範例的教授・学習理論に基づく数学授業の教授に関する研究

A Study of Teaching and Teacher's Role about Mathematical Classes based on "Exemplarisches" Teaching and Learning Theory

両 角 達 男
Tastuo MOROZUMI

（平成13年10月9日受理）

1.「よい授業」の連結への期待

授業は、教師が構想した目的やねらいを達成することを志向し、学習者同士、学習者と教師との協働において営まれるものである。授業構想にあたっては、教師の意図を達成するために最適と思われる学習場面や問題が設定され、授業の局面においては教師の意図を反映するために、様々な瞬時の判断が行われる。その瞬時の判断は、核となる学習者の活動を収集し、取り上げ、価値付けることで行われたり、教師からの問いかけやいくつかの問いの連鎖による方向付けがなされる。また、一斉授業における学習者の状況を踏まえながら、教師の意図それ自体を修正することが瞬時に要求されることもある。

多くの教師は、毎日の授業の営みで上記のことを念頭におき、「よい授業」を志向し努力を重ねている。また、「よい授業」を大きな学習単位で構想していくことにより、よい授業の連結としてカリキュラムを組んでいくことも可能となる。これは、教師の意図を踏まえた実施されたカリキュラムともいえよう。私自身、数時間を1つの学習単位とみた「よい授業の連結」を構想し、「よい授業の連結」を踏まえたカリキュラムづくりを、筑波大学附属中学校において志向していた。

この「よい授業の連結」のルーツの一つとして、数学教育現代化運動の頃、東京教育大学附属中学校数学科で開発された範例統合方式による数学授業を挙げることができる。範例統合方式による数学授業は、1950年代に西ドイツで盛んに議論された範例的教授・学習理論の影響を受けるとともに、その授業構成や評価に認知科学の知見を活用したものである。また、中学校3年間を通したカリキュラム構成を目指し、いくつかの試行・実験を経て形づくられていった。その範例統合方式の扱いに関しては、範例の扱いを複数の授業を一連のものとみなして捉えるか、あるいは1時間ごとのスモール・ステップで捉えるかなど、様々な議論が現在も行われている。

この範例統合学習の特徴は、小高・岡本（1989）の述べる次の4点に凝縮される。

① 重要かつ本質的な教材を範例として抽出し、問題形式にすること
② 範例としての問題を解決する過程を中心として、生徒の数学的活動を促すこと
③ 生徒同士のディスカッションを核にした授業形態を行うこと
④ 教育機器を効果的に利用すること

これらの4点は、現在多くの小・中学校で行われている問題解決型の算数・数学授業や、「よい問題」を扱った算数・数学授業の一つの規範となる点といえよう。

本研究では、現在多くの学校で志向されている問題解決型の算数・数学授業のルーツの1つといえる「範例統合方式」にスポットをあて、その「範例統合方式」の考え方に大きな影響を与えたとされる「範例的教授・学習理論」を考察する。その切り口として、「① 重要かつ本質的な教材を範例として抽出し、問題形式にすること」「② 範例としての問題を解決する過程を中心として、生徒の数学的活動を促すこと」の2点を挙げ、範例的教授・学習理論における教授、特に教師の役割を中心に考察をしていく。

また、本研究で「範例的教授・学習理論」に焦点をあてるもう一つの理由は、ドイツのWittmannらの提唱する「本質的な教授単元」に基づく理論を、多くの数学教育学者が引用し、参考にしている点である。ここで、Wittmann（1998）の主張する理論の要点を述べれば次の通りである。

○ 学校数学においては、その母胎となる数学を専門数学に限定して捉えるのではなく、関連する学問分野の知見を取り込んだ「広義の数学(MATHEMATICS)」を母胎として考えるべきである。その「広義の数学」とは、数学の教授学を中心としながら、関連する学問分野として「数学の歴史、認識論、論理、心理学、数学、コンピュータ科学、社会学、人類学、教育学、教育の歴史、一般教授学」などの知見を含め、さらに「教育実践への適用を通して得られたこと」をも含めたものである。

○ 科学を設計することとしての数学（DESIGN SCIENCE）の枠組みは、数学教育に対して、多くの有益な見方や考え方を与え、数学教育学者にこれから研究すべき観点を与える。そして、その枠組みは、一連の教授単元、そして教授単元をもとにしてつくられるカリキュラムなどの「人によってつくられたもの」の創出が、教育的なエコロジーの効果を調べていくことと同様に数学教育の核として大切である。

なお、教育的なエコロジーの効果とは、「教師－学習者－教材」の3つの軸の中でのやりとり（社会的相互作用）によって何が得られるか、またどのようなやりとりが望ましいかを追求していくことといえる。

