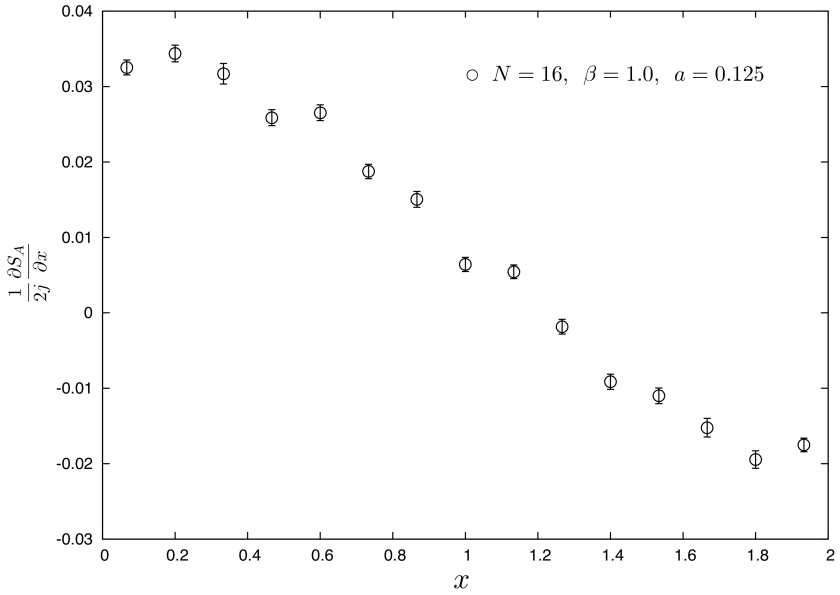


図 6.7: 縦軸は $\frac{1}{2j}\frac{\partial S_A}{\partial x}$, 横軸は x を表す。このデータは、行列サイズ $N = 16$、時間方向の長さ $\beta = 1.0$、時間方向の格子間隔 $a = 0.125$ の場合に対応する。

対しては $5,000,000$ 回のトラジェクトリを取っている。また、最初の $100,000$ 回は熱平衡になる過程であると見なし、残りの $4,900,000$ 回のデータを用いた。

このグラフからは、$a = 0.125$ の場合と同じく、非局所的な相互作用のため、$\lambda = 0$ と異なる振る舞いをする事が見て取れた。絶対値は自由場の場合に比べ、10 分の 1 程度となっている。これも、強結合及び非可換性の効果のためと考えられる。

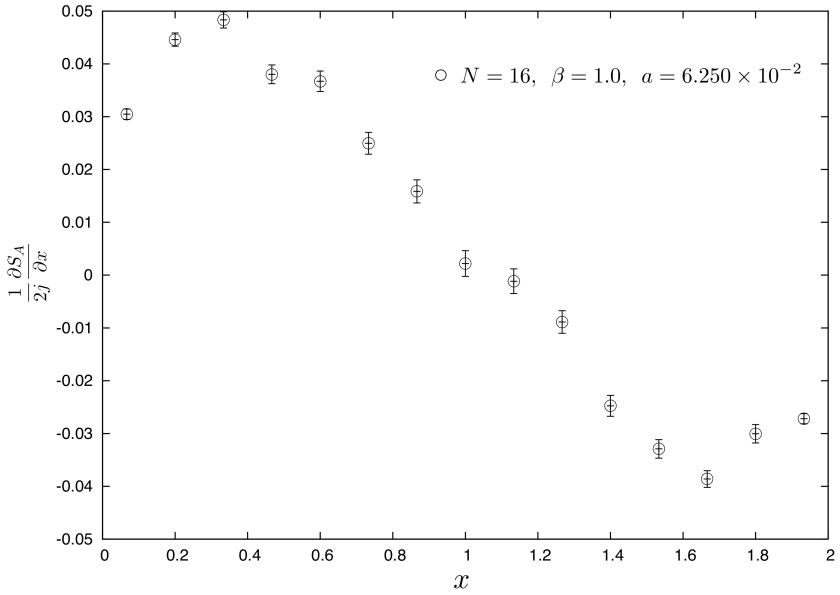


図 6.8: 縦軸は $\frac{1}{2j}\frac{\partial S_A}{\partial x}$, 横軸は x を表す。このデータは、行列サイズ $N = 16$、時間方向の長さ $\beta = 1.0$、時間方向の格子間隔 $a = 6.250 \times 10^{-2}$ の場合に対応する。

7　まとめと展望

本研究において、スカラー場の理論におけるエンタングルメントエントロピーを、レプリカ法を用いて、非可換球面上で計算した。[20, 21] では自由場でのみ使える方法を用いていたが、我々は相互作用がある場合にも適用出来る異なった方法を用いた。数値計算の方法としては、相互作用場の理論ではハイブリッドモンテカルロ法を用いた [24, 25]。

自由場の理論 ($\lambda = 0$) については、低温極限では計算結果が既出の結果 [20, 21] と係数を除いて等しくなった。このことから、我々の計算方法が正しい事を保証している。また、エンタングルメントエントロピーのスケールが行列サイズに比例する事を再現したが、行列サイズ $N = 16$ が、球面上の連続極限に十分近い事が分かった。

有限温度については、本研究により新しく計算された。自由場の理論については、一般的な場の理論と同じく、有限温度によるエンタングルメントエントロピーへの効果が体積に依存する事を発見した。また、有限温度効果が行列サイズ N と格子間隔 a に依存しない事が分かった。相互作用場の理論についても、グラフの振る舞いが中心を除いて (4.68) を満たすため、有限温度効果は同様に体積に依存する事が分かった。また、a には依存しない事も明らかにした。

相互作用場の理論（$\lambda = 1.0$）については、強結合の理論であると考えられる。行列サイズ $N = 16$、時間方向の長さ $\beta = 1.0$、時間方向の格子間隔 $a = 0.125, 6.250 \times 10^{-2}$ のデータは明らかに自由な場のエンタングルメントエントロピーの振る舞いと異なる。(特に $a = 0.125$ の場合は、$x = 0.0, 1.0$ の近傍で、一定値を取る傾向がある。) これは非局所的な相互作用に由来すると考えられる。また、エンタングルメントエントロピーの絶対値が自由場の場合の 10 分の 1 になっている。この大きな違いは、強結合及び非局所的な相互作用の効果であると考えられる。

自由場の理論のエンタングルメントエントロピーが (6.1) となった理由を、以下考察する。第 6 章で見た様に、非可換球面上の自由場の理論の作用は、$j \to \infty$ で可換な理論の作用と一致する。このため、カットオフに依存しない量は、可換な場合と同じ事が期待される。実際、本論文で示した様に、エンタングルメントエントロピーの有限温度効果はカットオフに依存せず、可換な理論と同じく領域の体積に依存する。また、文献 [21] では、可換球面上と非可換球面上のスカラー理論で自由場の場合にカットオフに依存しない量である情報量が計算され、両者が一致する事が示された。非可換球面上のエンタングルメントエントロピーの主要項は、自由場の場合には可換球面上の結果と一致する、すなわち、境界の面積である $\sin\theta$ に比例することが素朴には期待される。しかし、エンタングルメントエントロピーの主要項はカットオフに依存する量であるため、注意が必要である。つまり、正則化された理論である、行列模型に立ち戻って議論しなくてはならない。

まず行列模型で、自由場の場合、L_i が 3 重対角である事を考慮すると、作用は行列要素に対して、

局所的になっている。角度θが一定の円周上で（図 (4.3)(a)）、この円周の上にあるブロッホコヒーレント状態を考える。(4.16) とその下の考察より、独立なブロッホコヒーレント状態は、$\sin\theta$に依存した数だけとれる。そのため、この円周上では$\sin^2\theta$に比例した数の行列要素$\langle jm'|\Phi|jm\rangle$が局所的に相互作用している事になる。よって、エンタングルメントエントロピーは$\sin^2\theta$に比例すると考えられる。

これより、非局所的な相互作用の効果は“体積則”

$$S_A \propto \int \sin^2\theta' d\theta' \ , \tag{7.1}$$

として現れると考えるのが自然である。

また、エンタングルメントエントロピーがNに比例する事は、次の様に理解出来る。$\sin^2\theta$は円周の2乗であるので、長さの2乗の次元を持つ。これを無次元化するには、長さのカットオフである$1/\sqrt{j}$の2乗で割る事になり、エンタングルメントエントロピーは、j、すなわちNに比例している。

今後の展望について述べる。相互作用場の理論については、行列サイズ$N = 16$、時間方向の長さ$\beta = 1.0$、時間方向の格子間隔$a = 0.125, 6.250 \times 10^{-2}$についてのみデータを得た。更に異なる時間方向の格子間隔aについてと異なる行列サイズNについて計算を行い、連続極限について調べたい。この際、aとNの値に応じて、λとμの値を調整する必要がある可能性がある。これにより、図 () と () のデータがより近づく事が期待される。また、$\beta \to \infty$の極限について調べる事も重要である。これらの極限を取る事によって、非局所的な相互作用の効果が、xに比例する素朴な体積則か、(7.1) 式の様な“体積則”のどちらとして現れるのかを、明らかにしたい。さらに、エンタングルメントエントロピーのμとλ依存性を調べたいと考えている。特に、相転移があるかどうかを調べたいと考えている。

また、$L_i \to L_i \otimes 1_k$とモデルを変更し、$k \to \infty$を取る事により、プラナーの寄与のみを取り出し、可換なS_2上の相互作用場の理論が得られるが、この時のエンタングルメントエントロピーを計算し、非可換な場合との比較を行うのも興味深い。また、相互情報量がどのように非可換性の影響を受けるのかも、調べたい。

謝辞

本論文作成にあたり、指導教員の土屋麻人准教授には 3 年間に渡る研究指導を賜った事、深く感謝致します。私の拙い質問にも丁寧にご教授いただき、研究を続ける事が出来ました。改めてお礼申し上げます。

また、浅芝秀人教授と冨田誠教授に副指導教員を担当して頂きました。誠にありがとうございます。

修士課程の指導教員の稲見武夫先生には、修了後も何度も議論させて頂き、研究を完成させる事が出来ました。心より御礼申し上げます。

共同研究を行わせて頂いた皆様にも、御礼申し上げます。

中山優氏には、共形場や Liouville 重力について、議論やご教授いただきました。改めて感謝申し上げます。

小山陽次氏には、宇宙論や de Sitter 時空について、何度も議論して頂き、理解が深まりました。深く感謝致します。

修士 2 年の奥野静華氏には、共同研究を行う中、議論やプログラミングでとても助けられました。感謝致します。

また、日頃お世話になっている、研究室の皆様にもお礼申し上げます。

本研究の数値シミュレーションにおいては、京都大学基礎物理研究所計算機室のスーパーコンピュータ SR16000 と東京大学情報基盤センターのスーパーコンピュータ SR16000、FX10 を利用させて頂きました。こちらについても、厚く御礼申し上げます。

A　de Sitter 時空上の場の理論

非可換空間上のエンタングルメントエントロピーの研究の他に、曲がった空間である de Sitter 時空上の場の理論についても研究を行ってきた。参考の為に以下に簡単に述べる。

A.1　序論

近年の宇宙物理学における観測技術の発展は目覚ましい。我々の宇宙の大部分が物質ではなく、ダークエネルギーが占めるという事実が WMAP という衛星の宇宙背景放射の観測結果から得られている。ダークエネルギーは宇宙項 Λ とも呼ばれており、とても小さな正の値を持つ。この事は、我々の住む宇宙が de Sitter 空間である事を示す。また、宇宙の膨張する測度を決めるハッブル定数 H の 2 乗は、宇宙項となる。その宇宙項には、宇宙項の理論値が測定値に比べ１２０桁ほど大きいという問題があり、宇宙項問題と呼ばれている。宇宙項問題の解決法としては、宇宙項への量子効果により、宇宙項が小さな値を取る事が提案されてきた。

今日の宇宙項への量子補正を計算するには、de Sitter 時空上で量子論を計算する必要がある。この方法は in-in formalism、または Schwinger-Keldysh formalism と呼ばれる [46–51]。また、時間とともに広がる空間の性質より、超波長をもつばの数は、時間経過とともに増えていく。この事を原因とした、de Sitter 時空特有の赤外発散が量子補正となり、宇宙項を遮蔽する効果 (赤外遮蔽効果) に着目して、計算を行った。具体的には、我々は 2 次元時空上で、matter 場によるエネルギー運動量テンソルを計算した。これは、エネルギー運動量テンソルが宇宙項 Λ への量子補正と見なせるためである。

計算法の違いもあるが、計算する時空の違いより、massless の de Sitter 時空上のプロパゲータは de Sitter 不変性を保たない事は、一般的な理論と大きく異なる。そのため、de Sitter 対称性を保つ様に理論を考えるべきかどうか、という問いも提起されてきた [52–64]。この問いに対する議論も行われてきたが [66]、完全な決着には至っていない。

我々の重力と matter 場の結合するモデルは、2 次元 Liouville 理論に基づいている [71]。この Liouville 場は、計量を Weyl 変換する事で導く事が出来る。我々は Liouville 理論を 2 次元重力として扱い、matter 場の寄与が大きい極限を見た。

2 次元モデルを Liouville 理論に基づいて考えることは、文献 [74] の宇宙項への赤外遮蔽効果の研究に関連する。そこでは、計量の Weyl ファクターが主要な役割をする。同様の事は、4 次元においても試みられている [75–77]。2 次元においても、Liovulle 重力は特別な場合として考えられている [78]。このような機構が de Sitter 時空上でも働くならば、宇宙項問題に大きく影響すると予想される。[4]

[4] 文献 [70] では、ユニタリーでない time-like な Liouville 理論の宇宙項について議論している。

我々の研究では、matter 場の摂動効果に限定して、結果を見ている。具体的な例として、スカラー ϕ^4 理論を用い、de Sitter 時空上で計算を行った。エネルギー運動量テンソルへのループ補正は、massless 場 ϕ のプロパゲータによって計算される。このプロパゲータは de Sitter 対称性を破っている。従って、エネルギー運動量テンソルは量子補正として、赤外の対数発散 $\ln a(t)$ を持つ。我々の計算結果は、2 次元 de Sitter 時空において、λ^3 のオーダーで、Liouville 重力に対しては、赤外遮蔽効果を見る事が出来た。一方 4 次元で考えると、スカラー ϕ^4 理論は赤外遮蔽効果を持たない。これは、Liouville 重力による宇宙項の違いのためである。また、我々は n 次の理論における赤外発散の強さを発見した。この結果は摂動論の限りは 4 次元と等しくなった。

