

CASを活用した $x^n - 1$ の因数分解に関する代数的活動

Algebraic Activities in Polynomial Factorization of $x^n - 1$ with CAS in Secondary School Grade

両 角 達 男

Tatsuo MOROZUMI

（平成19年10月 1 日受理）

1. 研究の目的と方法

$x^n - 1$ の形の式を因数分解すると、その式には様々な数理がみられる。例えば、 $x^2 - 1$ から $x^7 - 1$ までの式について、CASを用いて有理数の範囲で因数分解を行うと、次のような式を順次得ることができる。

$$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$$

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$$

$$x^4 - 1 = (x + 1)(x - 1)(x^2 + 1)$$

$$x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

$$x^6 - 1 = (x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$$

$$x^7 - 1 = (x - 1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

これらの式を概観すると、いずれの場合にも因数として $x - 1$ を見いだすことができる。

指数 n が偶数のときには複数の因数の積に、奇数のときには2つの因数の積に分解できるようにみえる。しかし、指数が9のときには、次のように3つの因数の積となる。

$$x^9 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)(x^6 + x^3 + 1)$$

一方、2つの因数 $x^2 + x + 1$ 、 $x^6 + x^3 + 1$ の積が、指数9から1小さな8より始まる可約な多項式 $x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ であることも確認できる。

また、 $x^8 - 1 = (x + 1)(x - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)$ であることを知れば、指数 n が2の累乗の指数のときに規則性をもつことがみえる。例えば、 $x^4 - 1$ の因数は $x + 1$ 、 $x - 1$ 、 $x^2 + 1$ であり、 $x + 1$ と $x - 1$ は $x^2 - 1$ の因数と一致する。また、 $x^8 - 1$ の因数にみられる $x + 1$ 、 $x - 1$ 、 $x^2 + 1$ は、 $x^4 - 1$ の因数と一致する。指数 n が2の累乗の場合、その約数を指数にもつ場合の $x^n - 1$ の因数をもっている。これは、 $x^4 - 1$ や $x^8 - 1$ が次のように式変形できることと関連づけることができる。

$$x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$$

$$x^8 - 1 = (x^4 - 1)(x^4 + 1)$$

この見方は、 $x^3 - 1$ と $x^6 - 1$ の場合にも適用できる。また、指数 n が3の累乗の場合にも同じようにみることができるか等々、さらなる洞察を生み出すこともできる。これらの見方のように式 $x^n - 1$ の因数分解について連続的な探究を行うことができる。

本研究の目的は、CASを活用した $x^n - 1$ の形の式の因数分解に関する学習活動を通して、中学3年の学習者がどのように因数分解に対する意味形成を行い、さらに $x^n - 1$ の因数分解に関わる洞察を行

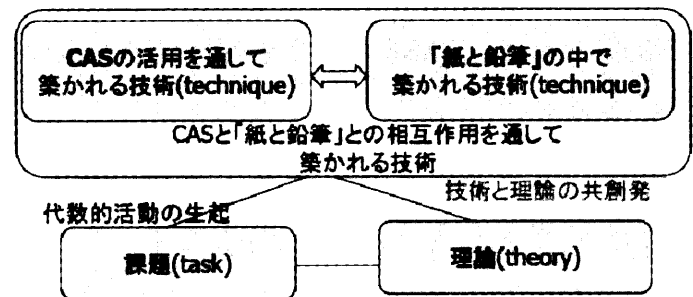
っていったのかを、教授実験を通して実証的に明らかにすることである。

研究方法は、Kieran and Drijvers (2006) が15歳の生徒を対象に行った教授実験を参考に、CASを活用した $x^n - 1$ の因数分解に関わる継続的な授業実践を設計・実践し、授業の中での特徴的な生徒の活動やワークシートの記述や、調査問題の回答状況から質的な考察を行う。

2. 教授実験の概要

Kieran and Drijvers (2006) による教授実験では、カナダとメキシコの15歳の第10学年の生徒を対象に、等号の相等関係に関すること、 $x^n - 1$ の因数分解に関することの2つから構成される授業実践とその分析が行われた。いずれの場合も、問題解決を図るためにCASによる方法と紙と鉛筆による方法の双方を用いる、それぞれの方法を比較し調和を図る、という内省の活動が重視されている。その背景にはKieran and Drijversが提唱する「課題(Task)－理論(Theory)－技術(Technique)」の理論がある。授業での課題が代数的活動を生起させる、CASによる方法と紙と鉛筆による方法の双方を用いる、それぞれの方法を比較・調和するといった相互作用を通して技術が磨かれ、同時に技術と理論の共創発が行われるという考えである。

◎Drijvers & Kieran (2006) らのプロジェクト研究への着目



代数的活動を生起させる課題との関係のもとに、手続きと概念との関係を包括的にとらえ、人工物としてのCASが学習者の思考における「道具」(道具の発生)に変容する過程を重視した考えともいえる。

Kieran and Drijvers (2006) による $x^n - 1$ の因数分解の教授実験は、次のア～ウの3つの部分から成る。

- ア. $x^n - 1$ の因数分解をしたいくつもの式に共通にみられる、因数およびその分布に関わる規則性の発見とその規則性の一般化を図る
- イ. 因数分解に関わる性質の推測、CASによる方法と紙と鉛筆による方法との調和を通して、因数分解に関わる性質の一層の洗練を行う
- ウ. 因数分解に関わる性質を証明する

この教授実験は、15歳の第10学年の生徒を対象にしているため、指数 n を具体的な数の場合に焦点をあてた議論が多く行われている。我が国における中学3年と高校1年初期段階双方の学習を行っている。

本研究における教授実験では、我が国の中学3年の生徒を対象にすることもあり、Kieran and Drijvers(2006)の教授実験におけるアとイに焦点をあてること、CASによる方法と紙と鉛筆による方法との調和を図ることを強調した。例えば、 $x^2 - 1$ の因数分解を式変形と面積図双方に関連づけて導いた過程をふりかえりながら、紙と鉛筆による方法で $x^3 - 1$ の因数分解を導く過程などである。CASによる $x^n - 1$ の因数分解に急ぐことのないように、既に学んだ因数分解と関連づける、意味づける過程を大事にしながら、 $x^n - 1$ の因数分解に関する洞察を図るようにした。この教授実験の概要は、次頁の通りである。6授業時間の教授実験と放課後でのグループの探究の双方からなる。また、中学3年の式の計算の学習が一通り終了した後の、6月下旬から7月中旬にかけて、国立大学附属中学校にて行わ

れた。それゆえ、生徒は既に、2 次の文字式の因数分解や多項式どうしの展開について学習をしている。なお、因数分解に対する生徒の親和感を高め、自然数の素因数分解と多項式の因数分解との関連を強く意識させるため、 $x^n - 1$ の因数分解に関わる学習活動の前に、素因数分解を通して自然数の性質を探究していく学習を3時間実施した。

また、 $x^n - 1$ の因数分解に関わる規則性を発見し、その性質を探究したり洗練していく場では、具体例をもとに考えること、発見した規則性を明文化すること、他者の考えと関連付けること、などを大切にするように促している。