○ 本質的な教授単元の形成、とりわけ本質的なカリキュラムの形成は最も難しい課題であり、その分野の専門家が行うべきところである。しかし、実際は研究者が積極的に行うのではなく、教育現場にいる教師たちにその作業がゆだねられてきた。本来、研究者たちが、一連の教授単元を形成するために枠組みなどを提示することが必要である。また、教育現場の教師たちは、自分たちが教える数学教室の状況に応じて、教授単元をつくったり、その教授単元を改良したりする必要がある。数学教育研究者は、「教授単元やそれらをもとにつくるカリキュラム形成」に対して消極的すぎたのではないだろうか。

○ 本質的な教授単元は、次の4つの性質によって特徴づけられる。

① 本質的な教授単元は、中心観念や数学教授の内容や柱を表している。

② 本質的な教授単元は、数学的な活動に対する豊富な源となる。

③ 本質的な教授単元は、適応性があり、特定化された授業や教室の状況に容易に適応することができるものである。

④ 本質的な教授単元は、全体論に基づく教授や学習の数学的、心理学的、教育学的な側面をもち、それゆえ経験的な研究を続けていくことによって、より多くの可能性を提供するものである。

○　本質的な教授単元は、子どもの思考過程に従って決められる「鍵となる発問」や「インタビューする側の仕事」の幾つかを分析的に用いていくことに、よく似ている。本質的な教授単元は、経験的な研究によって得られる「子どもの認知発達やピアジェ理論に基づく方法を適用させ、その結果を分析していく方法」によく似ている。例えば、ピアジェの心理学における道具としての「構造化された一連の問い」は、数学教育における「教授単元」に対応し、「分析的なインタビュー」は、数学教育における「分析的な教授経験」に対応する。

○　本質的な教授単元の実際への運用に関しては、日本で行われている数学授業から学ぶことが多い。

Wittmannは現在、初等教育プロジェクト“Maths 2000”をドイツにおいて行っている。その背景には、上記のような「本質的な教授単元」に基づく算数・数学授業構想や理論がある。
（国本，2001などの指摘）

このWittmannの指摘を踏まえ、数学教育における「教師－学習者－教材」のかもちだす環境での「エコロジー的視点」や文化論的視点の重要性を平林（2001）が、そして本質的な教授単元に基づく全体論の視座からみた授業構成の必要性を岡崎（2000，2001）などが指摘している。

こうした指摘で強調される「本質的な教授単元」構想は、よい数学の授業の連結として一連の授業を捉える「範例統合方式」あるいは「範例的教授・学習理論」と大きく関係しているといえる。Wittmannがドイツの数学教育研究者であることなどからも、彼が1950年代から大いに議論された「範例的教授・学習理論」の影響を受けていることが推測できる。

「本質的な教授単元」を「範例を起点にしたひとまとまりの授業」と解釈すると、Wittmannの述べる点と範例的教授・学習理論で重視される点との接点がみえること、さらに範例的教授・学習理論の現代的な意味と意義、さらに今後の可能性がみえてくるのではなかろうか。

本研究では、以上の２つの理由により、範例的教授・学習理論に基づく数学授業の教授について考察を行う。

２．研究の方法

範例的教授・学習とは、範例を通して学習者にとって適切な結節点が設定され、教師の適切な問いの連鎖や的確な状況把握を通して、次なる結節点に向かい、学習者の理解の様相と陶冶の段階が深まっていくものである。本研究では、1950年代の西ドイツに端を発する範例的教授・学習理論を、その理論の発展において中核的な役割を果たしてきたヴァーゲンシャインの言明を中心にしながら考察を行う。そのヴァーゲンシャインの言明に関しては、大高（1999）の学位論文を軸として解釈し、ヴァーゲンシャインあるいは範例的教授・学習について述べた諸論文なども踏まえ、数学授業への活用やその中での数学教師の役割を中心に考察していく。

そこで、次のキーワードをもとに、範例的教授・学習理論を考察していくものとする。

【考察のためのキーワード】範例、範例的なもの、理解の様相、陶冶、結節点、教師の役割

３．範例的教授・学習理論を特徴づけることがら

３－１．「範例」と「範例的なもの」について

数学授業の中で扱う問題が「よい問題」であるためには、少なくとも次のような要件を兼ね備えて

いることが必要であろう。（両角，2001）

○ 学習者の学習意欲を引き出すことができるもの
○ 多様なレベルで解決できるもの
○ 問題の解決過程の中で、新しい指導内容（概念、方法、考え方など）が身についていくもの
○ 問題を解決していく中で、既習の概念と関連をつけることができるもの
○ 問題解決後に、得られたことがらを数学として深めたり拡げたりできるもの