また、de Sitter 対称性については [81] に記述されている疑問がある。Sine-Gordon 理論の計算時に、ϕ^4 理論と同じく massless スカラー場のプロパゲータを用いると、de Sitter 対称性は破れる。一方で、伝統的な方法と異なり、時間依存性を持つ結合定数を用いる事によって、Sine-Gordon 理論の de Sitter 対称性を回復する様子が見られた。

de Sitter 対称性を破るプロパゲータを使う方法と、時間依存する結合定数を導入する事により、de Sitter 対称性を保つ方法の、どちらを使うべきなのかは、異なる原理より導かれなければならない。de Sitter 対称性を保つ理論に対しては、他の主要な理論と矛盾しない様に思える。この方法は限られた場合のみを考えたので、異なる次元についても考える必要がある。

de Sitter 対称性を保つという我々の予測は、$\lambda\phi^4$ 理論についても言える。古典的な赤外発散の相殺項を加える事によって、de Sitter 対称性を破る遮蔽効果を取り除く事は可能である。しかしながら、Sine-Gordon 理論と異なり、局所的な相殺項でしか対称性を保つ事を見つけられなかった。そのため、摂動論では、$\lambda\phi^4$ 理論の赤外発散効果は自然に消す事が出来ていない。

以下に本付録の流れを示す。

・A.2 節では、我々の宇宙を記述する de Sitter 時空の性質について述べた。Minkowski 時空との大きな違いである in-in formalism を用いると、プロパゲータの形がどのようになるかを説明している。

・A.3 節では、宇宙項 Λ への量子補正について説明している。アインシュタイン方程式を用いて、宇宙項と matter 場のエネルギー運動量テンソルの関係を示した。

・A.4 節では、Liouville 重力を導入した。また、Weyl 変換を用いる事で、Liouville 重力と matter 場が結合する項が現れる事を示している。

・A.5 節では、2 次元の de Sitter 時空上で、massless スカラー ϕ^4 理論による量子補正を計算した。

・A.6 節では、de Sitter 対称性を保つ理論が作れないか、議論を行った。例として Sine-Gordon 理論とスカラー ϕ^4 理論について、対称性を議論している。

・A.7 節では、本付録のまとめと展望を述べた。

A.2 de Sitter 時空上の赤外発散

研究においては、2 次元の de Sitter 時空で計算を行った。また、座標は Poincaré 座標を用いてい

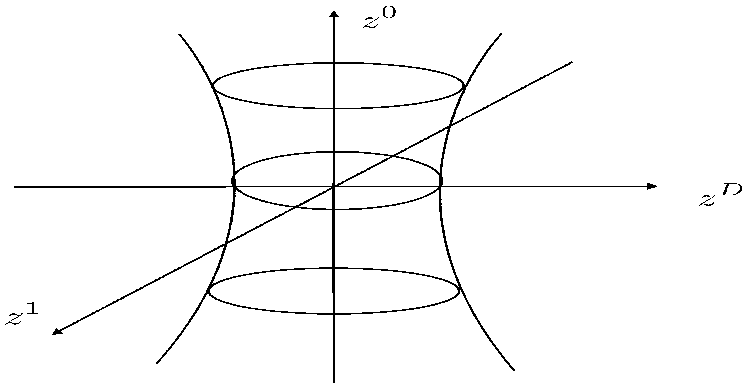


図 A.1: D+1 次元 Minkowski 空間の中の D 次元 de Sitter 空間

る。de Sitter 時空の計量は

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)d\vec{x} \cdot d\vec{x}, \tag{A.1}$$

である。ここで、a はハッブル定数 H で与えられ, 共形時間 η は以下の様に決まる。

$$a = e^{Ht} = -\frac{1}{H\eta},\ H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}. \tag{A.2}$$

このように η は物理的時間と t 以下の様に関係づいている。

$$\eta = -\frac{1}{H}e^{-Ht}, \tag{A.3}$$

t の変域より、$-\infty \leq \eta \leq 0$ である。強刑事間を用いて de Sitter 時空の計量を書くと、

$$ds^2 = a^2(\eta)(-d\eta^2 + d\vec{x} \cdot d\vec{x}). \tag{A.4}$$

となる。この座標形は de Sitter 時空の上半分をカバーしている。de Sitter 時空上では、massless 粒子の赤外発散の効果が Minkowski 理論と異なる事が知られている。なぜなら、赤外発散が寄与する長距離の効果が de Sitter 時空の曲率を受けて変わるためである。この違いは、運動量のループ計算によって発生する [82]。

ループ計算の際には、運動量を二つの領域に分けると便利である。地平線を利用すると、紫外領域 $|P| > H$ と赤外領域 $|P| < H$ に分ける。4 次元では、

$$\int d^3P = \int_{|P|>H} d^3P + \int_{|P|<H} d^3P. \tag{A.5}$$

と書く事が出来る。R と matter 場が結合していない massless スカラー場の理論について、場 ϕ は

$$\phi_{\vec{k}}^{D=4}(\eta) = \frac{H\eta}{\sqrt{2k}}\left(1 - \frac{i}{k\eta}\right)e^{-ik\eta}, \tag{A.6}$$

と、書く事が出来る。ここで、k は共形運動量 $P = k/a(\eta) = -kH\eta$ である。また、真空としては Bunch-Davies 真空を用いている [83]。(A.6) 式を赤外領域で積分すると、$P \to 0$ で対数発散がでてくる事が簡単に分かる。

我々は実際には $D = 2$ で計算を行った。この時、massless スカラー場 ϕ は

$$\phi_{\vec{k}}^{D=2}(\eta) = \frac{-i}{\sqrt{2k}}e^{-ik\eta}. \tag{A.7}$$

となる。ϕ の形は Minkowski 時空の場合と、同じになる。なぜなら、自由な massless 理論では共形な真空が de Sitter 時空の場合と等しいためである。真空のループは、以下の様に計算出来る。

$$\int_0^\infty dP\frac{1}{2P} = \int_H^\infty dP\frac{1}{2P} + \int_0^H dP\frac{1}{2P}, \tag{A.8}$$

ここで、物理的な運動量 $P = k/a(\eta)$ を用いている。(A.8) の場合も赤外領域において、対数発散を持つ事が分かる。

同様に、de Sitter 時空上のプロパゲータにも赤外発散が存在する。massless で、R と mass 場が結合していないスカラー場のプロパゲータは計算されている [84, 85]。これを用いて、$D - \omega$ 次元のプロパゲータは以下の様に書ける。

$$i\Delta(x,z) = \alpha\{\gamma(y) + \beta\ln(a(\eta)a(\eta_z))\}, \tag{A.9}$$

ここで、

$$y \equiv \frac{-(\eta-\eta_z)^2 + (\vec{x}-\vec{z})^2}{\eta\eta_z}, \tag{A.10}$$

$$\alpha = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{H^2}{4\pi}\right)^{-\omega}, \quad \beta = \frac{\Gamma(1-\omega)}{\Gamma(1-\frac{\omega}{2})}, \tag{A.11}$$

かつ

$$\begin{aligned}\gamma(y) = &-\frac{\Gamma(1-\frac{\omega}{2})}{\omega}\left(\frac{y}{4}\right)^{\frac{\omega}{2}} - \frac{\Gamma(2-\frac{\omega}{2})}{1+\frac{\omega}{2}}\left(\frac{y}{4}\right)^{1+\frac{\omega}{2}} + \beta\delta \\ &+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\Gamma(1-\omega+n)}{n\Gamma(1-\frac{\omega}{2}+n)} - \frac{\Gamma(2-\frac{\omega}{2}+n)}{(1+\frac{\omega}{2}+n)(n+1)!}\left(\frac{y}{4}\right)^{\frac{2+\omega}{2}}\right]\left(\frac{y}{4}\right)^n + \mathcal{O}(k_0^2),\end{aligned} \tag{A.12}$$

$$\delta \equiv -\pi\cot\left(\pi - \frac{\omega}{2}\pi\right) + C, \tag{A.13}$$

$$C \equiv \frac{1}{2}\ln\left(\frac{H}{k_0}\right) + \psi\left(\frac{1}{2} - \frac{\omega}{2}\right) - \psi\left(1 - \frac{\omega}{2}\right) + \psi(1-\omega) - \gamma, \tag{A.14}$$

である。ここで、赤外のカットオフ k_0 は共形運動量である。また、$\psi(x)$ はディガンマ関数、γ はオイラー定数である。de Sitter 時空上の距離は y を用いて書かれている。このプロパゲータ (A.9) は第一項目に対しては de$y$ だけで書ける事より、 Sitter 不変である [56,57,81]。一方で、2 項目は $a(\eta)$ によっており、de Sitter 不変でない。この効果は赤外の発散からきている。

また、時間発展をする時空上での計算を行うため、我々は in-in formalism と呼ばれる手法を用いた。時間に対して、$+$ の面と $-$ の面を考え、時間の経路を以下の様に考える。

$$\int_C d\eta = \int_{-\infty}^{0} d\eta_+ + \int_{0}^{-\infty} d\eta_-. \tag{A.15}$$

時間の面に対して $+$ と $-$ があるため、演算子 $\mathcal{O}(x)$ の期待値については、

$$\begin{aligned}\langle\Omega|\mathcal{O}(x)|\Omega\rangle &= \langle T\{\mathcal{O}(x)e^{-i\int_C H_{\rm int}d\eta}\}\rangle \\ &= \langle\tilde{T}\{e^{i\int_{\eta_i}^{0} H_{\rm int-}d\eta_-}\}T\{\mathcal{O}(x)e^{-i\int_{\eta_i}^{0} H_{\rm int+}d\eta_+}\}\rangle,\end{aligned} \tag{A.16}$$

と計算される。ここで、T と $\tilde{T}$ は時間順序積と逆時間順序積を表す。$|\Omega\rangle$ が元々は真空であったと考えているので、$\langle\mathcal{O}(x)\cdots\rangle$ については Wick の定理を使って計算が出来る。二つの時間面を考えているので、2 点間の距離は以下の 4 種類を考える事が出来る [84]。

$$\begin{aligned}y_{++}(x,x') &\equiv a(\eta)a(\eta')H^2[(\vec{x}-\vec{x}')^2 - (|\eta-\eta'| - ie)^2], \\ y_{+-}(x,x') &\equiv a(\eta)a(\eta')H^2[(\vec{x}-\vec{x}')^2 - (\eta-\eta' + ie)^2], \\ y_{-+}(x,x') &\equiv a(\eta)a(\eta')H^2[(\vec{x}-\vec{x}')^2 - (\eta-\eta' - ie)^2], \\ y_{--}(x,x') &\equiv a(\eta)a(\eta')H^2[(\vec{x}-\vec{x}')^2 - (|\eta-\eta'| + ie)^2],\end{aligned} \tag{A.17}$$

ここで、$y_{ab}(x,x')$ は各座標のある面を示している ($y(x_a, x'_b)$ $(a,b=\pm)$)。e はとても小さい整数である。これら 4 種類の距離をプロパゲータに代入する事が出来るので、de Sitter 時空上のプロパゲータは 4 種類存在する事となる。

$$\begin{aligned}i\Delta_{++}(y_{++}) &\equiv \langle T\{\phi(x_+)\phi(x'_+)\}\rangle, \\ i\Delta_{+-}(y_{+-}) &\equiv \langle \phi(x'_-)\phi(x_+)\rangle, \\ i\Delta_{-+}(y_{-+}) &\equiv \langle \phi(x_-)\phi(x'_+)\rangle, \\ i\Delta_{--}(y_{--}) &\equiv \langle \tilde{T}\{\phi(x_-)\phi(x'_-)\}\rangle.\end{aligned} \tag{A.18}$$

距離が短い極限 ($y \to 0$) である紫外極限に対して、プロパゲータ (A.9) の次元正則化を行っている。この時プロパゲータは $+$ と $-$ に関係なく

$$\lim_{x\to z} i\Delta(x,z) = \alpha\beta\left(2\ln(a(\eta)) + \frac{2}{\omega} + C + \gamma + \mathcal{O}(\omega)\right). \tag{A.19}$$

となる。

A.3 宇宙項 Λ への量子補正

Matter 場が存在する場合のアインシュタイン方程式は以下の様に、時空のリッチテンソル $R_{\mu\nu}$ と、matter のエネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ の関係を記述する。

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \tag{A.20}$$

ここで、R はスカラー曲率、$\kappa = 8\pi G$ で G はニュートン定数、Λ は宇宙項である。真空状態では $T_{\mu\nu}$ は軽量に比例しており、$T_{\mu\nu}$ を移行する事によって、(A.20) は以下の様に書き換えられる。

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda_{\rm eff} g_{\mu\nu} = 0, \tag{A.21}$$

ここで、

$$\Lambda_{\rm eff} = \Lambda - \frac{\kappa}{D}T_\rho{}^\rho. \tag{A.22}$$

以上より、$T_{\mu\nu}$ は宇宙項 Λ への量子補正と見る事が出来る。有効な宇宙項 $\Lambda_{\rm eff}$ がこのような形で書けると、宇宙項には $T_{\mu\nu}$ を通して、de Sitter 時空特有の赤外発散の寄与が存在すると考えられる。この効果を調べ、宇宙項問題の解決の糸口にしたいと考えている。

A.4 Liouville 重力と matter の結合項

2 次元において、重力場の作用である、アインシュタイン-ヒルベルト作用は以下の様に書ける。

$$S[g_{\mu\nu}] = \int d^2x\sqrt{-g}\frac{1}{2\kappa}\left(R - 2\Lambda\right), \tag{A.23}$$