【実践された教授実験の概要】

I. CASを活用して自然数の素因数分解に関わる性質を探究する

第1時：123123や851851など3桁の数が繰り返される6桁の数が、 $1001 = 7 \times 11 \times 13$ の倍数となることを手がかりにしながら、「同じ数が連続してできる自然数の性質」を紙と鉛筆とCASによる方法で調べる。なお、CASとして生徒1人1台のVoyage200を使用する。

第2時：自然数を素因数分解することを通して、「同じ数が連続してできる自然数の性質」を調べ、さらにその性質を一般化させる。

111、1111、11111など1が連続してできる自然数が何の倍数になるかも調べる。

第3時：「1が連続してできる自然数」を素因数分解して得られる素因数の分布状況から、1が連続してできる自然数について、一般化ができそうな規則性を発見し、CASを用いて可能な範囲で検証する。

II. CASを活用して $x^n - 1$ の形の式の因数分解に関する性質を探究する

第4時： $x^2 - 1$ を式変形と面積図双方の方法から因数分解する過程をふりかえり、紙と鉛筆による方法で $x^3 - 1$ の因数分解を導く。さらに、 $x^2 - 1$ と $x^3 - 1$ の因数分解を導く過程をふりかえりながら、 $x^4 - 1$ を因数分解に迫る。

第5時：3つの式 $x^2 - 1$ 、 $x^3 - 1$ 、 $x^4 - 1$ を因数分解した式の形をもとに、 $x^7 - 1$ までの式を因数分解してできる式（因数）を予想する。CASを活用して、 $x^7 - 1$ までの因数分解を行い、紙と鉛筆による予想と比較する。紙と鉛筆による方法とCASによる方法との調和を、必要に応じて行う。

第6時：CASを活用して $x^{14} - 1$ くらいまでの因数分解を行い、得られた式に共通することなど $x^n - 1$ の因数分解について気づいたことを明文化し、議論する。また、指数 n を大きくしたときに、すでに見いだした性質が一般化できるかどうかを調べる。

（ $x^4 - 1$ の因数分解に関する調査などを行う）

放課後のグループでの追究：今までの学習をふりかえり $x^n - 1$ の因数分解について、どのような性質がさらに成り立ちそうか、CASを用いて調べ、議論を重ねる。 $x^n - 1$ の因数分解について、成り立ちそうな規則性や性質をコンピュータでのDerive 6を用いて検証する。

本稿では、CASを活用した $x^n - 1$ の因数分解の性質の探究に焦点をあてる。上記の第4時から第6時および放課後でのグループでの追究の過程である。特に、因数分解に対する意味形成に関わる第4時、第5時および第6時に行った調査までの授業の流れ、 $x^n - 1$ の因数分解に対する洞察に関わる第5時などにみられた生徒の顕著な意見に焦点をあてる。

3. $x^2 - 1$ から $x^4 - 1$ までの因数分解をもとにした $x^7 - 1$ までの因数分解の予想と比較

教授実験の第4時では、 $x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)$ すなわち「2乗の差が和と差の積で表せる」ことが、図1の面積図を通して確認される。図1の左側の図は、1点を共有し、大きさの異なる2つの正方形の面積の差として2乗の差をとらえる。一方、図1の右側の図では、左側の図形を対角線に沿って切断し、 90° 回転させてできる図形が縦 $x - a$ 、横 $x + a$ の長方形の面積と一致することを表している。また、長方形の面積の移動に着目した図2のような場合も確認されている。

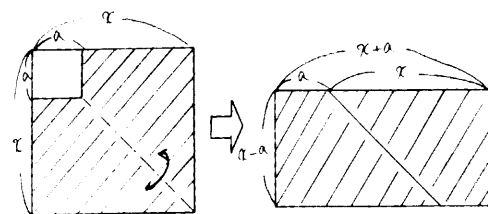


図1：2つの台形から1つの長方形に変形する

さらに、式変形により「2乗の差が和と差の積になること」も次のように確認される。

$$\begin{aligned}
 x^2 - 1 &= x^2 - 1 - 2x + 1 + 2x - 1 \\
 &= x^2 - 2x + 1 + 2x - 1 - 1 \\
 &= x^2 - 2x + 1 + 2x - 2 \\
 &= (x - 1)^2 + 2x - 2 \\
 &= (x - 1)^2 + 2(x - 1) \\
 &= (x - 1)\{(x - 1) + 2\} \\
 &= (x - 1)(x + 1)
 \end{aligned}$$

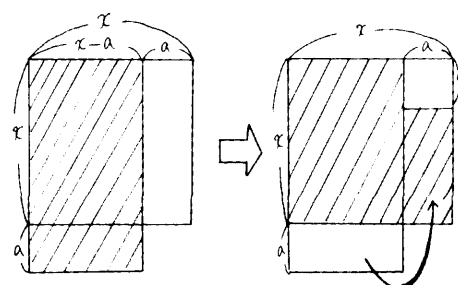


図2：長方形を移動させてできる差としての正方形に着目する

$(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$ の展開を活かして、 $(x + 1)(x - 1)$ を式と同値変形が導かれることである。この方法は、 $(x - 1)^3 = (x - 1)^2(x - 1)$ として、次々に展開を行うこと、得られた式の形から $x^3 - 1$ の因数分解に向かうことへの布石となっている。生徒にとっては、図1の方法が5月に行われた2次式の因数分解での学習を想起させ、親近感のある方法であった。

$x^2 - 1$ を因数分解する過程をふりかえり、 $x^3 - 1$ を因数分解し、その過程を確認することが行われる。例えば、式変形によって $x^3 - 1$ を因数分解した場合として、生徒A（図3）、生徒B（図4）の方法がある。

生徒Aは、 $x^3 - x + x - 1$ のように、あえて相殺できる項 $-x$ 、 x を入れて共通の因数 $x - 1$ をうまく導き出している。

$$\begin{aligned}
 x^3 - 1 &= x(x^2 - 1) + x - 1 \\
 &= x(x + 1)(x - 1) + (x - 1) \\
 &= (x - 1)(x^2 + x + 1)
 \end{aligned}$$

図3：生徒Aによる $x^3 - 1$ の因数分解

生徒Bは、 $(x - 1)^2$ の展開に関連づけて $x^2 - 1$ の因数分解を導き出した過程を参考に、 $(x - 1)^3$ の展開から $x^3 - 1$ の因数分解を導いている。生徒Bのように展開をもとに $x^3 - 1$ の因数分解を導こうとする生徒は多かった。ただし、同値な式で次々と変形していく過程に難しさを感じる生徒もいた。それゆえ、生徒Aのような因数分解が紹介されると、強い関心をもってその発表を聞いていた。

$$\begin{aligned}
 (x - 1)^3 &= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \\
 x^3 - 1 &= x^3 - 1 - 3x^2 + 3x - 1 + 3x^2 - 3x + 1 \\
 &= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 3x^2 - 3x \\
 &= (x - 1)^3 + 3x(x - 1) \\
 (x - 1)\{(x - 1)^2 + 3x\} &= (x - 1)(x^2 - 2x + 1 + 3x) \\
 &= (x - 1)(x^2 + x + 1)
 \end{aligned}$$

図4：生徒Bによる $x^3 - 1$ の因数分解

一方、 $x^3 - 1$ の因数分解については当初、次頁の図5や図6のように考える生徒もいた。

生徒Gの場合は、2乗の差が和と差の積になることをもとに、 x の指数が3になっていることから x をかければよい、と考えている。

(図 5)

生徒Hは、様々な試行錯誤を行っている。(図6)

「 $(x+1)(x-1)$ が x^2-1 なので $x+1$ をつければ x^3-1 になると思ったが…」という推論にみられるように、2乗の差が和と差の積になることを

さらに、 $(x+1)(x-1)(x-1)$ を展開して得られた式から、 $-x+x^2$ を消去するために、 $x-2$ という因数を考えている。結果的に生徒Hは、生徒Bによる発表を聞き、自分のプリントに記入を行っている。生徒G、生徒Hに共通するのは、「和と差の積」を活かそうという姿勢であり、「和と差の積」が過般化されやすい傾向である。

$x^3 - 1$ の因数分解の式を得るために、立方体の体積の場面で考えた生徒もいた。生徒Cは、一辺の長さ x の立方体の体積 ($x > 1$) から一辺の長さ 1 の立方体の体積をひくこと、と解釈し、図7のような立体図形を用いて $x^3 - 1$ の因数分解を導く。生徒Cの方法では、矢印の右側の図形について、手前の面を底面とみている。手前のL字型の図形の面積は、

$$x(x-1) + 1 \times (x-1)$$

で与えられ、奥行きを高さ x とみた体積

が $x \{ x (x - 1) + 1 \times (x - 1) \}$

である。また、矢印の右側の図形において、右奥の立体は底面が縦 $x - 1$ 、横 1 、高さ 1 の直方体とみることができる。その直方体の体積が $1 \times (x - 1) \times 1 = (x - 1)$ を計算している。

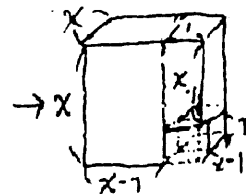
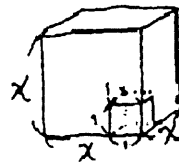
なお、教授実験を行ったクラスでは、式の因数分解や展開を図形で考えることが頻繁に行われている。例えば、5月下旬の数学授業では、 $a^3 + b^3$ の式が因数分解できるだろうかという問いが話題になり、立体図形を用いて $a^3 + b^3$ の因数分解に迫ることが行われていた。授業では2通りの方法が紹介されるが、その1つは図8の通りである。図8の方法では、1辺 $a + b$ の正方形から、隣り合う2辺が a 、 b となる長方形3つを取り去ったL型の面が考えられる。このL型の面の面積は、 $\{(a + b)^2 - 3ab\}$ で与えられる。また、このL型の面を底面として、高さ $a + b$ の立体図形をあげる。この立体が、 $a^3 + b^3$ を表すというのである。

$$x^3 - 1 = x(x-1)(x+1).$$

図5：生徒Gによる $x^3 - 1$ の因数分解

$$\begin{aligned}
 & \times (x+1)(x-1)(x+1) \\
 & (x+1)(x-1) \Rightarrow x^2-1 \text{ である } (x+1) \text{ をかけると } x^3+2x^2+3x+1 \text{ となる} \\
 & x^3-x+x^2-1 \text{ である } E_0 \\
 & (x+1)(x+1)(x-2) \\
 & (x^2+2x+1)(x-2) \\
 & x^3+2x^2+x-2x^2-4x-2 \\
 & x^3-3x-2
 \end{aligned}$$

図6：生徒Hによる $x^3 - 1$ の因数分解



$$\begin{aligned} & x\{x(x-1) + (x-1)\} + (x-1) \\ &= x\{(x+1)(x-1)\} + (x-1) \\ &= x(x+1)(x-1) + (x-1) \\ &= \{x(x+1) + 1\}(x-1) \\ &= (x^2 + x + 1)(x-1) \end{aligned}$$

図7：生徒Cによる $x^3 - 1$ の因数分解

実際、図8では下側に書かれている「縦 a 、横 $a-b$ 、高さ b の直方体」を引き出し、L型の立体のへこんでいるところにうめると一辺 a の立方体ができる。また、右下の残った立体は、一辺 b の立方体になっている。

以上の図形を用いた操作を式で表すと、次のようになる。

$$\begin{aligned} & \{(a+b)^2 - 3ab\} (a+b) \\ &= (a^2 + b^2 - ab)(a+b) \\ &= a^3 + b^3 \end{aligned}$$

念頭操作が必要な、立体図形に対する見方であるが、生徒たちは手振りや身振りを交えながら5月下旬の授業の中で、一生懸命推論を追っていた。3次式の因数分解を立体図形の体積に関連づけて追究しようとする姿勢が既にあったため、図7による説明がなされる際にも、手振りを交え考えようとする姿勢が生徒たちの中にみられた。

なお、この考えを提示し、授業の中で説明していた生徒は、後で例示する生徒Fである。

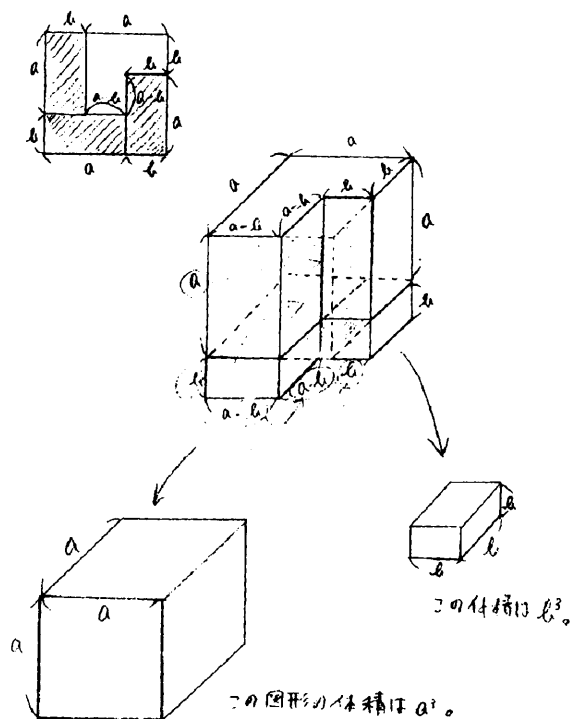


図8： $a^3 + b^3$ の因数分解を直方体や立方体の体積に関連づけて行う

$x^4 - 1$ の因数分解については、指数が平方数4であることから「2乗の差が和と差の積で表すこと」を用いて、右の生徒Dのように式を表す場合が多かった。「指数を2つに分けて和と差の積で表す」と過度に一般化している。

生徒Aの場合には、図9のように、式変形で同値な式を次々と導いている。 $x^4 - 1$ と同値であり、 $x^n - 1$ の指数 n が奇数の場合に多くみられる $(x-1)(x^3 + x^2 + x + 1)$ を示しながらも、最終的には $(x^2 + 1)(x^2 - 1)$ の式を掲げている。4行目が空欄であるのは、3行目と5行目に書かれた式を結ぶ変形がこの段階で見いだせなかったことを表す。(生徒Aは、図2と同一生徒、以下同様)