2 次元重力は自由度を持たない。一方で量子論で考えると、ワイル変換を行うと、Φ という場が計量からでてくる。

$$g_{\mu\nu} = e^{2\Phi}\hat{g}_{\mu\nu} \tag{A.24}$$

この時、重力は自由度を持ち、2 次元の重力は Liouville 場の理論によって書き表される。ここで、$\hat{g}_{\mu\nu}$ は任意にとれる、基準を表す計量である。この任意性より、Liouville 重力の Weyl 対称性が自然と保証される。(例えば、$\hat{g}_{\mu\nu} \to e^{2\sigma}\hat{g}_{\mu\nu}$ かつ $\Phi \to \Phi - \sigma$ である。)

簡単に Liouville 理論について述べる。まず、2 次元重力場 $g_{\mu\nu}$ と matter 場 X がカップリングしている作用を考える。この作用の分配関数は

$$S_{\rm 2D}[g_{\mu\nu}, X] = \int d^2x\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2\kappa}(R - 2\Lambda)\right) + S_{\rm matter}[g_{\mu\nu}, X], \tag{A.25}$$

$$Z = \int DXDg_{\mu\nu} e^{iS_{2\mathrm{D}}[g_{\mu\nu},X]} \ . \tag{A.26}$$

と与えられる。2 次元では、重力効果を Weyl 変換 $g_{\mu\nu} = e^{2\Phi}\hat{g}_{\mu\nu}$ によって書き表す事が出来る。この共形ゲージにおいては、$g_{\mu\nu}$ に対する経路積分が Liouville 場 Φ に対する経路積分に置き換わっている。また、トポロジーの効果より、$\frac{R}{2\kappa}$ の効果はなくなる。

我々の目標は宇宙項への量子効果を調べる事である。そのため、主な興味は重力と matter の赤外領域での量子効果を計算する事である。2 次元の宇宙項は二つの顔を持つ。Liouville 理論のポテンシャルの係数である事と、エネルギー運動量テンソルのトレースである事である。次の式から初めて考える。

$$\begin{aligned} &S_{L+\mathrm{mat}}[\Phi,\phi] \\ &= -\int d^2x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{4\pi b^2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi + \frac{Q}{4\pi b}R\Phi + \frac{\Lambda}{\kappa} + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + V(\phi)\right]. \end{aligned} \tag{A.27}$$

計量の Weyl 変換を行った後は、以下の式を得る。

$$\begin{aligned} &S_{L+\mathrm{mat}}[\Phi,\phi] \\ &= -\int d^2x\sqrt{-\hat{g}}\left[\frac{1}{4\pi b^2}\hat{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi + \frac{Q}{4\pi b}\hat{R}\Phi + \frac{\Lambda}{\kappa}e^{2\Phi} + \frac{1}{2}\hat{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + e^{2\Phi}V(\phi)\right]. \end{aligned} \tag{A.28}$$

Φ は Liouville 場、ϕ は matter 場である。5 項目は 2 次元 Liouville 重力項と、matter 場の相互作用を示している。

アインシュタイン重力の場合では、有効な宇宙項は

$$\begin{aligned} \Lambda_{\mathrm{eff}} &= \Lambda + \kappa\langle V(\phi)\rangle \\ &= \Lambda - \frac{\kappa}{2}\langle T_\rho{}^\rho\rangle \ . \end{aligned} \tag{A.29}$$

となる。ここで、Liouville 理論の方程式は以下の形を取る。

$$-\frac{1}{2\pi b^2}\hat{\Box}\Phi + \frac{Q}{4\pi b}\hat{R} = -2\Lambda_{\mathrm{eff}}\kappa^{-1}e^{2\Phi} \ , \tag{A.30}$$

ここで、Λ_{eff} は (A.29) の様に、matter 場の赤外領域における de Sitter 対称性の破れの効果を受ける。この場合は、Liouville 場がただの定数ではない。準古典的な極限で物理的な計量 $g_{\mu\nu}$ は de Sitter 対称性を持たない。この時、宇宙項に対する遮蔽効果は Liouville 重力に対して、高次元の Einstein 重力と同じである。

ただ、Liouville 重力と Einstein 重力の間には、違いも存在する。Einstein 重力では、空間が de Sitter 解を持つ時は宇宙項が正となる。正の宇宙項は宇宙の膨張を意味している。しかしながら、Liouville

重力で考えると、宇宙項と空間の関係が逆となる。もし、宇宙が負のエネルギーを持っていたとしたら、Liouville 方程式は de Sitter 解を持つ。この違いは、準安定真空での、非摂動 Liovulle 重力で面白い結果を与える [90, 91]。我々の研究では、符号の違いから、massless スカラー場の寄与の遮蔽と反遮蔽を入れ替えている。

A.5　2 次元 matter 場による量子補正

我々は具体例として、2 次元の massless スカラー場の $\lambda\phi^4$ 理論での量子効果を計算した。そのため、以下のラグランジアンを用いる。

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\sqrt{-g} - \frac{1}{4!}\lambda\phi^4\sqrt{-g} + \Delta\mathcal{L}, \tag{A.31}$$

ここで、$\Delta\mathcal{L}$ は相殺項を含む。

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{L} = &-\frac{1}{2}\delta Z g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\sqrt{-g} - \frac{1}{4!}\delta\lambda\phi^4\sqrt{-g} - \frac{1}{2}\delta m^2\phi^2\sqrt{-g} \\ &+\delta\xi(R - D(D-1)H^2)\phi^2\sqrt{-g} - \frac{\delta\Lambda}{8\pi G}\sqrt{-g}.\end{aligned} \tag{A.32}$$

エネルギー運動量テンソルは

$$\begin{aligned}T^{\rm mat}_{\mu\nu}(x) = &(1+\delta Z)\left(\delta^\rho{}_\mu\delta^\sigma{}_\nu - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\rho\sigma}\right)\partial_\rho\phi\partial_\sigma\phi - g_{\mu\nu}\left(\frac{\lambda+\delta\lambda}{4!}\phi^4 + \frac{1}{2}\delta m^2\phi^2 + \frac{\delta\Lambda}{8\pi G}\right) \\ &-2\delta\xi\left[g_{\mu\nu}((D-1)H^2\phi^2 + (\phi^2)^{;\rho}{}_\rho) - (\phi^2)_{;\mu\nu}\right],\end{aligned} \tag{A.33}$$

と与えられる。ここで、共形微分 ; は de Sitter 空間上での微分を表している（$g_{\mu\nu} = a(\eta)^2\eta_{\mu\nu}$）。この式の第一項は運動項、第 2、3、4 項はポテンシャル項の喜代を示す。ポテンシャルの中の最終項 $\delta\xi$ は共形な相殺項である。

ポテンシャル項に由来する、エネルギー運動量テンソルはこの様になる。

$$\begin{aligned}T^{\rm mat}_{\mu\nu}(x)_{\rm pot.} = &-g_{\mu\nu}\left(\frac{\lambda+\delta\lambda}{4!}\phi^4 + \frac{1}{2}\delta m^2\phi^2 + \frac{\delta\Lambda}{8\pi G}\right) \\ &-2\delta\xi\left[g_{\mu\nu}((D-1)H^2\phi^2 + (\phi^2)^{;\rho}{}_\rho) - (\phi^2)_{;\mu\nu}\right].\end{aligned} \tag{A.34}$$

この期待値を求めるために、我々は時間発展演算子を展開する。

$$\langle\Omega|T^{\rm mat}_{\mu\nu}(x)|\Omega\rangle \simeq \langle T\{T^{\rm mat}_{\mu\nu}(x)\left(1 + i\int_C\sqrt{-g}d^2z\mathcal{L}_{\rm int}\right)\}\rangle, \tag{A.35}$$

ここで、$\mathcal{L}_{\rm int}$ は (A.31) より λ の項を作る。これは、摂動展開の第一次の効果である。展開を考えると、エネルギー運動量テンソルの寄与には $\lambda^2, \lambda^3, \cdots$ の効果が存在する。

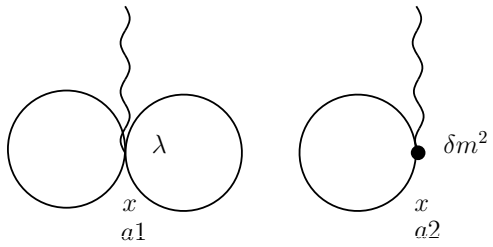


図 A.2: $\mathcal{O}(\lambda)$ の寄与

最初のオーダーである λ に対しては、エネルギー運動量テンソルの期待値 (A.34) は、自由なスカラー場の真空から計算する事が出来る。

(A.34) より、摂動展開を行うと、以下の様になる。

$$
\begin{aligned}
&-g_{\mu\nu}\langle\Omega|\frac{\lambda}{4!}\phi^4(x)+\frac{1}{2}\delta m^2\phi^2(x)|\Omega\rangle \\
&\quad=-g_{\mu\nu}\left[\frac{\lambda}{4!}\langle\phi^4(x)\rangle+\frac{1}{2}\delta m^2\langle\phi^2(x)\rangle\right. \\
&\qquad+i\left(\frac{\lambda}{4!}\right)^2\int d^2z\sqrt{-g}\langle T\{\phi^4(x)\phi^4(z)\}\rangle-i\left(\frac{\lambda}{4!}\right)^2\int d^2z'\sqrt{-g}\langle\phi^4(z')\phi^4(x)\rangle \\
&\qquad+i\frac{\lambda}{4!}\frac{\delta m^2}{2}\int d^2z\sqrt{-g}\langle T\{\phi^2(x)\phi^4(z)\}\rangle-i\frac{\lambda}{4!}\frac{\delta m^2}{2}\int d^2z'\sqrt{-g}\langle\phi^4(z')\phi^2(x)\rangle \\
&\qquad+i\frac{\lambda}{4!}\frac{\delta m^2}{2}\int d^2z\sqrt{-g}\langle T\{\phi^4(x)\phi^2(z)\}\rangle-i\frac{\lambda}{4!}\frac{\delta m^2}{2}\int d^2z'\sqrt{-g}\langle\phi^2(z')\phi^4(x)\rangle \\
&\qquad+i\left(\frac{\delta m^2}{2}\right)^2\int d^2z\sqrt{-g}\langle T\{\phi^2(x)\phi^2(z)\}\rangle-i\left(\frac{\delta m^2}{2}\right)^2\int d^2z'\sqrt{-g}\langle\phi^2(z')\phi^2(x)\rangle \\
&\qquad\left.+\mathcal{O}(\lambda^3)\right]. \qquad\qquad (A.36)
\end{aligned}
$$

ここで、気をつける事は in-in formalism を使って計算する事である。つまり、頂点は $+$ の頂点と $-$ の頂点の 2 種類があると考えられる。今は z は $+$ の頂点、z' は $-$ の頂点として考えている。また、測定するエネルギー運動量テンソルの点 x は $+$ 城野店として暑かって計算した。

さて、(A.36) の最初の 2 つの項のオーダーは λ である。この二つの項に対応するダイアグラムは図 (A.2) の $a1$ と $a2$ である。最初に質量への相殺項 δm^2 を考える。これは、時間 $\eta_i=-1/H$ で質量 m が 0 である事から繰り込む事が出来る。繰り込みの条件は [84, 92] と同じである。

1-loop のダイアグラムは図 (A.3) で記述されている。質量については、

$$
-iM^2_{1-\mathrm{loop}}(x,x')=-i\left[\frac{\lambda}{2}\Delta(x,x)+\delta m^2\right]\delta^2(x-x'). \qquad (A.37)
$$

となる。(A.19) を (A.37) に代入すると、

$$
M^2_{1-\mathrm{loop}}(x,x')=\left[\frac{\lambda}{2}\alpha\beta\{2\ln(a(\eta))+\frac{2}{\omega}+A'\}+\delta m^2\right]\delta^2(x-x'), \qquad (A.38)
$$

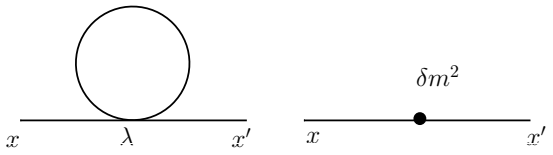


図 A.3: 1-loop の質量への補正 (δm)

となる。ここで、$A' = C - \gamma$ である。質量に対する繰り込みの条件より、

$$\delta m^2 = -\frac{\lambda}{2}\alpha\beta\left(\frac{2}{\omega} + A'\right) + O(\lambda^2). \tag{A.39}$$

となる必要がある。以上より、

$$M^2_{1-\text{loop}}(x, x') = \frac{\lambda}{4\pi}\ln(a(\eta))\delta^2(x - x'). \tag{A.40}$$

紫外領域の発散をエネルギー運動量テンソルから取り除くために、宇宙項に対する相殺項 $\delta\Lambda$ を加える必要がある。図 (A.2) のダイアグラム $a1$ と $a2$ に質量の相殺項 (A.39) を導入する事により、

$$\begin{aligned}\frac{\lambda}{4!}\langle\phi^4(x)\rangle + \frac{1}{2}\delta m^2\langle\phi^2(x)\rangle &= \frac{\lambda}{4!}\cdot 3\Delta^2_{++}(x,x) + \frac{1}{2}\delta m^2\Delta_{++}(x,x)\\ &= \frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{4\pi}\left(\frac{H^2}{4\pi}\right)^{\frac{\omega}{2}}\frac{\Gamma(1-\omega)}{\Gamma(1-\omega/2)}\right)^2\\ &\quad\times\left(-\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\omega}A' + \ln^2 a(\eta) - \frac{A'^2}{4}\right).\end{aligned} \tag{A.41}$$

となる。それに従って $\delta\Lambda$ は条件

$$-g_{\mu\nu}\left[\frac{\lambda}{4!}\langle\phi^4(x)\rangle + \frac{1}{2}\delta m^2\langle\phi^2(x)\rangle\right] - \frac{\delta\Lambda}{8\pi G}g_{\mu\nu} = (\text{finite}). \tag{A.42}$$

によって決まる。それ故に

$$\frac{\delta\Lambda}{8\pi G} = \frac{\lambda}{32\pi^2}\left(\frac{H^2}{4\pi}\right)^{-\omega}\frac{\Gamma^2(1-\omega)}{\Gamma^2(1-\omega/2)}\left[\frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega}A'\right] + \frac{\delta\Lambda_{\text{fin}}}{8\pi G}, \tag{A.43}$$

となる。ここで $\delta\Lambda_{\text{fin}}$ は、相殺項の有限値部分を示している。以上より、$\mathcal{O}(\lambda)$ のエネルギー運動量テンソルへの寄与は

$$\langle T^{\text{mat}}_{\mu\nu}\rangle_{\text{pot. }\mathcal{O}(\lambda)} = -g_{\mu\nu}\frac{\lambda}{32\pi^2}\ln^2 a(\eta). \tag{A.44}$$

となる。

宇宙項の繰り込みを $\mathcal{O}(\lambda^2)$ で計算するために、3-loop ダイアグラムを計算する必要がある。結合定数 $\delta\lambda$ への相殺項と共形結合 $\delta\xi$ は我々の計算にはでてこない。1-loop 補正では、$\lambda\phi^4$ の相互作用場

は紫外発散を持たず、また、紫外発散と赤外発散が混ざる項 $\omega^{-1}\cdot\ln a(\eta)$ を持たない。このような項は $\delta\xi$ によって打ち消されている [84]。$\mathcal{O}(\lambda)$ の場合と同様に計算を行うと、エネルギー運動量テンソルは

$$\langle T^{\rm mat}_{\mu\nu}\rangle_{\text{pot. }\mathcal{O}(\lambda^2)} \sim -g_{\mu\nu}\frac{1}{8\pi}\frac{\lambda^2}{(4\pi)^2H^2}\ln^4 a(\eta). \tag{A.45}$$

となる。λ/H^2 での展開は無次元量となり、我々の見たい赤外領域においては長さ $\ln a(\eta) < H\lambda^{-1/2}$ の範囲を見ている。

(A.44) と (A.45) より、我々が最終的に見たい $\mathcal{O}(\lambda^2)$ で、量子効果を含めた宇宙項は

$$\begin{aligned}\Lambda_{\rm eff} &= \Lambda - \frac{\kappa}{2}\langle T^{{\rm mat}\,\rho}_{\ \ \rho}\rangle \\ &\sim \Lambda + (\text{Weyl anomaly}) + \frac{\kappa\lambda}{32\pi^2}\ln^2 a(\eta) + \frac{1}{8\pi}\frac{\kappa\lambda^2}{(4\pi)^2H^2}\ln^4 a(\eta),\end{aligned} \tag{A.46}$$

となる。ここで、Weyl アノマリーは $\langle T^{{\rm mat}\,\rho}_{\ \ \rho}\rangle = R/(24\pi)$ [93] である。この有効な宇宙項は時間依存性を持っている。また、時間経過とともに大きくなる。そのため、宇宙項の赤外遮蔽効果を見る事は出来ていない。

一方で、Liouville 重力の事を思い出すと、de Sitter 時空を解として持つ場合、宇宙項が負の値を持っている。それ故に Liouville 重力に対しては宇宙項の絶対値を小さくする方向に量子効果が働く。この事は、2 次元の massless な $\lambda\phi^4$ 理論で赤外遮蔽効果があると考えられる。既出の結果と比較すると、[82] では 4 次元の摂動論で反遮蔽効果が見て取られている。

A.6 de Sitter 対称性の回復

de Sitter 時空上で $\lambda\phi^4$ 理論のポテンシャルと Sine-Gordon のポテンシャルが同時に存在する場合について計算する。

$$S_{\rm SG} = \frac{1}{2}\int d\eta dx\left(\partial_\eta\phi\partial_\eta\phi - \partial_x\phi\partial_x\phi - \frac{\lambda}{(H\eta)^2}\cos(\beta\phi)\right)\ . \tag{A.47}$$

Sine-Gordon 項 $\lambda\cos(\beta\phi)$ を $\lambda\phi^4$ と同じく、自由なスカラー場の理論からの摂動展開で考えてみる。

λ についての摂動論において、赤外のカットオフを加えた繰り込まれたプロパゲータは

$$G_{12} = \langle\phi(\eta_1,x_1)\phi(\eta_2,x_2)\rangle = -\frac{1}{4\pi}\ln\left(\frac{-(\eta_1-\eta_2)^2+(x_1-x_2)^2}{H^{-2}}\right)\ , \tag{A.48}$$

と書ける。$\lambda\phi^4$ 理論と同じく、de Sitter 対称性は Sine-Gordon において破れている [81]。ここから de Sitter 対称性を得る事を考える。de Sitter 対称性を保つには理論が de Sitter 不変距離

$$y = \frac{-(\eta_1-\eta_2)^2+(x_1-x_2)^2}{\eta_1\eta_2}\ , \tag{A.49}$$

で書き表される必要がある。しかし、単純にプロパゲータを

$$\mathcal{G}_{12}^{\rm inv} = \langle \phi(\eta_1, x_1)\phi(\eta_2, x_2)\rangle = -\frac{1}{4\pi}\ln\left(\frac{-(\eta_1-\eta_2)^2+(x_1-x_2)^2}{\eta_1\eta_2}\right) \tag{A.50}$$

と置き換えた所で、質量 0 の運動方程式を満たさない ($\Box\phi = 0$)

しかしながら、我々は以下の可能性を考えた。結合定数が時間依存性を持つ様な場合を考える。

$$S_{\rm SG}^{\rm modified} = \frac{1}{2}\int d\eta dx \left(\partial_\eta\phi\partial_\eta\phi - \partial_x\phi\partial_x\phi - \frac{\lambda(H\eta)^{\beta^2/4\pi}}{(H\eta)^2}\cos(\beta\phi)\right) , \tag{A.51}$$

このとき、相関関数の de Sitter 対称性が回復している。時間依存する結合定数は、質量 0 の理論のプロパゲータに現れる赤外発散を打ち消す。

この視点から $\lambda\phi^4$ 理論について、再度考える。問題は Sine-Gordon 理論の様に de Sitter 対称性の破れを取り除く事が出来ないかという事である。宇宙項に関する限りは、時間依存する赤外発散の相殺項を加える事で、de Sitter 対称性の破れを取り除く事が出来る。

$$-\delta\Lambda(\eta) = \frac{\kappa}{2}\langle T_\rho{}^\rho\rangle = \frac{\kappa\lambda}{32\pi^2}\ln^2 a(\eta) + \frac{1}{8\pi}\frac{\kappa\lambda^2}{(4\pi)^2H^2}\ln^4 a(\eta) + \cdots \tag{A.52}$$

しかしながら、この効果は限定的な物である。一般には、de Sitter 不変なプロパゲータを作り、de Sitter 対称性を破る項を体系的に取り除く事が望ましい。この場合であれば、運動方程式を犠牲にしても、de Sitter 対称性を保つ事を優先するモチベーションとなる。

A.7 まとめと展望

この研究では、低次の de Sitter 時空の赤外発散の効果を見るために、2 次元 de Sitter 時空上での重力と matter 場の結合するモデルを作った。我々の作ったモデル (A.28) は Liouville 場と matter 場が空間のスカラー曲率 R と結合しておらず、Liouville 場は計量から導かれる。我々の作ったモデルの特徴は、Liouville 場の方程式より、宇宙項が負になる事である。この宇宙項の性質は、2 次元以上のアインシュタイン重力とは逆の結果を示している。具体的な matter 場として、massless なスカラー ϕ^4 理論と Liouville 重力が結合しているモデルを用いた。de Sitter 時空上では、massless スカラー場のプロパゲータは赤外発散を持っている。In-in formalism に従い、我々はエネルギー運動量テンソルの期待値を $\mathcal{O}(\lambda^2)$ で行った。計算結果 (A.45) は、時間依存する対数の形の赤外発散を持ち、Liouville 重力が時間発展とともに小さな値となる、赤外遮蔽効果を示した。この事は、3 次元以上の宇宙項と比べる必要がある。しかし、宇宙項の符号が 2 次元と 3 次元以上で異なるため、$\lambda\phi^4$ 理論は遮蔽効果を持っていない。

また、このモデルに対しては、matter 場が Liouville 重力場にどのような影響を与えるのかを、計算したいと考えている。

計算結果を既存の研究と比べると、2 次元における赤外発散の強さは、4 次元 [84] と同じ事が計算から分かった。平坦な時空である Minkowski 時空上では、4 次元に比べ、2 次元における赤外発散の発散の度合いは強くなる。一方 de Sitter 時空上では、我々が着目した、対数で表される赤外発散の効果 $\ln a$ は、2 次元と 4 次元で変わらない。更に、次元が低い事が原因で、de Sitter 時空上の赤外発散の度合いが強くなる様子は、エネルギー運動量テンソルの期待値の計算の中では観測出来なかった。また、この計算に用いたプロパゲータは対数の形の赤外発散を持っており、発散の強さは 2 次元と 4 次元で等しい。これらの理由についても更なる議論を行いたいと考えている。

最後に de Sitter 対称性を保つ理論を考えた。massless スカラー場の ϕ^4 理論について計算を行ったが、de Sitter 不変距離 y で全ての項を書く事は出来ず、de Sitter 対称性を保つ事が出来なかった。しかし、Sine-Gordon 理論については、時間依存する結合定数を導入する事で、de Sitter 不変に取り扱う事が出来た。なぜ、Sine-Gordon 理論では可能で ϕ^4 理論では不可能なのか、理由を求めたいと考えている。

B　計算法 ($\lambda = 0$)

この付録においては、自由な場の理論の場合、どのように $F[x, \alpha = 2]$ を計算したかを記述する。

今、レプリカの数は 2 個であるので、Φ は Φ_1 と $\Phi/2$ によって成り立つと考える。系全体に対し、時間方向の長さを β から 2β に延長し、$2M$ 個に分ける。すると、Φ_1 と $\Phi/2$ に対しては、時間方向の長さは β で時間方向の分割数は M となる。時間方向の格子間隔 a は $a = \frac{\beta}{M}$ である。

Φ_1 と Φ_2 を一本化し、$\Phi(n)$ $(n = 1, 2, \cdots, 2M)$ として計算する。$n = 1, \cdots, M$ に対しては $\Phi(n) = \Phi_1(na)$ であり、$n = M+1, \cdots, 2M$ に対しては $\Phi(n) = \Phi_2((n-M)a)$ となる。このとき $\lambda = 0$ での離散化した作用は、以下の様に書ける。

$$
\begin{aligned}
S_{NC} = \frac{a}{2}\Bigg[& \sum_{m+m' \le 2j-u} \left\{ \sum_{n=1}^{M-1} \left| \frac{\Phi_{mm'}(n+1) - \Phi_{mm'}(n)}{a} \right|^2 + \left| \frac{\Phi_{mm'}(1) - \Phi_{mm'}(M)}{a} \right|^2 \right. \\
& \left. + \sum_{n=M+1}^{2M-1} \left| \frac{\Phi_{mm'}(n+1) - \Phi_{mm'}(n)}{a} \right|^2 + \left| \frac{\Phi_{mm'}(M+1) - \Phi_{mm'}(2M)}{a} \right|^2 \right\} \\
& + \sum_{m+m' > 2j-u} \left\{ \sum_{n=1}^{2M-1} \left| \frac{\Phi_{mm'}(n+1) - \Phi_{mm'}(n)}{a} \right|^2 + \left| \frac{\Phi_{mm'}(1) - \Phi_{mm'}(2M)}{a} \right|^2 \right\} \\
& + \sum_{mm'} \sum_{n=1}^{2M} \left\{ \Phi_{mm'}(n) \left[L_i, [L_i, \Phi(n)] \right]_{m'm} + m^2 |\Phi_{mm'}(n)|^2 \right\} \Bigg] \ . \qquad \text{(B.1)}
\end{aligned}
$$

ここで、計算の為に行列 $T_{nij,mkl}$ を導入する。定義は以下の式で与えられる。

$$
S_{NC} = \sum_{n,l,m_1,m_2,m_3,m_4} \Phi^*_{m_1 m_2}(n) T_{n m_1 m_2, l m_3 m_4} \Phi_{m_3 m_4}(l) \ . \qquad \text{(B.2)}
$$

行列 T を (B.1) から読み取り、行列式を計算した。そこから、以下の様に自由エネルギーを計算した。

$$
F[x, \alpha = 2] = \frac{1}{2} \log \det T + \text{const.} \ . \qquad \text{(B.3)}
$$

ここで右辺の定数が存在するが、実際の計算量は差を取る為、寄与しない。

C　誤差計算（ジャックナイフ法）

我々はコンピュータシミュレーションを行い、エンタングルメントエントロピーを計算した。このエンタングルメントエントロピーの誤差の計算にはジャックナイフ法を用いた [40]。

一般的な誤差は、平均値と統計誤差を用いた誤差伝播の式によって計算される。

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \mathcal{O}_i \ , \tag{C.1}$$

$$\delta\langle \mathcal{O} \rangle = \sqrt{\frac{\langle (\mathcal{O} - \langle \mathcal{O} \rangle)^2 \rangle}{N-1}} = \sqrt{\frac{\langle \mathcal{O}^2 \rangle - \langle \mathcal{O} \rangle^2}{N-1}} \ , \tag{C.2}$$

$$\delta\langle f(\{\mathcal{O}_a\}) \equiv \sum_a |\langle \frac{\partial f}{\partial \mathcal{O}_a} \rangle \delta\langle \mathcal{O}_a \rangle| \ . \tag{C.3}$$

ここで $\mathcal{O}_a$ は f を決める為に必要な物理量の集まりであり、f は $\mathcal{O}_a$ の関数である。

今回我々が計算したエンタングルメントエントロピーは測定された値同士に相関があり、一般的な誤差伝播の計算では、誤差の一部が相殺されてしまい、誤差を小さく見積もってしまう。この欠点を補う誤差評価の方法がジャックナイフ法である。得られたデータを、ある大きさのまとまりに分け、そのまとまり間の相関を見る事で、実際に独立したデータの数と、真の誤差が計算出来る。

まず、全データを大きさ n に分ける。このデータの大きさは bin-size と呼ばれている。例えば $n = 3$、データを $A(i)(0 \leq x \leq N)$ の際は、一つ目のビンには $A(1)$ から $A(3)$ が該当し、二つ目のビンには $A(4)$ から $A(6)$ が該当する。つまり、全データは $N_n = N/n$ 個のビンに分けられる。 1 つのビンのデータに対する添字の集合を B_b とし、そのビンのデータを除いた物で平均を定義する。