$x^4 - 1$ の因数分解については、生徒Dや生徒Aに代表されるように、指数が偶数かつ平方数であることから、「2乗の差を和と差の積に表すこと」を適用する傾向が強い。

第4時では、 $x^3 - 1$ を因数分解した式を導くことに多くの時間が割かれていた。そこで、第5時の最初に、 $x^4 - 1$ の因数分解では $(x^2 + 1)(x^2 - 1)$ にとどまるのではなく、これ以上分解できなくなるところまで式変形を進めること、因数にある $x^2 - 1$ をさらに分解することが授業全体場で、教師により確認された。

第5時では、最初に $x^2 - 1$ から $x^4 - 1$ までの因数分解をもとに、 $x^7 - 1$ までの因数分解を予想することが行われる。 $x^5 - 1$ から $x^7 - 1$ までの因数分解の予想に関しては、紙と鉛筆で行うように指示

$$(x^2 + 1)(x^2 - 1)$$

〈生徒Dによる $x^4 - 1$ の因数分解〉

$$\begin{aligned} x^4 - 1 &= x(x^3 - 1) + x - 1 \\ &= x(x-1)(x^2 + x + 1) + (x-1) \\ &= (x-1)(x^3 + x^2 + x + 1) \\ &= \\ &= (x^2 + 1)(x^2 - 1) \end{aligned}$$

図9：生徒Aによる $x^4 - 1$ の因数分解

される。生徒が自分の予想や考えをワークシートに記載した後に、CASによる方法で調べ、紙と鉛筆による予想と比較することが行われた。例えば、右の図10の生徒Eのワークシートのように、 $x^7 - 1$ までの因数分解の予想については左側に（「紙と鉛筆による方法」で因数分解しよう）、数式処理電卓で調べた結果については右側に（「Voyage200による方法」で因数分解しよう）記述するようにした。また、必要があれば2つの結果を一致（調和）させようということを示した。調和のさせ方については紙と鉛筆による方法から迫る、CASによる方法から迫る、いずれの場合でもよいとした。

生徒Eの場合、指数が4や6の偶数のとき、指数を半分にした形で「和と差の積」をワークシートの左側に書いている。その後、CASによる方法を通して、さらに因数分解できることを知る。右側に記載したことに基づき、左側に後から因数分解をした式を書き入れている。これは、左側の欄（セル）の下側に小さな字で式を書き入れていることからわかる。

また、生徒Eは指数が奇数の時には、 $x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ のように、2つの因数の積で表している。

さらに、生徒Eは $x^7 - 1$ の因数分解までを見通して、 $x^n - 1$ の形の式の因数分解について、次のように成り立ちそうな規則を挙げる。

〈生徒Eの掲げた、成り立ちそうな規則〉

ア $(x - 1)$ が必ず出てくる

イ 指数何かの2倍のとき、その何かの数が x の指数となる $x^{\square} + 1$ と $x^{\square} - 1$ をかけた数にできる。

ウ 指数が奇数のとき、 $(x - 1)$ の次にくる（ ）は、その指数 $- 1$ となる x の指数から、さらにその指数 $- 1$ をし続けた物の足した数 $+ 1$ となる。

生徒Eは、成り立ちそうな規則として掲げた上記イの性質について、CASによる方法で調べる。

$x^6 - 1 = (x^3 + 1)(x^3 - 1)$ などの式が、さらに因数分解が可能なことに驚いた様子であった。数式処理電卓の展開（expand）の機能を使って、 $(x - 1)(x^2 + x + 1)$ を展開すると $x^3 - 1$ になることを確認していた。このときには、表の上の方に書いた $x^3 - 1$ の因数分解の式をみて判断するのではなく、数式処理電卓での操作が最初であった。数式処理電卓での展開の操作、画面に出力された式をみる、改めて $x^3 - 1$ の表の部分を見直すという順序であった。まずCASによる操作で確認するという姿勢がみられた。

第5時の最初に、 $x^4 - 1$ の因数分解がこれ以上分解できなくなるまで式変形することが確認された。しかし、生徒Eのワークシートでは、当初 $x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1)$ と書かれている。生徒Eと同様に、 $x^4 - 1$ について、 $(x^2 + 1)(x^2 - 1)$ と書く生徒が何人もみられた。

「紙と鉛筆による方法」 で因数分解しよう	「Voyage200による方法」 因数分解しよう
$x^1 - 1$ $(x+1)(x-1)$	
$x^2 - 1$ $(x-1)(x^2+x+1)$	$(x-1)(x^2+x+1)$
$x^3 - 1$ $(x^2+1)(x^2-1)$ $= (x^2+1)(x+1)(x-1)$	$(x-1)(x+1)(x^2+1)$
$x^4 - 1$ $(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$	$(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$
$x^5 - 1$ $(x^3+1)(x^2-1)$ $= (x^3+1)(x-1)(x^2+x+1)$	$(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^2+x+1)$
$x^6 - 1$ $(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$	$(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$

図10：生徒Eによる予想とCASとの比較

生徒Aは $x^n - 1$ の因数分解について、 $(x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + 1)$ の形の式を最初にあげている。 $x^n - 1$ の形の式すべてがこの形で表すことができる、と推測している様子がみえる。さらに、生徒Eの場合とはワークシートの欄の中へ書き込む場所が異なるが、指数が偶数の時には「和と差の積」による式もあげている。 $x^n - 1$ の因数分解について、CASと紙と鉛筆との方法の比較を通して、指数が奇数、偶数の場合の違いを実感していた。

また、生徒Aのワークシートには $x^4 - 1$ を $(x^2 + 1)(x^2 - 1)$ と変形した式を使い、次のように紙と鉛筆で式変形しているメモがある。(図11)

$$\begin{aligned} & x(x^4 - 1) + x - 1 \\ &= x(x^2 + 1)(x^2 - 1) + (x - 1) \\ &= x(x^2 + 1)(x - 1)(x + 1) + (x - 1) \\ &= (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

生徒Aは、 $x^5 - 1$ を $x^5 - x + x - 1$ とみてから、次々と同値変形を行っている。

この式変形は、 $x^3 - 1$ に対する式変形と同じ考えに基づいている。

$x^5 - 1$ が、 $(x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ のように因数分解できることに対して、CASによる方法に触発を受けながら、CASと紙と鉛筆との調和を図ろうとしている。また、 $x^5 - 1$ の因数分解を行う上で、 $x^3 - 1$ や $x^4 - 1$ などの因数分解と関連づけようという姿勢もみえる。

$x^4 - 1$ $(x-1)(x^3+x^2+x+1)$ $(x^2+1)(x^2-1)$	$(x-1)(x+1)(x^2+1)$
$x^4 - 1$ $(x-1)(x^3+x^2+x+1)$	$(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$
$x^4 - 1$ $(x-1)(x^3+x^2+x+1)$ $(x^3+1)(x^2-1)$	$(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^2-x+1)$
$x^4 - 1$ $(x-1)(x^3+x^2+x+1)$	$(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$

$$\begin{aligned} & x(x^4 - 1) + x - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1) + (x - 1) \\ &= (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