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{N-n} \sum_{k \notin B_b} \mathcal{O}_k \ . \tag{C.4}$$

この平均を用いて、物理量 f の平均と誤差を求める。

$$\langle f(\mathcal{O}) \rangle = \frac{1}{N_n} \sum_{i=1}^{N_n} f(\langle \mathcal{O}_b \rangle) \ . \tag{C.5}$$

$$\delta\langle f(\mathcal{O}) \rangle = \sqrt{(N_n - 1)\{\langle f(\mathcal{O})^2 \rangle - \langle f(\mathcal{O}) \rangle^2\}} \ . \tag{C.6}$$

この方法が bin-size n の場合のジャックナイフ法で導いた誤差である。実際に物理量に用いる際は、n を増加させて、$\delta\langle f(\mathcal{O}) \rangle$ が一定になる n の値を求める。そして、求めた n の時の N_n が、独立なデータの数を表す。また、相関しあう物理量を取り除いて計算するため、$\delta\langle f(\mathcal{O}) \rangle$ は物理量の真の誤差で

ある。ただし、本論文の場合は $f(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$ 場合を扱う事に相当するので、このような相関はそもそも存在しない。ここではむしろ、ジャックナイフ法のもう一つの側面、すなわち、自己相関を取り入れた誤差を与えるという特性を利用する。(C.6) にある、ジャックナイフ誤差を bin-size の関数と見た時、bin-size を大きくしていくと、一般に誤差が一定になる傾向がある。この一定値が自己相関を取り入れた誤差と見なせ、誤差が一定になり始める bin-size の大きさが自己相関の大きさと見なせるのである。

一般的に、$\delta\langle f(\mathcal{O})\rangle$ は bin-size$n$ の増加とともに大きくなる。また、(C.6) より、データ数を 2 倍にすると、誤差は $\sqrt{2}$ 倍となる性質を持つ。そのため、十分多くのデータを計算する必要がある事が分かる。

D　補間計算（シンプソン法）

近似法には一次曲線を用いる台形法の他に２次曲線を用いるシンプソン法がある。台形法に比べ誤差が小さくなるシンプソン法を我々の計算では用いた。

図 (D.1) の様に、３点を用いて、1 区間の面積を求める為、必ず $2N+1$ 個の点が必要となる。

具体的に区間の中点が x_i となる様な面積 S_i を求める事を考える。今、３点 x_{i-1}, x_i, x_{i+1} を通る関数を $y = px^2 + qx + r$ と置く。この区間の面積を、積分で求める事を考える。各点 x の間の間隔は h である。

$$
\begin{aligned}
S &= \int_{x-1}^{x+1} [px^2 + qx + r]dx \\
&= \left[\frac{1}{3}px^3 + \frac{1}{2}qx^2 + rx\right]_{x_i-1}^{x_i+1} \\
&= \frac{1}{3}P(x_i+h)^3 + \frac{1}{2}q(x_i+h)^2 + r(x_i+h) \\
&\quad - \left\{\frac{1}{3}P(x_i-h)^3 + \frac{1}{2}q(x_i-h)^2 + r(x_i-h)\right\} \\
&= \frac{1}{3}p\left\{x_i^3 + 3x_i^2h + 3x_ih^2 + h^3 - x_i^3 + 3x_i^2h - 3x_ih^2 + h^3\right\} \\
&\quad \frac{1}{2}q\left\{x_i^2 + 2x_i^h + h^2 - x_i^2 + 2x_i^2h - h^2\right\} \\
&\quad r\left\{x_i^+h - x_i + h\right\} \\
&= \frac{1}{p}(6x_i^2h + 2h^3) + \frac{1}{2}(2x_ih) + 2rh \\
&= \frac{h}{3}\left\{6px_i^2 + 6qx_i + 2ph^2 + 6r\right\} \qquad \text{(D.1)}
\end{aligned}
$$

また、この曲線は p_{i-1}, p_i, p_{i+1} の３点を通るので、y で書き直す事を考える。

$$y_{i+1} = p(x_i+h)^2 + q(x_i+h) + r, \qquad \text{(D.2)}$$

$$y_i = px_i^2 + qx_i + r, \qquad \text{(D.3)}$$

$$y_{i-1} = p(x_i-h)^2 + q(x_i-h) + r. \qquad \text{(D.4)}$$

(D.2)、(D.3)、(D.4) を用いて () を書き換えられないか考える。定数 C_{i+1}, C_i, C_{i-1} を (D.2)、(D.3)、(D.4) に掛け、各 x の次数で比較すると、以下の式が得られる。

$$C_{i+1}p + C_ip + C_{i-1}p = 2hp \qquad \text{(D.5)}$$

$$2C_{i+1}ph + C_{i+1}q + C_iq - 2C_{i-1}ph + C_{i-1}q = 2hq \qquad \text{(D.6)}$$

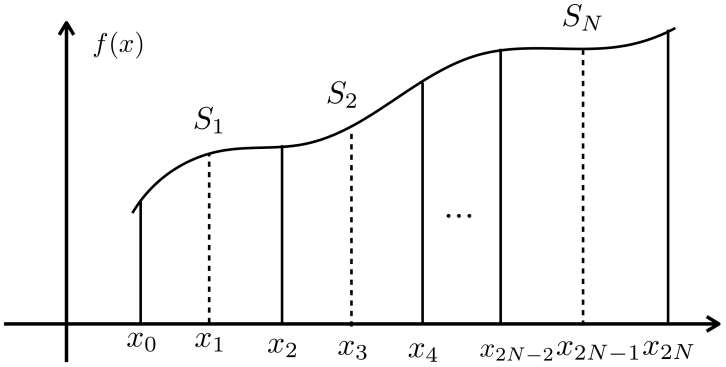


図 D.1: A and B

$$C_{i+1}ph^2 + C_{i+1}qh + C_{i+1}r + C_ir + C_{i-1}ph^2 - C_{i-1}qh + C_{i-1}r = \frac{2}{3}ph^3 + 2rh. \tag{D.7}$$

この連立方程式を解くと、$C_{i+1} = h/3, C_i = 4h/3, C_{i-1}h/3$ が求められる。よって S_i の面積は以下の様に書き表される。

$$S = \frac{h}{3}\left(y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1}\right) \tag{D.8}$$

この式はシンプソンの公式と呼ばれる。計算時に各点 x の間隔が等しい（今は h）事を用いる事に注意する。つまり、この公式を用いる際は偶数個の等分割が必要となる。

S_i が求まった為、全体の面積 S は S_i の和で与えられる。

$$\begin{aligned} S &= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \cdots + \frac{h}{3}(y_{2N-2} + 4y_{2N-1} + y_{2N}) \\ &= \frac{h}{3}\left[y_0 + 4\sum_{i=1}^{N} y_{2i-1} + 2\sum_{i=1}^{N-1} y_{2i} + y_{2N}\right]. \end{aligned} \tag{D.9}$$