図11：生徒Aによる予想とCASとの比較、メモ

右の2名の生徒の記述には、次の共通点がある。

- ・ $x^n - 1$ の形の因数分解では、すべての場合で2つの因数の積に表すことができる。
- ・ $x^n - 1$ の指数 n が偶数の場合、「2乗の差は和と差の積で表すこと」を過般化した、「指数を2つに分けて和と差の積で表すこと」を適用する。
- ・ $x^n - 1$ の指数 n が奇数の場合、 $x - 1$ 以外の因数は $x^{n-1} + x + 1$ の形をしていると考えたこと

「紙と鉛筆による方法」 で因数分解しよう	「Voyage200による方法」 因数分解しよう	「紙と鉛筆による方法」 で因数分解しよう	「Voyage200による方法」 因数分解しよう
$x^2 - 1$ $(x+1)(x-1)$	$(x+1)(x-1)$	$x^2 - 1$ $=(x-1)(x+1)$	
$x^3 - 1$ $(x-1)(x^2+x+1)$	$(x-1)(x^2+x+1)$	$x^3 - 1 = (x-1)^3 + 3x^2 - 2x$ $=(x-1)(x^2+x+1)$	$(x-1)(x^2+x+1)$
$x^4 - 1$ $(x+1)(x^3-1)$	$(x-1)(x+1)(x^2+1)$	$x^4 - 1 = (x^2+1)(x^2-1)$	$(x-1)(x+1)(x^2+1)$
$x^5 - 1$ $(x-1)(x^4+x+1)$	$(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$	$x^5 - 1 = (x^2-1)(x^3+x+1)$	$(x-1)(x^2+1)(x^3+x+1)$
$x^6 - 1$ $(x^3+1)(x^3-1)$	$(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$	$x^6 - 1 = (x^3+1)(x^3-1)$	$(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$
$x^7 - 1$ $(x-1)(x^6+x+1)$	$(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$	$x^7 - 1 = (x^3-1)(x^4+x+1)$	$(x-1)(x^3+x+1)(x^4+x+1)$

図12：因数が2つであり、指数が偶数と奇数の場合で因数の形に違いがあると予想

図12のワークシートでは、 $x^n - 1$ の指数 n が奇数の場合、次のような式が挙げられている。

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1), \quad x^7 - 1 = (x - 1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

指数 n が奇数の場合に、 $x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1$ という因数を想定する点など、2人の生徒の予想には一貫した生徒の論理がみられる。指数 n が偶数の場合、奇数の場合、それぞれにおいて、CASによる方法で得られた式をみるたびに、驚きをもって自身の予想をふりかえっていた様子が予測できる。

図10～図12のようなワークシートが、第5時における代表的な生徒の記述であった。

一方で、数式処理電卓を手渡した後から、主に3通りの動きが生徒の中にみられた。

1つ目は、CASによる方法による $x^n - 1$ の因数分解の探究を進めながら、紙と鉛筆の方法との調和を逐次図ろうとする生徒である。2つ目は、CASによる方法で $x^n - 1$ の因数分解を次々とする生徒であった。このタイプの生徒は、指数 n を次々と大きくする、ある数の倍数の場合で調べてみる、Voyage200での表示に時間を要する指数 n まで進めるなどであった。指数 n と $x^n - 1$ との関係や、そもそも $x^n - 1$ の因数分解がどのような形になるかに関心がもたれ、紙と鉛筆による方法との比較がおきにくかった。3つ目は、ある程度 $x^n - 1$ の因数分解をCASを通してみる、調べた後に、あえて紙と鉛筆による方法（同値な式変形）で次々と予想をしていく生徒である。いずれのタイプの生徒も、熱心に作業を行っていた。しかし、書くことそのものの、については生徒によって温度差がみられた。

4. $x^4 - 1$ の因数分解、因数分解とは何かに関する調査

第6時の最初に、 $x^4 - 1$ を因数分解して得られる式を選択すること、因数分解とは何かを文章で記述する調査を行った。第6時は、行事の関係で第5時までと間隔があいていた。

$x^4 - 1$ の因数分解については、次の3つの同値な式を提示し、因数分解の結果がどの式になるか、その理由を答える問題である。

ア $(x^2 + 1)(x^2 - 1)$

イ $(x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1)$

ウ $(x + 1)(x - 1)(x^2 + 1)$

この問題に対する、生徒の回答の反応率は「ア 24%、イ 5%、ウ 71%」であった。

「2乗の差を和と差の積で表すこと」を、 $x^n - 1$ の指数 n が偶数の場合に「指数を2つに分けて和と差の積で表すこと」に過般化した回答が多かった。これ以上分解できない形まで変形するという因数分解の定義に迫る見方（ウ）よりも、2つの因数の積に分解できるきれいさ、もとの指数を分けるという操作のしやすさなどが、優先されている。教授実験を行った生徒たちが、すでに5月、6月と2次式の因数分解や展開の学習を行っている。このことを鑑みると、 $x^n - 1$ の因数分解、特に指数 n が偶数の場合の考察を通して「因数分解とは何か」の概念がゆらいでいることがわかる。この事実、中高接続のはざまで多くの生徒たちが実感する、葛藤を感じる出来事といえるのではないだろうか。見方を変えれば、CASを活用して数学的な広がりや深まりのある、因数分解に関する代数的活動を行うことにより「因数分解とは何か」の概念理解がいったんはゆらぐものの、いくつかの例を通して、その理解が確たるものになる、と期待できる。

「指数を2つに分けて和と差の積で表すこと」に過般化することに関わる、選択肢アを選んだ理由として、例えば次の生徒Fの回答がある。

「ア、イ、ウどれを選んでも、展開していけば $x^4 - 1$ になるけど一番わかりやすく、短くしたものがアだから、アを選んだ。」

生徒Fは、この時点で因数分解について次のように述べる。

「多項式を違う表し方で表す方法。〇〇君も言っていたが、多項式をブロックのかたまりだとすると、因数分解はそのブロックを1つ1つにした形。その中で一番短く略されたものが因数分解だと思う。」

生徒Fは、わかりやすさ、みやすさ、簡潔さという視点で $x^4 - 1$ の因数分解をとらえている。選択肢ア〜ウに挙げられた3つの式について、それらすべてが同値であることを認めつつ、和と差の積にあたるアを選んでいる。

生徒Fと同じように、選択肢アを選んだ生徒の「因数分解とは何か」に対する回答として、次のものがある。

「因数分解として一番自然な形だから」

「 $x^4 - 1$ を面積と考えて () () の形から考えた。いちばん簡単な式であるアが正答ではないかな」

自然な形、簡単な式など、生徒の回答にあることばから、「2乗の差を和と差の積に表すこと」が生徒にとってインパクトのある因数分解の典型であるといえる。その見方に支えられ、「指数を2つに分けて和と差の積で表すこと」と過般化することは、生徒にとってのわかりやすさ、みやすさ、簡潔さという観点から支持されやすい傾向にある。