今回は離散的な積分の為に、このシンプソン法 (D.9) を用いる。また、実際に計算する際には誤差の伝播の考慮に入れ、結果を出している。

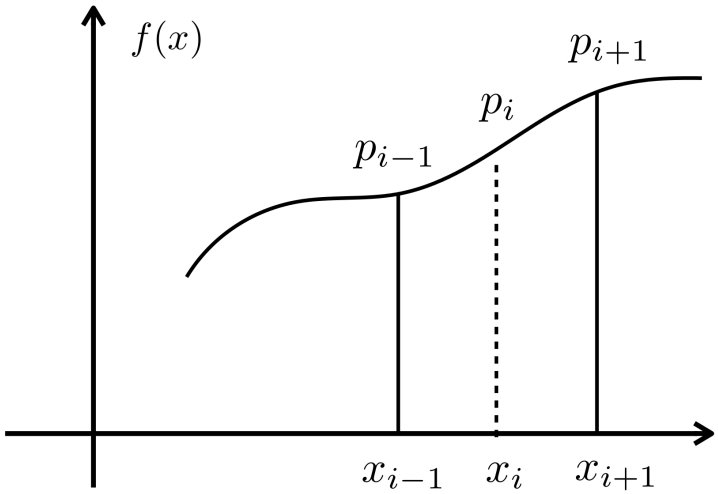


図 D.2: x_i を中心とする面積 S_i

E　ハイブリッドモンテカルロ法のコード

$\lambda = 1.0$ の理論に対しては、以下のコードを用いてハイブリッドモンテカルロ法を実行した。

```
module subprog
   implicit none
   integer, parameter :: dim=3,k=1,m=16,Nb=1,alpha=1
   double precision, parameter :: j=7.5d0,l=1.0d0,rad=1.0d0
   integer(8), save::rd
contains
   subroutine rn(o)!乱数生成のための randomseed また、行列 u はファイル rs.d から読んでいる
      integer o,n
      integer , allocatable  :: u ( : )
      call random_seed(size = o )
      allocate (u ( o ))
      open(1,file='rs1-gamma00-Nb=1-20.d')
      do n=1,o
         read(1,*) u(n)
      enddo
      close(1)
      call random_seed (put = u ( : ) )
      write(*,*)'rsno.',o
   end subroutine rn

![Lj_μ,phi]^2 の計算
   subroutine action(phi,Lj,A2,cc,m,q)
      integer mati,matj,matm,mu,cc,it,m
  complex(kind(0d0)) Lj(cc,cc,dim),phi(cc,cc,0:m+1),A2(cc,cc,m),q(cc,cc,0:m+1,dim),
  q2(cc,cc,0:m+1,dim)
  A2(:,:,:)=cmplx(0.0d0,0.0d0,kind(0d0))
  q(:,:,:,:)=cmplx(0.0d0,0.0d0,kind(0d0))
      do mu=1,dim
         !$omp parallel
     !$omp do
         do it = 1,m
    do matj= 1,cc
           do mati=1,cc
              do matm=1,cc
                 q(mati,matj,it,mu) = q(mati,matj,it,mu)+Lj(mati,matm,mu)*phi(matm,matj,it)
                  enddo
               enddo
            enddo
         enddo
         !$omp end do
      !$omp end parallel
   enddo
   q2(:,:,:,:) = conjg(q(:,:,:,:))
   do mu=1,dim
         !$omp parallel
     !$omp do
         do it = 1,m
    do matj= 1,cc
```

```
          do mati=1,cc
                q(mati,matj,it,mu) = q(mati,matj,it,mu)-q2(matj,mati,it,mu)
enddo
 enddo
      enddo
      !$omp end do
      !$omp end parallel
   enddo
      do mu=1,dim
      !$omp parallel
  !$omp do
      do it=1,m
         do mati=1,cc
                  do matm=1,cc
                     A2(mati,mati,it)=A2(mati,mati,it)+q(mati,matm,it,mu)*q(matm,mati,it,mu)
                  enddo
         enddo
       enddo
       !$omp end do
   !$omp end parallel
   enddo
   !do it=1,m
         !do mati=1,cc
        !A2(mati,mati,it)=dble(c)*A2(mati,mati,it)
     !enddo
   !enddo
   !A2(:,:,:)=dble(c)*A2(:,:,:)
   end subroutine action

![Lj,[Lj, Φ]] の計算
   subroutine com(phis,sLj,A3,cc)
      integer mati,matj,mu,matm,it,cc
  complex(kind(0d0)) phis(cc,cc,0:m+1),sLj(cc,cc,dim),&
  &A3(cc,cc,m),A32(cc,cc,m),q(cc,cc,m,dim),q2(cc,cc,m,dim)
  q(:,:,:,:) = cmplx(0.0d0,0.0d0,kind(0d0))
  !まず、φと Lj の交換関係を計算して q_\i を作る
      do mu=1,dim
         !$omp parallel
     !$omp do
         do it = 1,m
    do matj= 1,cc
           do mati=1,cc
              do matm=1,cc
                 q(mati,matj,it,mu) = q(mati,matj,it,mu)+sLj(mati,matm,mu)*phis(matm,matj,it)
                  enddo
               enddo
            enddo
         enddo
         !$omp end do
      !$omp end parallel
   enddo
       q2(:,:,:,:) = conjg(q(:,:,:,:))
```

```
      do mu=1,dim
         !$omp parallel
      !$omp do
      do it=1,m
         do matj=1,cc
              do mati=1,cc
                 q(mati,matj,it,mu) = q(mati,matj,it,mu)-q2(matj,mati,it,mu)
              enddo
  enddo
      enddo
      !$omp end do
      !$omp end parallel
   enddo
   !次に A_lambda と q の交換関係を計算
   A3(:,:,:)=cmplx(0.0d0,0.0d0,kind(0d0))
   do mu=1,dim
   !$omp parallel
   !$omp do
   do it=1,m
      do matj=1,cc
         do mati=1,cc
       do matm=1,cc
           A3(mati,matj,it)=A3(mati,matj,it)+sLj(mati,matm,mu)*q(matm,matj,it,mu)
               enddo
     enddo
  enddo
   enddo
   !$omp end do
   !$omp end parallel
   enddo
   A32(:,:,:)=conjg(A3(:,:,:))
   do it=1,m
      do matj=1,cc
         do mati=1,cc
      A3(mati,matj,it)=A3(mati,matj,it)+A32(matj,mati,it)
   enddo
           enddo
        enddo
   end subroutine com

!phi^2,phi^4 の計算
   subroutine square(phi,phi2,phi4,n,m)
     integer mati,matj,matm,n,it,m,matl
  complex(kind(0d0)) phi(n,n,0:m+1),phi2(n,n,1:m),phi4(n,n,m)
  phi2(:,:,:)= cmplx(0.0d0,0.0d0,kind(0d0))
  phi4(:,:,:)= cmplx(0.0d0,0.0d0,kind(0d0))
  !$omp parallel
  !$omp do
  do it=1,m
     do mati= 1,n
        do matj=1,n
           do matm=1,n
```

```
      phi2(matj,mati,it)=phi2(matj,mati,it)+phi(matj,matm,it)*phi(matm,mati,it)
       enddo
        enddo
         enddo
  enddo
  !$omp end do
  !$omp end parallel
   phi4(:,:,:)=cmplx(0.0d0,0.0d0,kind(0d0))
   !$omp parallel
   !$omp do
   do it=1,m
      do mati=1,n
            do matl=1,n
            phi4(mati,mati,it)=phi4(mati,mati,it)+phi2(mati,matl,it)*phi2(matl,mati,it)
            enddo
      enddo
   enddo
   !$omp end do
   !$omp end parallel
   end subroutine square

!SU(2) 行列の作成
   subroutine su2(Lj,n,cc,sLj)
      integer mati,matj,i,g,a,matk,matl,cc,n
  double precision l1,l2
  complex(kind(0d0)) Lj(n,n,dim)
  complex(kind(0d0))sLj(cc,cc,dim)
  sLj(:,:,:)= cmplx(0.0d0,0.0d0,kind(0d0))
  Lj(:,:,:)= cmplx(0.0d0,0.0d0,kind(0d0))
  do mati=1,cc
     sLj(mati,mati,3) = cmplx(-j-1+mati,0.0d0,kind(0d0))
  enddo
  do mati=1,cc-1
     l1 = mati*(2*j-mati+1)
 l2 = sqrt(l1)/2.0d0
     sLj(mati,mati+1,1) = cmplx(l2,0.0d0,kind(0d0))
 sLj(mati,mati+1,2) = cmplx(0.0d0,l2,kind(0d0))
  enddo
  do mati=2,cc
     sLj(mati,mati-1,1) = sLj(mati-1,mati,1)
         sLj(mati,mati-1,2) = -sLj(mati-1,mati,2)
      enddo
      do i=1,k
         g=(i-1)*cc+1
         a=i*cc
         do mati=g,a
            do matj=g,a
               matk=mati-(i-1)*cc
               matl=matj-(i-1)*cc
               Lj(mati,matj,1)=sLj(matk,matl,1)
               Lj(mati,matj,2)=sLj(matk,matl,2)
               Lj(mati,matj,3)=sLj(matk,matl,3)
```

```
           enddo
         enddo
       enddo
   end subroutine su2

!δ S/δ phi(mati,matj) の計算
   subroutine diffarentiation(Lj,phi,mass,lambda,delS,eps,n,cc,e,gamma)
      integer mati,matj,matm,it,n,cc
  double precision mass,lambda,c,eps,gamma,ieps2,irad2,mass2,e
  complex(kind(0d0)) phi(n,n,0:m+1),phi3(n,n,1:m)&
  &,delS(n,n,1:m),delK(n,n,1:m),Lj(n,n,dim),&
  &phisq1(n,n,m)
  !φ__ij で微分した物を、delK(i,j, μ) として計算している。
  phisq1(:,:,:)= cmplx(0.0d0,0.0d0,kind(0d0))
  ieps2=(1.0d0/eps**2)
  irad2=(1.0d0/rad**2)
  mass2=mass**2
  !$omp parallel
  !$omp do
  do it=1,m
     do mati= 1,n
        do matj=1,n
           do matm=1,n
      phisq1(matj,mati,it)=phisq1(matj,mati,it)+phi(matj,matm,it)*phi(matm,mati,it)
       enddo
        enddo
         enddo
  enddo
  !$omp end do
  !$omp end parallel
  phi3(:,:,:) = cmplx(0.0d0,0.0d0,kind(0d0))
      call com(phi,Lj,delK,n)
      !$omp parallel
  !$omp do
      do it=1,m
     do mati = 1,n
        do matj = 1,n
       do matm = 1,n
          phi3(matj,mati,it) = phi3(matj,mati,it)+ phi(matj,matm,it)*phisq1(matm,mati,it)
   enddo
        enddo
     enddo
  enddo
  !$omp end do
      !$omp end parallel
      !$omp parallel
  !$omp do
  do it=1,m
         do matj = 1,n
        do mati = 1,n
   delS(mati,matj,it) = (dble(k)/dble(cc))*eps*((2.0d0*phi(matj,mati,it)&
   &-phi(matj,mati,it-1)-phi(matj,mati,it+1))*ieps2+&
```

```
   &irad2*delk(matj,mati,it)+mass2*phi(matj,mati,it)+lambda*phi3(matj,mati,it))
enddo
 enddo
  enddo
  !$omp end do
  !$omp end parallel
   end subroutine differentiation

   subroutine boundarycondition(phi1,phi2,Nb,n,cc,m)
      integer mati,matj,smati,smatj,cc,n,m,Nb
      complex(kind(0d0)) phi1(n,n,0:m+1), phi2(n,n,0:m+1)
      !周期境界条件
      !全体でエルミート行列なので、全面を計算する
  do mati=1,n
     smati=mod(mati,cc)
     if (smati==0)then
        smati=cc
     endif
     do matj = 1,n
        smatj=mod(matj,cc)
        if (smatj==0)then
           smatj=cc
        endif
        if((smati+smatj) <= (2.0d0*cc-Nb))then
          phi1(mati,matj,m+1)=phi1(mati,matj,1)
          phi2(mati,matj,m+1)=phi2(mati,matj,1)
          phi1(mati,matj,0)=phi1(mati,matj,m)
          phi2(mati,matj,0)=phi2(mati,matj,m)
       else
          phi1(mati,matj,0)=phi2(mati,matj,m)
          phi1(mati,matj,m+1)=phi2(mati,matj,1)
          phi2(mati,matj,0)=phi1(mati,matj,m)
          phi2(mati,matj,m+1)=phi1(mati,matj,1)
       endif
    enddo
 enddo
   end subroutine boundarycondition

   subroutine calaction(phi1,phi2,ac1,ac2,Nb,n,cc,m,Lj,eps,mass,lambda)
      integer Nb,n,cc,m,it,mati,matl
      complex(kind(0d0)) first(n,n,m),phi1(n,n,0:m+1),phi2(n,n,0:m+1),Lj(n,n,dim),A2(n,n,m),qq(n,n,0
      &phi4(n,n,m),phisq(n,n,m)
      double precision ac1,ac2,eps,mass,lambda,ieps,irad2,mass2
      !周期境界条件
      call boundarycondition(phi1,phi2,Nb,n,cc,m)
      ieps=(1.0d0/eps**2)
      irad2=(1.0d0/rad**2)
      mass2=mass**2
      !S_1 の計算
      ac1 = 0.0d0
      first(:,:,:) =cmplx(0.0d0,0.0d0,kind(0d0))
      ![Lj, Φ]^2 の計算 (A2)
```

```
    call action(phi1,Lj,A2,n,m,qq)
    !Φ^2, Φ^4 の計算
    call square(phi1,phisq,phi4,n,m)
    !$omp parallel
!$omp do
    do it=1,m
       do mati=1,n
             do matl=1,n
                first(mati,mati,it)=first(mati,mati,it)+&
                &(phi1(mati,matl,it+1)-phi1(mati,matl,it))*(phi1(matl,mati,it+1)&
                &-phi1(matl,mati,it))*ieps
             enddo
       enddo
    enddo
    !$omp end do
!$omp end parallel
    do it=1,m
       do matl = 1,n
          ac1 = ac1 +(dble(first(matl,matl,it))&
          &-irad2*dble(A2(matl,matl,it))&
          &+mass2*dble(phisq(matl,matl,it))&
          &+0.5d0*lambda*dble(phi4(matl,matl,it))&
          &)
       enddo
    enddo
    ac1=(dble(k)/dble(cc))*eps*ac1*0.50d0
    !S_2 の計算
    ac2 = 0.0d0
    first(:,:,:) =cmplx(0.0d0,0.0d0,kind(0d0))
    ![Lj, Φ]^2 の計算 (A2)
    call action(phi2,Lj,A2,n,m,qq)
    !Φ^2, Φ^4 の計算
    call square(phi2,phisq,phi4,n,m)
    !$omp parallel
!$omp do
    do it=1,m
       do mati=1,n
             do matl=1,n
                first(mati,mati,it)=first(mati,mati,it)+&
                &(phi2(mati,matl,it+1)-phi2(mati,matl,it))*(phi2(matl,mati,it+1)&
                &-phi2(matl,mati,it))*ieps
             enddo
       enddo
    enddo
    !$omp end do
!$omp end parallel
    do it=1,m
       do matl = 1,n
          ac2 = ac2 +dble(first(matl,matl,it))&
          &-irad2*dble(A2(matl,matl,it))&
          &+mass2*dble(phisq(matl,matl,it))&
          &+0.50d0*lambda*dble(phi4(matl,matl,it))
```

```
         enddo
      enddo
      ac2=(dble(k)/dble(cc))*eps*ac2*0.50d0
   end subroutine calaction

   subroutine mom2(P1,P2,n,ham1,ham2)
      integer n,matj,matl,it
      complex(kind(0d0)) P1(n,n,m),P2(n,n,m)
      doubleprecision ham1,ham2
      ham1=0.0d0
      ham2=0.0d0
      do it=1,m
      do matj=1,n
         do matl=1,n
    ham1=ham1+dble(conjg(P1(matl,matj,it))*P1(matl,matj,it))
 enddo
      enddo
   enddo
   do it=1,m
      do matj=1,n
         do matl=1,n
    ham2=ham2+dble(conjg(P2(matl,matj,it))*P2(matl,matj,it))
 enddo
      enddo
   enddo
   end subroutine mom2
end module subprog

program HM
   !!$ use omp_lib
   !use ieee_arithmetic
   use subprog
   implicit none
   integer kt,sw,i,acsp,v,Nt,st,z,t1,t2,t_rate,t_max,diff,mati,matj,mato,matl,j2,n,cc,it,&
   &even
   integer, allocatable::u(:)
   complex(kind(0d0)) , allocatable :: Lj(:,:,:),A2(:,:,:),delS1_Nb(:,:,:)&
   &,delS2_Nb(:,:,:),delS(:,:,:)&
   &,phi1(:,:,:),phi2(:,:,:),first(:,:,:),sLj(:,:,:),phisq1(:,:,:),phisq2(:,:,:)&
   &,P1(:,:,:),P2(:,:,:),phisave1(:,:,:),phisave2(:,:,:),&
   &phisq(:,:,:),delS1_Nb1(:,:,:),delS2_Nb1(:,:,:)
   double precision ha,ha2,r,r2,pi,delh,e,t,tn,lambda,mass,c,a,eps,ac1,ac2,ham1,ham2&
   &,gamma,delac,ac11,ac22,sumphisq1,sumphisq2,ee,ac1save,ac11save,ac22save,ac2save
   !call ieee_set_halting_mode(ieee_underflow, .true.)
   !最初にいくつのスレッドを使えるかを書いておく
   !$omp parallel
   !write(*,*) 'omp_get_num_threads',omp_get_num_threads()
   !$omp end parallel
   !最初にγを置いておく
   gamma=0.0d0
   !時間の計測を行う
   call system_clock(t1)
```

```
   pi = 2.0d0*acos(0.0d0)
   a = (j+j)+1
   cc = floor(a)
   eps=l/dble(m*alpha)
!行列サイズ n を決定する
   n=cc*k
   write(*,*) 'j,a,cc,n'
   write(*,*) j,a,cc,n
!lwork はとりあえず、テストデータと同じ値とした
!いろいろな情報
   !write(3,*) 'size of matrix'
!長さ l を alpha 個に分割した後、m 等分した物で考える
   allocate (Lj(1:n,1:n,1:dim),phisq1(n,n,m),phisq2(n,n,m))
   Allocate(A2(n,n,m),delS1_Nb(1:n,1:n,m),delS2_Nb(1:n,1:n,m),delS1_Nb1(1:n,1:n,m)&
   &,delS2_Nb1(1:n,1:n,m),delS(1:n,1:n,m))
   Allocate(phi1(n,n,0:m+1),phi2(n,n,0:m+1),phisave1(n,n,0:m+1),phisave2(n,n,0:m+1))
   Allocate(first(1:n,1:n,1:m),sLj(cc,cc,dim),P1(n,n,m),P2(n,n,m),phisq(n,n,m))
   call rn(v)
   allocate(u(v))
   open(2,file='HMin1-gamma00-Nb=1-20.d')
   read(2,*) Nt
   !'time interbal'