この生徒Fは、後日行ったインタビューの中で、同じ調査項目についてウを選択する。

生徒Fは、その理由として次のように答える。

「私は以前この問いにアと答えたが、 $x^2 - 1$ は $(x + 1)(x - 1)$ で表せるので

$x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1) = (x + 1)(x - 1)(x^2 + 1)$ という答えに変わった。」

一方、選択肢イの $(x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1)$ を選択した理由として「これなら x^4 のように2乗する数ではなく、どんな数にも適応できるので」などの回答があった。指数 n が奇数の場合にも成り立つ式であれば、奇数と偶数双方の場合にも適用できる、いつも適用できる場合で答えようという姿勢がみられる。この生徒は「因数分解とは何か」について、「分解できない数を文字でおくことで計算できるようにして、また再び数を文字でおき変えても答がでるようにすること。」と回答している。

第5時のところで例示した生徒E、生徒Aはいずれも選択肢ウの $(x + 1)(x - 1)(x^2 + 1)$ を選択している。例えば、生徒Eはその理由として「因数分解とは () 内の数がそれ以上因数分解できないところまで分解し、それらを () でつなげた物だと思うから」と述べる。

さらに、生徒Eは「因数分解とは何か」に対して「ある数を () で最小限までくくり、そのある数を () で表した物。つまり、必ずある数 = () () となり、その () 内でも因数分解できない最小の数となる。」と述べる。因数分解について「これ以上分解できない」という視点を抱き、選択肢ウを選んでいる。選択肢ウを選んだ生徒の中での、「因数分解とは何か」に関する回答としては、例えば次のようなものがある。

「僕のイメージでは、帯分数を整数へ直すということと同じように、複雑な数をまとまった形へと直して、わかりやすく、そしてシンプルにすることだと思いました。それにバラバラだった物を元通りにするというイメージを最初の正方形をつくる授業から感じ取ることができました。」

「難しい多項式を簡単にしたり、成り立ちを考えたりできること。」

「単純に言えば同じ項ごとにまとめることだと思いました。そして他の見方からすれば、例えば $x^2 + 2x + 1$ ならば $(x + 1)^2$ という形に表すことができます。これは図でもあらわすこともできま

す。その時にたて×横をやるように $(x+1) \times (x+1)$ をすると $x^2 + 2x + 1$ にもどります。

よって、分解前と分解後はイコールの関係で結ばれることがわかりました。」

「かけ算の形にまずなおしてから、() の中の次数をできるだけ小さくしていくこと」

「式(多項式?)を同じ数や文字で整理して、式をかけ算の形(単項式)にすること」

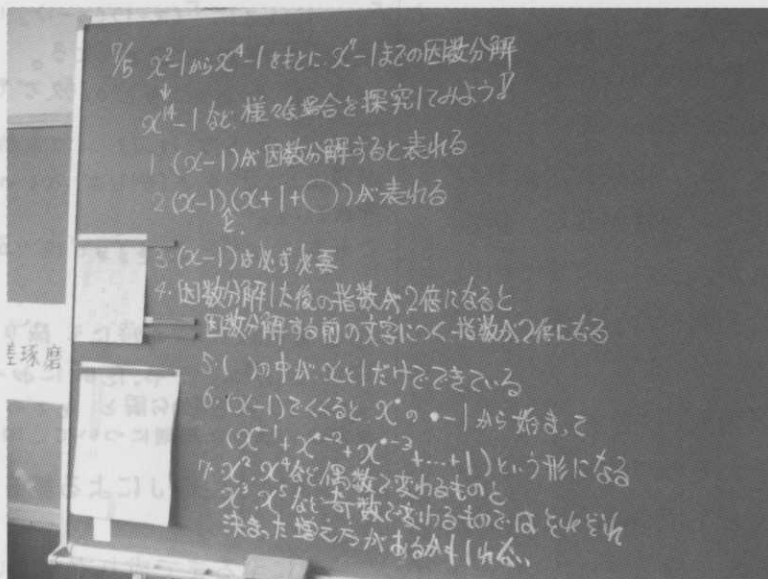
「答えになっているものを、もとにたどって最初の形に戻すこと」

端的に因数分解とは何かを述べたものから、展開と逆の変形を施すことを例を挙げて述べているものまで様々である。全体的には、因数の積に表すこと、これ以上分解できない形にすること、展開の逆の操作を施すことの3点の見方が融合した形でみられる。

5. $x^a - 1$ の因数分解の性質に対する洞察

第5時では、次の7つの意見がそれぞれ発表され、板書で確認された。

- 1 $(x-1)$ が因数分解すると表れる
- 2 $(x-1)$ と $(x+1+\bigcirc)$ が表れる
- 3 $(x-1)$ は必ず必要
- 4 因数分解した後の指数が2倍になると、因数分解する前の文字がつく、指数が2倍になる
- 5 () の中が、 x と1だけでできている
- 6 $(x-1)$ でくくると、 x^a の●-1 から始まって
 $(x^{a-1} + x^{a-2} + x^{a-3} + \dots + 1)$
 という形になる
- 7 x^2, x^4 など偶数で変わるものと、 x^3, x^5 など奇数で変わるものではそれぞれ決まった増え方があるのかもしれない。



上記の性質4については、授業の中で、例えば $x^4 - 1, x^8 - 1$ の因数分解が例として挙げられていた。

$$x^4 - 1 = (x+1)(x-1)(x^2+1)$$

$$x^8 - 1 = (x+1)(x-1)(x^2+1)(x^4+1)$$

$x^4 - 1$ を因数分解したときに得られる因数がすべて、 $x^8 - 1$ に引き継がれている。これは、先述した通り、 $x^8 - 1 = (x^4 - 1)(x^4 + 1)$ と式変形できることに支えられる。この性質について、 $x^4 - 1$ を因数分解して得られる因数 $x^2 + 1$ 、 $x^8 - 1$ を因数分解して得られる因数 $x^4 + 1$ の2つの式の指数の関係に関連づけて述べている。「因数分解する前の文字がつく、指数が2倍になる」の指数が2倍とは、もとの式 $x^4 - 1$ と $x^8 - 1$ などの関係を述べている。

第5時と第6時を終えた段階で、生徒Iは次のようにワークシートに記載している。

生徒Iは、印象に残った規則として「 $x^a - 1$ の a が素数の場合、因数分解すると $(x-1)(x^{a-1} + x^{a-2} + x^{a-3} + \dots + x + 1)$ となる。」という性質に印をつけている。

授業の中で話題になった性質7をもとに、指数が素数の場合での性質を洞察している。また、その後の記述では、 $x+1$ が因数として表れる場合が指数が偶数のとき、とも指摘している。

生徒Iのように、
 $x^n - 1$ の指数 n が奇数の場合を調べ、その性質を発見しようとした生徒は多い。例えば、生徒Jは第6時の段階で、次のように述べる。

(成り立ちそうな規則)