   read(2,*) t
   e = t/dble(Nt)
   !write(3,*) e
   !以下の試行を繰り返す
   !write(3,*) 'number of trials'
   read(2,*) kt
   !write(3,*) 'coupling constant for kinetic term'
   read(2,*) c
   !write(3,*) 'mass'
   read(2,*) mass
   !write(3,*) 'coupling constant for phi^4'
   read(2,*) lambda
!書き込むファイル名を指定
   !境界条件 Nb の場合の ac1+ac2
   open(3,file='theta6-1-gamma00-Nb=1-20-2.d')
   !境界条件 Nb+1 の場合の ac1+ac2
   open(7,file='theta6-2-gamma00-Nb=1-20-2.d')
   !差の平均
   open(8,file='delac-gamma00-Nb=1-20-2.d')
!φについても計算する
   open(100,file='phi1-gamma00-Nb=1-20-2.d')
   open(130,file='phi2-gamma00-Nb=1-20-2.d')
!何回スイープするかによる様にする
   !write(3,*) 'sweep times'
   read(2,*) st
   read(2,*) tn
   close(2)
   acsp = st*kt
   !行列 Lj を定める
      call su2(Lj,n,cc,sLj)
```

```
      deallocate(sLj)
   do z=1,st
   if (z<2) then
!作用全体の coupling constant の分母を決める
   cc = 2.0d0*j+1
!行列 phi を定める。初期状態から始める
   phi1(:,:,:) = cmplx(0.0d0,0.0d0,kind(0d0))
   phi2(:,:,:) = cmplx(0.0d0,0.0d0,kind(0d0))
   else
      t=tn
      e=t/dble(Nt)
  endif
   do sw = 1,kt
!πを定める
   do it=1,m
      do matl = 1,n
         call random_number(r)
         call random_number(r2)
         P1(matl,matl,it) = cmplx(sqrt(-2.0d0*log(r))*cos(2.0d0*pi*r2),0.0d0,kind(0d0))
      enddo
      do matj = 2,n
         do matl = 1,matj-1
            call random_number(r)
            call random_number(r2)
    P1(matl,matj,it) = cmplx(sqrt(-log(r))*cos(2.0d0*pi*r2),sqrt(-log(r))*sin(2.0d0*pi*r2),&
    &kind(0d0))
    P1(matj,matl,it) = conjg(P1(matl,matj,it))
     enddo
  enddo
   enddo
   do it=1,m
      do matl = 1,n
         call random_number(r)
         call random_number(r2)
         P2(matl,matl,it) = cmplx(sqrt(-2.0d0*log(r))*cos(2.0d0*pi*r2),0.0d0,kind(0d0))
      enddo
      do matj = 2,n
         do matl = 1,matj-1
            call random_number(r)
            call random_number(r2)
    P2(matl,matj,it) = cmplx(sqrt(-log(r))*cos(2.0d0*pi*r2)&
    &,sqrt(-log(r))*sin(2.0d0*pi*r2),&
    &kind(0d0))
    P2(matj,matl,it) = conjg(P2(matl,matj,it))
     enddo
  enddo
   enddo
!ハミルトニアンの計算
   !まず、Φに寄る項を計算する。
   !周期境界条件 Nb の場合
   call calaction(phi1,phi2,ac1,ac2,Nb,n,cc,m,Lj,eps,mass,lambda)
   !また、周期境界条件を Nb+1 に書き換えた場合
```

```
   call calaction(phi1,phi2,ac11,ac22,Nb+1,n,cc,m,Lj,eps,mass,lambda)
   ha = (1-gamma)*(ac1+ac2)+gamma*(ac11+ac22)
   !共役運動量を含んでのハミルトニアン
   call mom2(P1,P2,n,ham1,ham2)
   ha = ha +0.5d0*ham1
   ha=ha+0.5d0*ham2
!行列の保存 (ウイングは Nb+1 になっている事に注意)
   phisave1 = phi1
   phisave2 = phi2
!計算結果も残しておく
   ac1save=ac1
   ac2save=ac2
   ac11save=ac11
   ac22save=ac22
!Lj とπの更新リープフロッグ法
!第一ステップ
   !運動量について
   !Nb の場合
   !周期境界条件を課す
     ee=0.50d0*e
     call boundarycondition(phi1,phi2,Nb,n,cc,m)
 call diffarentiation(Lj,phi1,mass,lambda,delS1_Nb,eps,n,cc,ee,gamma)
 call diffarentiation(Lj,phi2,mass,lambda,delS2_Nb,eps,n,cc,ee,gamma)
 !Nb+1 の場合
 call boundarycondition(phi1,phi2,Nb+1,n,cc,m)
 call diffarentiation(Lj,phi1,mass,lambda,delS1_Nb1,eps,n,cc,ee,gamma)
 call diffarentiation(Lj,phi2,mass,lambda,delS2_Nb1,eps,n,cc,ee,gamma)
   !P1 について
        !$omp parallel
        !$omp do
        do it =1,m
           !対角成分
           do mati = 1,n
              P1(mati,mati,it) = P1(mati,mati,it)-ee*(1.0d0-gamma)*delS1_Nb(mati,mati,it)&
              &-ee*gamma*delS1_Nb1(mati,mati,it)
           enddo
           !非対格成分
           do matj=2,n
              do mati=1,matj-1
                 P1(mati,matj,it) = P1(mati,matj,it)-ee*(1.0d0-gamma)*delS1_Nb(mati,matj,it)&
                 &-ee*gamma*delS1_Nb1(mati,matj,it)
                 P1(matj,mati,it) = conjg(P1(mati,matj,it))
              enddo
           enddo
        enddo
        !$omp end do
        !$omp end parallel
   !P2 について
        !$omp parallel
        !$omp do
        do it =1,m
           !対角成分
```

```
            do mati = 1,n
               P2(mati,mati,it) = P2(mati,mati,it)-ee*(1.0d0-gamma)*delS2_Nb(mati,mati,it)&
               &-ee*gamma*delS2_Nb1(mati,mati,it)
            enddo
            !非対格成分
            do matj=2,n
               do mati=1,matj-1
                  P2(mati,matj,it) = P2(mati,matj,it)-ee*(1.0d0-gamma)*delS2_Nb(mati,matj,it)&
                  &-ee*gamma*delS2_Nb1(mati,matj,it)
                  P2(matj,mati,it) = conjg(P2(mati,matj,it))
               enddo
            enddo
         enddo
         !$omp end do
         !$omp end parallel
         !write(*,*)P2(1,2,3)
!主ステップ
   do j2 = 1,Nt-1
     !Φ 1 について
     !対角成分
     !$omp parallel
     !$omp do
     do it=1,m
        do mato=1,n
           phi1(mato,mato,it) = phi1(mato,mato,it)+e*cmplx(dble(P1(mato,mato,it)),0.0d0,kind(0d0))
        enddo
        do matj=2,n
           do mati=1,matj-1
              phi1(mati,matj,it) = phi1(mati,matj,it) + e*P1(matj,mati,it)
          phi1(matj,mati,it) = conjg(phi1(mati,matj,it))
           enddo
        enddo
        !φ 2 について
        !対角成分
        do mato = 1,n
           phi2(mato,mato,it) = phi2(mato,mato,it)+e*cmplx(dble(P2(mato,mato,it)),0.0d0,kind(0d0))
        enddo
        !非対格成分
        do matj=2,n
           do mati=1,matj-1
              phi2(mati,matj,it) = phi2(mati,matj,it) + e*P2(matj,mati,it)
          phi2(matj,mati,it) = conjg(phi2(mati,matj,it))
           enddo
        enddo
     enddo
    !$omp end do
    !$omp end parallel
   !運動量について
   !まず、Nb の場合を考える
        !周期境界条件を課す
   call boundarycondition(phi1,phi2,Nb,n,cc,m)
   call diffarentiation(Lj,phi1,mass,lambda,delS1_nb,eps,n,cc,e,gamma)
```

```
   call diffarentiation(Lj,phi2,mass,lambda,delS2_nb,eps,n,cc,e,gamma)
   !Nb+1 の場合を考える
   !周期境界条件を課す
   call boundarycondition(phi1,phi2,Nb+1,n,cc,m)
   call diffarentiation(Lj,phi1,mass,lambda,delS1_nb1,eps,n,cc,e,gamma)
   call diffarentiation(Lj,phi2,mass,lambda,delS2_nb1,eps,n,cc,e,gamma)
        !$omp parallel
        !$omp do
        do it =1,m
           !対角成分
           do mati = 1,n
              P1(mati,mati,it) = P1(mati,mati,it)-e*(1.0d0-gamma)*delS1_nb(mati,mati,it)&
              &-e*gamma*delS1_nb1(mati,mati,it)
           enddo
           !非対格成分
           do matj=2,n
              do mati=1,matj-1
                 P1(mati,matj,it) = P1(mati,matj,it)-e*(1.0d0-gamma)*delS1_nb(mati,matj,it)&
                 &-e*gamma*delS1_Nb1(mati,matj,it)
                 P1(matj,mati,it) = conjg(P1(mati,matj,it))
              enddo
           enddo
        enddo
        !$omp end do
        !$omp end parallel
   !P2 について
        !$omp parallel
        !$omp do
        do it =1,m
           !対角成分
           do mati = 1,n
              P2(mati,mati,it) = P2(mati,mati,it)-e*(1.0d0-gamma)*delS2_Nb(mati,mati,it)&
              &-e*gamma*delS2_Nb1(mati,mati,it)
           enddo
           !非対格成分
           do matj=2,n
              do mati=1,matj-1
                 P2(mati,matj,it) = P2(mati,matj,it)-e*(1.0d0-gamma)*delS2_Nb(mati,matj,it)&
                 &-e*gamma*delS2_Nb1(mati,matj,it)
                 P2(matj,mati,it) = conjg(P2(mati,matj,it))
              enddo
           enddo
        enddo
        !$omp end do
        !$omp end parallel
   enddo
!最終ステップ
     !Φ 1 について
     !対角成分
     !$omp parallel
     !$omp do
     do it=1,m
```

```
        do mato=1,n
           phi1(mato,mato,it) = phi1(mato,mato,it)&
           &+e*cmplx(dble(P1(mato,mato,it)),0.0d0,kind(0d0))
        enddo
        !非対格成分
        do matj=2,n
           do mati=1,matj-1
              phi1(mati,matj,it) = phi1(mati,matj,it) + e*P1(matj,mati,it)
          phi1(matj,mati,it) = conjg(phi1(mati,matj,it))
           enddo
        enddo
        !φ 2 について
        !対角成分
        do mato = 1,n
           phi2(mato,mato,it) = phi2(mato,mato,it)&
           &+e*cmplx(dble(P2(mato,mato,it)),0.0d0,kind(0d0))
        enddo
        !非対格成分
        do matj=2,n
           do mati=1,matj-1
              phi2(mati,matj,it) = phi2(mati,matj,it) + e*P2(matj,mati,it)
          phi2(matj,mati,it) = conjg(phi2(mati,matj,it))
           enddo
        enddo
     enddo
     !$omp end do
     !$omp end parallel
  !運動量について
  !Nb の場合
        !周期境界条件を課す
     call boundarycondition(phi1,phi2,Nb,n,cc,m)
call diffarentiation(Lj,phi1,mass,lambda,delS1_Nb,eps,n,cc,ee,gamma)
call diffarentiation(Lj,phi2,mass,lambda,delS2_Nb,eps,n,cc,ee,gamma)
!Nb+1 の場合
!周期境界条件を課す
     call boundarycondition(phi1,phi2,Nb+1,n,cc,m)
call diffarentiation(Lj,phi1,mass,lambda,delS1_Nb1,eps,n,cc,ee,gamma)
call diffarentiation(Lj,phi2,mass,lambda,delS2_Nb1,eps,n,cc,ee,gamma)
  !P1 について
        !$omp parallel
        !$omp do
        do it =1,m
           !対角成分
           do mati = 1,n
              P1(mati,mati,it) = P1(mati,mati,it)-ee*(1.0d0-gamma)*delS1_Nb(mati,mati,it)&
              &-ee*gamma*delS1_Nb1(mati,mati,it)
           enddo
           !非対格成分
           do matj=2,n
              do mati=1,matj-1
                 P1(mati,matj,it) = P1(mati,matj,it)-ee*(1.0d0-gamma)*delS1_Nb(mati,matj,it)&
                 &-ee*gamma*delS1_Nb1(mati,matj,it)
```

```
                P1(matj,mati,it) = conjg(P1(mati,matj,it))
             enddo
          enddo
       enddo
       !$omp end do
       !$omp end parallel
   !P2 について
       !$omp parallel
       !$omp do
       do it =1,m
          !対角成分
          do mati = 1,n
             P2(mati,mati,it) = P2(mati,mati,it)-ee*(1.0d0-gamma)*delS2_Nb(mati,mati,it)&
             &-ee*gamma*delS2_Nb1(mati,mati,it)
          enddo
          !非対格成分
          do matj=2,n
             do mati=1,matj-1
                P2(mati,matj,it) = P2(mati,matj,it)-ee*(1.0d0-gamma)*delS2_Nb(mati,matj,it)&
                &-ee*gamma*delS2_Nb1(mati,matj,it)
                P2(matj,mati,it) = conjg(P2(mati,matj,it))
             enddo
          enddo
       enddo
       !$omp end do
       !$omp end parallel
!ハミルトニアンの計算
   ac1=0.0d0
   ac2=0.0d0
   !S_1 の計算
   first(:,:,:) =cmplx(0.0d0,0.0d0,kind(0d0))
   !まず、Nb の場合のハミルトニアンを計算する
    call calaction(phi1,phi2,ac1,ac2,Nb,n,cc,m,Lj,eps,mass,lambda)
   !また、周期境界条件を Nb+1 に書き換えた場合
    call calaction(phi1,phi2,ac11,ac22,Nb+1,n,cc,m,Lj,eps,mass,lambda)
   ha2 = (1.0d0-gamma)*(ac1+ac2)+gamma*(ac11+ac22)
   !共役運動量を含んでのハミルトニアン
   call mom2(P1,P2,n,ham1,ham2)
   ha2 = ha2 +0.5d0*(ham1+ham2)
!ハミルトニアンの比較
   delh = ha2 - ha
   call random_number(r)
   if (delh >0.0d0) then
      if (r>=exp(-delh)) then
         phi1=phisave1
         phi2=phisave2
         ac1=ac1save
         ac2=ac2save
         ac11=ac11save
         ac22=ac22save
         acsp = acsp - 1
  endif
```

```
 endif
 !結果の記述
 ha = ac1+ac2
 ha2= ac11+ac22
 delac=delac+ha2-ha
 write(8,*) ha2-ha
 write(3,*) ac11+ac22
 write(7,*) ac1+ac2
 phisq1(:,:,:)= cmplx(0.0d0,0.0d0,kind(0d0))
    !$omp parallel
!$omp do
do it=1,m
   !do matj= 1,n
      do mati=1,n
         do matj=1,n
    phisq1(mati,mati,it)=phisq1(mati,mati,it)&
    &+phi1(mati,matj,it)*phi1(matj,mati,it)
     enddo
      enddo
       !enddo
enddo
!$omp end do
!$omp end parallel
 sumphisq1=0.0d0
 do it=1,m
 do mati=1,n
    sumphisq1=sumphisq1+phisq1(mati,mati,it)
 enddo
 enddo
 write(100,*)sumphisq1
    phisq2(:,:,:)= cmplx(0.0d0,0.0d0,kind(0d0))
    !$omp parallel
!$omp do
do it=1,m
   !do matj= 1,n
      do mati=1,n
         do matj=1,n
    phisq2(mati,mati,it)=phisq2(mati,mati,it)&
    &+phi2(mati,matj,it)*phi2(matj,mati,it)
     enddo
      enddo
       !enddo
enddo
!$omp end do
!$omp end parallel
 sumphisq2=0.0d0
 do it=1,m
 do mati=1,n
    sumphisq2=sumphisq2+phisq2(mati,mati,it)
 enddo
 enddo
 write(130,*)sumphisq2
```

```
   even=even+1
!ファイルに書き出す
   !write(3,*) w
   enddo
   enddo
   !phi を書き出す
   open(4,file='a1-gamma00-Nb=1-20-2.d')
            do it=1,m
               do mati=1,n
                 do matj = 1,n
                    write(4,*) phi1(matj,mati,it)
                 enddo
               enddo
      enddo
      do it=1,m
                do mati=1,n
                  do matj = 1,n
                     write(4,*) phi2(matj,mati,it)
                  enddo
               enddo
      enddo
   close(4)
!random_seed を書き出す
   open(1,file='rs1-gamma00-Nb=1-20.d')
   call random_seed(get = u(:))
   do i=1,v
      write(1,*) u(i)
   enddo
   close(1)
   write(3,*) 'acseptance'
   write(3,*) acsp
   write(*,*) 'acseptance'
   write(*,*) acsp
   call system_clock(t2,t_rate,t_max)
   if (t2<t1) then
      diff=t_max-t1+t2
   else
      diff=t2-t1
   endif
   write(3,*) 'time it took was'
   write(3,*) dble(diff)/dble(t_rate)
   write(3,*) 'j'
   write(3,*)  j
   write(3,*) 'eps'
   write(3,*) eps
   close(3)
end program HM
```