- ・ $(x^a - 1)$ の因数分解でた式は a の約数 倍数の式を因数分解した式に含まれている ① $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ $x^4 - 1 = (x+1)(x-1)(x^2-1)$
- ・ $(x^a - 1)$ の a が素数の場合 因数分解すると $(x-1)(x^{a-1} + x^{a-2} + \dots + x + 1)$ となる。 ② $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$
 $x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$
 $x^7 - 1 = (x-1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$
- ・ $(x+1)$ だけが因数分解して出てくるのは 指数が偶数のとき

※印象に残った規則について、印をつけておこう

図13：生徒Iによる第6時での $x^n - 1$ の性質に対する洞察

生徒Jは、 $x^n - 1$ の指数 n が偶数の場合について、最初に言及をしている。 $x^2 - 1$ の因数 $x-1$ 、 $x+1$ が、指数が偶数の場合に必ず表れることを述べている。続いて、指数 n が素数の場合に考察が移る。指数 n が、2 から67までの場合を調べた、と述べている。

(成り立ちそうな規則)

例えば

- ☆① $x^n - 1$ のときに「 $(x+1)(x-1)$ 」になる。これは x^4, x^6, x^8, \dots と指数が偶数になった時に必ずでてくる。
 これは、今のところどの数でも成り立っている。
- ☆② また 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... (素数) は必ず $(x-1)$ とその時の x の指数から1ずつ階段上に減る x (例えば x^5 のときは $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$) で構成されている。
 これも、 x^{67} に至るまで成り立っている。(そこまで調査中止)
 ここまでいけば大丈夫だと
 考えられたため。
- ③ は素因数分解の時に成り立っていた(と思われる)規則。
- ④ はこの「 x 」でや、た時にみつけた新しい規則。
- ⇒ のより素因数分解と x での因数分解にはつながりがあると考えられた。

※印象に残った規則について、印をつけておこう

図14：生徒Jによる第6時での $x^n - 1$ の性質に対する洞察

「(素数) は必ず $(x-1)$ とその時の x の指数から1ずつ階段状に減る

x で構成されている。これも、 x^{67} に至るまで成り立っている。」という生徒Jによる記述にみられるように、指数 n が素数の場合の規則性に関わる仮説をたて、ある程度調べてから、確信をもっている様子がみえる。

同様の傾向は、生徒Fにもみられる。生徒Fは、第6時の最初の段階では $x^4 - 1$ の因数分解として、わかりやすさ・簡潔さという観点から $(x^2 + 1)(x^2 - 1)$ を選んでいた。

生徒Fは、第6時の段階で次頁、図15のように記述している。生徒Jは、さらに調べてみたいこととして、「 x が3以上の素数の時、因数分解すると $(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$ となる。素数3、5、7、11、13、17、19、23、29、31、37、41、43、47、53、59、 \dots 。59までは上の規則が成り立っている。」をあげている。 $x^n - 1$ の指数 n が奇数の場合での規則性を見いだすことから、徐々に指数 n が素数の場合に移行してきたといえる。

3名の生徒(生徒I、生徒J、生徒F)のワークシートへの記述に代表されるように、指数 n がある条件を有するときに、 $x^n - 1$ の因数分解ではどのような共通点がみられるかという点に、多くの生徒の関心があった。

第6時の授業の後、これら3名の生徒を含む数名の生徒によるグループでの追究がさらに行われた。グループでの追究では、最初に生徒の最大の関心であった指数 n が素数の場合について、できる限り大きな素数の場合にも仮説が成り立つかの検証が行われる。その際、生徒個々に手渡しているVoyage200では、計算処理等に時間がかかる場合があり、適宜コンピュータ上でのDerive 6を活用した。生徒たちは、

大きくても3桁の素数の場合をみて、自分たちが掲げた性質が成り立つだろうと判断していた。

続いて、 $x^n - 1$ の指数 n がある条件を満たす自然数の場合、 $x^n - 1$ の因数分解にはどのような共通点がみられるか、という点に議論が進む。

生徒Iは、指数 n が4の累乗の数の場合を先に考え、続いて指数 n が5や6の累乗の数の場合での性質を追究している。

(成り立ちそうな規則)

x が素数 p (奇数) の時、 $(x-1)(x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1)$ となる。

でも、 x が2乗の素数合はならない。

<7桁>

$$\circ x^2-1 \rightarrow (x-1)(x^2+x+1) \quad \circ x^5-1 \rightarrow (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$$

$$\circ x^{10}-1 \rightarrow (x-1)(x^9+x^8+\dots+x^2+x+1)$$

(調べてみたいこと、調べてみたいことに対する自分の考え)

x が、3以上の素数の時、因数分解すると $(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$ となる。

素数 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, ...

つまりでは、上の規則が成り立っている。

図15：生徒Fによる第6時での $x^n - 1$ の性質に対する洞察

$$\begin{aligned} x^2-1 &= (x+1)(x-1)(x^2+1) \rightarrow 3 \\ x^4-1 &= (x+1)(x-1)(x^2+1)(x^2+1)(x^4+1) \rightarrow 5 \\ x^8-1 &= (x+1)(x-1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)(x^{16}+1)(x^{32}+1) \rightarrow 7 \\ x^{16}-1 &= (x+1)(x-1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)(x^{16}+1)(x^{32}+1)(x^{64}+1)(x^{128}+1) \rightarrow 9 \\ x^{32}-1 &= (x+1)(x-1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)(x^{16}+1)(x^{32}+1)(x^{64}+1)(x^{128}+1)(x^{256}+1)(x^{512}+1) \rightarrow 11 \\ x^{64}-1 &= (x+1)(x-1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)(x^{16}+1)(x^{32}+1)(x^{64}+1)(x^{128}+1)(x^{256}+1)(x^{512}+1)(x^{1024}+1)(x^{2048}+1) \rightarrow 13 \end{aligned}$$

x^a-1 の a が $4^2, 4^3, 4^4$ となるときの $()$ の数は奇数であり 2, 4, 8, 16, 32, ... $\rightarrow 13$ と前の数の2倍の指数になる

$$\begin{aligned} x^5-1 &= (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1) \\ x^{25}-1 &= (x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^{20}+x^{15}+x^{10}+x^5+1) \\ x^{125}-1 &= (x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^{100}+x^{75}+x^{50}+x^{25}+1)(x^{100}+x^{75}+x^{50}+x^{25}+1) \end{aligned}$$

x^a-1 の a が $5^2, 5^3, 5^4$ となるときの $-5, -25$ と指数が成り立っていく。

$$\begin{aligned} x^6-1 &= (x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1) \\ x^{18}-1 &= (x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^6+x^3+1)(x^6-x^3+1) \\ x^{72}-1 &= (x+1)(x+1)(x^2+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4+x^2+1)(x^4-x^2+1)(x^6+x^3+1)(x^6-x^3+1) \\ &\quad (x^{12}-x^6+1)(x^{12}-x^6+1)(x^{18}+x^9+1)(x^{18}-x^9+1)(x^{36}-x^{18}+1) \\ &\quad (x^{36}-x^{18}+1)(x^{72}-x^{36}+1) \end{aligned}$$

図16：生徒Iによる $x^n - 1$ の性質、 n が4、5、6の累乗の数である場合の洞察

生徒Iは、始めに $x^n - 1$ の指数 n が4の累乗の数の場合について、因数分解された式での因数の個数と指数 n との関係を探っている。続いて、因数の中で最大の次数をもつ多項式どうしを比較し、その次数が次々に2倍になっていることを指摘する。これは、生徒Iによる

「 $x^a - 1$ の a が $4^2, 4^3, 4^4$ となるときの $()$ の数は奇数であり、2, 4, 8, 16, 32, と前の数の2倍の指数になる」という記述からみられる。

の多項式（因数）のうち、最大の次数をもつ式は、もとの指数 n の半分になっていることをかなり大きな指数において確認している。

第6時及びその後のグループでの追究では、 $x^n - 1$ の指数 n がある条件を満たす数である場合に焦点が当てられた。例えば、次のように、指数 n が4、16、64と2の累乗の数のとき、因数の指数がいつも2の累乗をもつことを指摘したものがある。ワークシートに書かれた後半の式では、 n が262144であり、 $x^n + 1$ の□には131072となっていること等が記述されている。

6. まとめと今後への課題

本研究の目的は、CASを活用した $x^n - 1$ の形の式の因数分解に関する学習活動を通して、中学3年の学習者がどのように因数分解に対する意味形成を行い、さらに $x^n - 1$ の因数分解の性質に関わる洞察を行うのかを、教授実験を通して実証的に明らかにすることであった。

因数分解に対する意味形成については、「2乗の差を和と差の積に表すこと」を強調して考えようとする、その過般化した考えとみられる「指数を2つに分けて和と差の積で表すこと」を適用する行為がみられた。特に、 $x^n - 1$ の式で指数 n が偶数の場合に、簡潔さやわかりやすさという観点から、「指数を2つに分けて和と差の積で表すこと」を適用する姿勢がみられた。これ以上分解できないような因数の積に表す、という因数分解の概念に優先して、指数を2つに分けて2つの因数の積に表すという行為もみられた。2次式の因数分解から、特殊な式である $x^n - 1$ の因数分解を考えることによって、因数分解に対する認識がゆらぐ場合がみられた。

また、 $x^n - 1$ の式を因数分解する場面で、CASによる方法と紙と鉛筆による方法との違いに驚き、その違いを紙と鉛筆から迫ろうとする動きがみられた。この動きの背景には、CASによる方法に十分に慣れていなかったという段階から、紙と鉛筆による方法で迫るからこそ納得のいくようになるという段階まで考えられる。全体的な傾向として、紙と鉛筆による方法からCASによる方法への接近がみられたが、その背景については個別のインタビュー調査等々、質的な分析が必要となる。

$x^n - 1$ の因数分解の性質に関わる洞察としては、指数 n がある条件を満たす場合にどのような式が得られるか、どのような因数や因数の分布になるかの探究がみられた。生徒が最初に着目した性質は、 $x^n - 1$ の指数 n が偶数、奇数の場合である。 $x^4 - 1$ まで、さらに $x^7 - 1$ まで因数分解された式を対照しながら、仮説をたてていた。続いて、指数 n が素数の場合には、2つの因数の積になること、その一方は次数 $n - 1$ の多項式であることなどが見いだされる。

さらに、指数 n が4の累乗、5の累乗など、ある数の累乗の数の場合を調べながら、因数の個数、因数である多項式の特徴、その多項式にみられる各項の指数の関係などに焦点があたっていった。なお、指数 n は、具体的な自然数の場合での考察であった。また、 $x^n - 1$ の因数分解について発見した規則性について、驚きや美しさを感じたという旨の感想を書く生徒も多かった。同様に、当初掲げていた仮説が成り立たないという事実を知ったときに、強い驚きと「他の場合にはどうなるだろうか」や「もっといろいろな場合で成り立つ規則は何だろう」といった知的好奇心を抱く生徒もいた。

今後の課題は、次の2点である。

- ① 今回の教授実験で顕著にみられた因数分解に対する認識のゆらぎは、多くの中学生や高校生がもつものともいえる。因数分解に対する認識のゆらぎの要因、さらにはゆらぎを克服し、確たる認識に至るための要件を得るために、質的な分析を行う必要がある。
- ② 数学学習の質的深化は、「洞察と新たな意味形成」の2つの相の学習の連鎖により行われていく。

①の因数分解に対する認識も、「洞察と新たな意味形成」の繰り返しにより深まっていく。CASを活用した代数的活動における「洞察と新たな意味形成」の事例を中高連携の視点に立って、さらに考察する。なお、CASを活用した代数的活動の集積を通して、中学校段階に焦点をあてたカリキュラム形成も視野に入れる。

【謝辞】本研究を進め教授実験を行う上で、静岡大学教育学部附属静岡中学校・横田川文浩先生には大変お世話になりました。深く感謝申し上げます。また、同校3年の生徒の皆様にも深く感謝申し上げます。

【附記】本研究は、科学教育研究費補助金【課題番号：17530656、19530799】を受けて行われた研究成果の一部である。また、本稿は、第40回 日本数学教育学会・数学教育論文発表会論文集所収論文「因数分解の学習の質的深化を促す代数的活動 —CASと紙と鉛筆による方法との調和に着目して—」, pp.337-342のうち、教授実験の考察にあたる部分を大幅に加筆し、修正を加えた論文である。

【参考文献】

- C.Kieran and P.Drijvers (2006). *The Co-emergence of Machine Techniques, Paper-and-Pencil Techniques, and Theoretical Refraction: A Study of CAS Use in Secondary School Algebra*. International Journal of Computers for Mathematical Learning. 11:205-263.
- P.Drijvers & C.Kieran (2006). Reconciling Factorizations made with CAS and Paper-and-Pencil. 2:473-2:480, *Proceeding of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*
- A.Sacristan & C.Kieran (2006). Bryan's Story: Classroom Miscommunication about General Symbol Notation and the Emergence of a Conjecture, pp.5:1-5:8, J.Novotna (Eds). *Proceeding of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*
- C.Kieran (2006). Research on the Learning and Teaching of Algebra, 11-49, A.Guiterrez, P.Boero (eds), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*, Sense Publishers
- C.Kieran and D.Caroline (2007). "How Can We Describe the Relation between the Factored Form and the Expanded Form of These Trinomials? -We Don't even Know If Our Paper-and-Pencil Factorizations are Right." The Case for Computer Algebra System (CAS) with Weaker Algebra Students. 3:105-3:112, *Proceeding of the 31th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*
- D.Guin, K.Ruthven, L.Trouche (eds) (2005). *The Didactical Changing of Symbolic Calculators*. Springer
- J.Fey, A.Cuoco, C.Kieran, L.McMullin, R.Zbiek (eds) (2003) *Computer Algebra Systems in Secondary School in Mathematics Education*, NCTM
- 両角達男 (2006). 学校代数におけるCASを活用した代数的活動 —代数的活動をとらえる枠組みの構築に向けて—、静岡大学教育学部研究報告（教科教育学篇）第37号：29-47
- 両角達男 (2007). CASを活用した代数学習における内省を促す活動（I）. 静岡大学教育学部附属教育実践総合センター紀要No.13：9-20