参考文献

[1] J. D. Bekenstein, Phys. Rev. D **7**, 2333 (1973). doi:10.1103/PhysRevD.7.2333

[2] S. W. Hawking, Commun. Math. Phys. **43**, 199 (1975) [Commun. Math. Phys. **46**, 206 (1976)]. doi:10.1007/BF02345020

[3] M. Srednicki, Phys. Rev. Lett. **71**, 666 (1993) doi:10.1103/PhysRevLett.71.666 [hep-th/9303048].

[4] A. Strominger and C. Vafa, Phys. Lett. B **379**, 99 (1996) doi:10.1016/0370-2693(96)00345-0 [hep-th/9601029].

[5] J. M. Maldacena, Int. J. Theor. Phys. **38**, 1113 (1999) [Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 231 (1998)] doi:10.1023/A:1026654312961 [hep-th/9711200].

[6] S. Ryu and T. Takayanagi, Phys. Rev. Lett. **96**, 181602 (2006) [hep-th/0603001].

[7] T. Banks, W. Fischler, S. H. Shenker and L. Susskind, Phys. Rev. D **55**, 5112 (1997) [hep-th/9610043].

[8] N. Ishibashi, H. Kawai, Y. Kitazawa and A. Tsuchiya, Nucl. Phys. B **498**, 467 (1997) [hep-th/9612115].

[9] R. Dijkgraaf, E. P. Verlinde and H. L. Verlinde, Nucl. Phys. B **500**, 43 (1997) [hep-th/9703030].

[10] A. Connes, M. R. Douglas and A. S. Schwarz, JHEP **9802**, 003 (1998) doi:10.1088/1126-6708/1998/02/003 [hep-th/9711162].

[11] H. Aoki, N. Ishibashi, S. Iso, H. Kawai, Y. Kitazawa and T. Tada, Nucl. Phys. B **565**, 176 (2000) doi:10.1016/S0550-3213(99)00633-1 [hep-th/9908141].

[12] N. Seiberg and E. Witten, JHEP **9909**, 032 (1999) doi:10.1088/1126-6708/1999/09/032 [hep-th/9908142].

[13] S. Minwalla, M. Van Raamsdonk and N. Seiberg, JHEP **0002**, 020 (2000) [hep-th/9912072].

[14] N. Shiba and T. Takayanagi, JHEP **1402**, 033 (2014) [arXiv:1311.1643 [hep-th]].

[15] W. Fischler, A. Kundu and S. Kundu, JHEP **1401**, 137 (2014) [arXiv:1307.2932 [hep-th]].

[16] J. L. Karczmarek and C. Rabideau, JHEP **1310**, 078 (2013) [arXiv:1307.3517 [hep-th]].

[17] A. Hashimoto and N. Itzhaki, Phys. Lett. B **465**, 142 (1999) [hep-th/9907166].

[18] J. M. Maldacena and J. G. Russo, JHEP **9909**, 025 (1999) [hep-th/9908134].

[19] S. Okuno, M. Suzuki and A. Tsuchiya, to be published in PTEP [arXiv:1512.06484 [hep-th]].

[20] J. L. Karczmarek and P. Sabella-Garnier, JHEP **1403**, 129 (2014) [arXiv:1310.8345 [hep-th]].

[21] P. Sabella-Garnier, JHEP **1502**, 063 (2015) [arXiv:1409.7069 [hep-th]].

[22] D. Dou and B. Ydri, Phys. Rev. D **74**, 044014 (2006) [gr-qc/0605003].

[23] D. Dou, Mod. Phys. Lett. A **24**, 2467 (2009) [arXiv:0903.3731 [gr-qc]].

[24] P. V. Buividovich and M. I. Polikarpov, Nucl. Phys. B **802**, 458 (2008) [arXiv:0802.4247 [hep-lat]].

[25] Y. Nakagawa, A. Nakamura, S. Motoki and V. I. Zakharov, PoS LATTICE **2010**, 281 (2010) [arXiv:1104.1011 [hep-lat]].

[26] T. Azuma, S. Bal, K. Nagao and J. Nishimura, JHEP **0405**, 005 (2004) [hep-th/0401038].

[27] T. Azuma, S. Bal and J. Nishimura, Phys. Rev. D **72**, 066005 (2005) [hep-th/0504217].

[28] J. Medina, W. Bietenholz, F. Hofheinz and D. O'Connor, PoS LAT **2005**, 263 (2006) [hep-lat/0509162].

[29] F. Garcia Flores, X. Martin and D. O'Connor, Int. J. Mod. Phys. A **24**, 3917 (2009) [arXiv:0903.1986 [hep-lat]].

[30] M. Panero, JHEP **0705**, 082 (2007) [hep-th/0608202].

[31] C. R. Das, S. Digal and T. R. Govindarajan, Mod. Phys. Lett. A **23**, 1781 (2008) [arXiv:0706.0695 [hep-th]].

[32] H. Steinacker, Nucl. Phys. B **679**, 66 (2004) [hep-th/0307075].

[33] S. Kawamoto and T. Kuroki, JHEP **1506**, 062 (2015) [arXiv:1503.08411 [hep-th]].

[34] T. Inami, Y. Koyama, Y. Nakayama and M. Suzuki, PTEP **2015**, no. 5, 053B05 (2015) doi:10.1093/ptep/ptv062 [arXiv:1412.2350 [hep-th]].

[35] 高柳匡,“ホログラフィー原理と量子エンタングルメント”, サイエンス社 (2014 年)

[36] 土屋麻人,“弦理論と行列模型　弦理論の非摂動定式化と新しい時空と物質の捉え方”, サイエンス社 (2014 年)

[37] C. S. Chu, J. Madore and H. Steinacker, JHEP **0108**, 038 (2001) [hep-th/0106205].

[38] P. Castro-Villarreal, R. Delgadillo-Blando and B. Ydri, Nucl. Phys. B **704**, 111 (2005) [hep-th/0405201].

[39] J. P. Gazeau. Coherent states in quantum physics - 2009. Weinheim, Germany: WileyVCH.

[40] 青木慎也,“格子上の場の理論”, シュプリンガー・フェアラーク東京 (2005 年)

[41] G. Alexanian, A. prodnzul and A. Stern, Nucl. Phys. B **600**, 531 (2001) [hep-th/0010187].

[42] A. B. Hammou, M. Lagraa and M. M. Sheikh-Jabbari, Phys. Rev. D **66**, 025025 (2002) [hep-th/0110291].

[43] P. Presnajder, J. Math. Phys. **41**, 2789 (2000) [hep-th/9912050].

[44] G. Ishiki, Phys. Rev. D **92**, no. 4, 046009 (2015) [arXiv:1503.01230 [hep-th]].

[45] F. A. Berezin, Commun. Math. Phys. **40**, 153 (1975).

[46] J. S. Schwinger, J. Math. Phys. **2**, 407 (1961).

[47] L. V. Keldysh, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **47**, 1515 (1964) [Sov. Phys. JETP **20**, 1018 (1965)].

[48] K. C. Chou, Z. B. Su, B. L. Hao and L. Yu, Phys. Rept. **118**, 1 (1985).

[49] E. Calzetta and B. L. Hu, Phys. Rev. D **35**, 495 (1987).

[50] R. D. Jordan, Phys. Rev. D **33**, 444 (1986).

[51] S. Weinberg, Phys. Rev. D **72**, 043514 (2005).

[52] L. H. Ford and L. Parker, Phys. Rev. D **16**, 245 (1977).

[53] B. Allen and A. Folacci, Phys. Rev. D **35**, 3771 (1987).

[54] B. Allen, Nucl. Phys. B **287**, 743 (1987).

[55] B. Allen and M. Turyn, Nucl. Phys. B **292**, 813 (1987).

[56] G. Kleppe, Phys. Lett. B **317**, 305 (1993).

[57] S. P. Miao, N. C. Tsamis and R. P. Woodard, J. Math. Phys. **51**, 072503 (2010).
S. P. Miao, N. C. Tsamis and R. P. Woodard, J. Math. Phys. **52**, 122301 (2011).
S. P. Miao, N. C. Tsamis and R. P. Woodard, Class. Quant. Grav. **28**, 245013 (2011).

[58] A. Rajaraman, J. Kumar and L. Leblond, Phys. Rev. D **82**, 023525 (2010).

[59] A. Higuchi, D. Marolf and I. A. Morrison, Class. Quant. Grav. **28**, 245012 (2011).

[60] S. Hollands, Annales Henri Poincare **13**, 1039 (2012).

[61] S. B. Giddings and M. S. Sloth, Phys. Rev. D **86**, 083538 (2012).

[62] S. P. Miao and R. P. Woodard, JCAP **1207**, 008 (2012).

[63] A. Youssef, Phys. Lett. B **718**, 1095 (2013).

[64] I. A. Morrison, arXiv:1302.1860 [gr-qc].

[65] D. Seery, Class. Quant. Grav. **27**, 124005 (2010).

[66] Y. Urakawa and T. Tanaka, Prog. Theor. Phys. **122**, 779 (2009).
Y. Urakawa and T. Tanaka, Phys. Rev. D **82**, 121301 (2010).
T. Tanaka and Y. Urakawa, PTEP **2013**, 083E01 (2013).
T. Tanaka and Y. Urakawa, PTEP **2013**, 063E02 (2013).
T. Tanaka and Y. Urakawa, PTEP **2014**, 073E01 (2014).

[67] N. C. Tsamis and R. P. Woodard, Nucl. Phys. B **474**, 235 (1996).
N. C. Tsamis and R. P. Woodard, Phys. Rev. D **78**, 028501 (2008).
N. C. Tsamis and R. P. Woodard, Int. J. Mod. Phys. D **20**, 2847 (2011).

[68] J. Garriga and T. Tanaka, Phys. Rev. D **77**, 024021 (2008).

[69] H. Kitamoto and Y. Kitazawa, Phys. Rev. D **87**, 124007 (2013).

[70] H. Kitamoto and Y. Kitazawa, Int. J. Mod. Phys. A **29**, 1430016 (2014).

[71] Y. Nakayama, Int. J. Mod. Phys. A **19**, 2771 (2004).

[72] A. M. Polyakov, Mod. Phys. Lett. A **2**, 893 (1987).

[73] J. Distler and H. Kawai, Nucl. Phys. B **321**, 509 (1989).

[74] A. M. Polyakov, Sov. Phys. Usp. **25**, 187 (1982) [Usp. Fiz. Nauk **136**, 538 (1982)].

[75] I. Antoniadis and E. Mottola, Phys. Rev. D **45**, 2013 (1992).

[76] R. Jackiw, C. Nunez and S.-Y. Pi, Phys. Lett. A **347**, 47 (2005).

[77] I. Antoniadis, P. O. Mazur and E. Mottola, New J. Phys. **9**, 11 (2007).

[78] J. Govaerts and S. Zonetti, Class. Quant. Grav. **28**, 185001 (2011).
J. Govaerts and S. Zonetti, Phys. Rev. D **87**, 084016 (2013).

[79] P. Di Francesco, P. Mathieu and D. Senechal, New York, USA: Springer (1997) 890 p

[80] A. B. Zamolodchikov, Sov. J. Nucl. Phys. **44**, 529 (1986) [Yad. Fiz. **44**, 821 (1986)].

[81] M. Bander, Phys. Rev. D **82**, 024003 (2010).
M. Bander, PoS HRMS **2010**, 026 (2010).

[82] H. Kitamoto and Y. Kitazawa, Phys. Rev. D **83**, 104043 (2011).
H. Kitamoto and Y. Kitazawa, Phys. Rev. D **85**, 044062 (2012).

[83] T. S. Bunch and P. C. W. Davies, Proc. Roy. Soc. Lond. A **360**, 117 (1978).

[84] V. K. Onemli and R. P. Woodard, Class. Quant. Grav. **19**, 4607 (2002).

[85] T. M. Janssen, S. P. Miao, T. Prokopec and R. P. Woodard, Class. Quant. Grav. **25**, 245013 (2008).

[86] J. Polchinski, hep-th/0603249.

[87] R. P. Woodard, arXiv:1407.4748 [gr-qc].

[88] D. Klemm and L. Vanzo, JCAP **0411**, 006 (2004).

[89] A. M. Polyakov, hep-th/0602011.

[90] A. Zamolodchikov and A. Zamolodchikov, Conf. Proc. C **060726**, 1223 (2006).

[91] Y. Nakayama, Nucl. Phys. B **846**, 100 (2011).

[92] T. Brunier, V. K. Onemli and R. P. Woodard, Class. Quant. Grav. **22**, 59 (2005).

[93] N. D. Birrell and P. C. W. Davies, "Quantum Fields in Curved Space". Cambridge Monogr.Math.Phys.1982. 340 pp.

[94] A. A. Starobinsky and J. Yokoyama, Phys. Rev. D **50**, 6357 (1994).

[95] C. P. Burgess, L. Leblond, R. Holman and S. Shandera, JCAP **1003**, 033 (2010).

[96] 橋本直彌, "エンタングルメントエントロピーの重力双対による記述", 2014 年度修士論文

[97] Birrell N. D and Davies P. C. W 1982 Quantum Fields In Curved Space (Cambridge: Cambridge University Press)