例えば、問題の中に「学習者の感性をくすぐるようなものや喚起することができるもの」が含まれていると、それによって学習意欲を引き出し、高めていくことができる。「何だろう？」「どうなっているんだろう？」に代表される知的好奇心を高める要素、「本当かな？」「そうならないんじゃないかな？」に代表される葛藤を起こす要素、「美しいなあ」「きれいだなあ」「すごいなあ」といった審美性・安定を追求する要素などによって、学習者の学習意欲を高めていくことができる。

こうした「よい問題」の捉え方に大きな影響を与えてきたのが、次の「範例」の考えである。

長谷川（1972）によれば、「範例」であるための要件は次の2点である。

① テーマは、教科構造におけるキーポイント（鍵的位置）あるいは重点を目指すものであること
② テーマは、学習者の自立性を喚起させる「驚きの疑問」をもつものであること

①と②の要件は、ヴァーゲンシャインの主張する「範例」の要件を長谷川がポイントをおさえて示したものである。この捉え方は、一方で対象内容すなわち教科の要求を組みながら、他方で学習者の問題意識の高まりやそれに基づく関わりを踏まえている。言い換えれば、②は学習のきっかけをつくり、推進力となるものであり、①は学習の方向性（深まりと拡がり）を規定するものである。このように、範例の要件を捉える理由として、学習は「驚き・感動→衝撃→変容→陶冶」のサイクルで進行していくという学習観がある。範例をきっかけにして、学習者は「驚き」を感じたり、あるいはそれが示す現象を知ることにより「感動」を得る。その「驚き」や「感動」が生じる原因を探っていく中で、既知の概念では容易に説明できないことを知り、何らかの「衝撃」を受ける。その「衝撃」は、範例そのものが教科の鍵的位置にあればあるほど、学習者にとって深いものであり、本質的である。「衝撃」に対して、学習者が既有の知識体系を活用したり、他の学習者や教師などに代表される他者との協働によって、その衝撃を引き起こす因果関係を知ることができる。そこで既知の知識体系の「変容」が生じるのである。その後、範例的教授・学習理論を特徴づける陶冶活動が進むことにより、学習者はより深まりのある状態に移行することができる。そうした一連の学習サイクルを引き起こし、その学習サイクルを進めるためには、起点となる「範例」の意味や意義に大変高いものが要求されることになる。

こうした「範例」の考えは、主に次の(ア)～(ウ)の要因から生まれている。

(ア) 教材や教育内容を過剰に学習者に与える状況を、改善し、克服する必要があること。
(イ) 教材や教育内容を、その教科のより本質的なものから精選し、抽出した教材や教育内容を集中的に学習させていく必要があること。
(ウ) 集中的な学習を通して、精選した教材や教育内容の理解のみならず、その背景にある見方や考え方や一連の学習のプロセスを反省的に捉えることによって得られる、教科構造などをも学習させていく必要があること。

(ア)～(ウ)の要因は、1950年代に端を発する西ドイツの教育界の情勢に由来がある。

三枝（1965）の言明によれば、1951年秋に西ドイツのチュービンゲンで開催された会議をきっかけに次のような状況を克服するための、教育理論の開発が促されている。

○　西ドイツの高等学校教育改革に対する重要な審議・決議を行ったものとして、その後のドイツ科学教育論および科学教育以外の教科においても、活用を図るきっかけとなる「チュービンゲン決議」が採択された。その参加者には、シュプランガー、フリットナー、ヴァイツゼッカーなどに加え、ギムナジウムにおいて長年物理学と数学を教授していたヴァーゲンシャインなどがメンバーとなっている。

○　チュービンゲン会議の主たるテーマは、学生の学力低下問題（特に高等学校卒業生）であり、「学校制度の構造にあまり干渉しないで、しかもそれほどお金をかけないで本質的な改善を目指す」ものであった。

○　教材の過剰投与によって、学習者の学習意欲が低下し、さらに学力の剥落現象が生じていると考えた。

○　チュービンゲン決議では、次のことが提案された。

・教材の過剰によって、精神的な生活を窒息させる危険があること。
・教材範囲を拡大することよりも、教授内容の本質的なものを、十分に徹底することが無条件に優先されること。
・試験の方法は、記憶的な知識よりも、一層理解力を目標とするべきであること。
・固定した教授要目的な「教科課程」の原理から、指導要領思案的な「準則」の原理へ立ち帰るべきであること。
・教師集団の自由な編成が可能であること
・本質的なものへ深化するためのカリキュラムを自由に構成できること

○　学習者にとっての本当の学力は、既成知識を盲目的に受容しただけでは剥落してしまう。自己限定において、そして学習者が日常で捉える例をもって、明らかにされ学力として身につくことができる。

このチュービンゲン会議において議論された内容、そして決議された事柄は、最近の我が国の理数教育に代表される学力低下論、およびそれを克服するための指針やヒントが述べられているとも読みとれる。1950年代の西ドイツの学習者を取り巻く状況の改善を目指し、教材を従来の系統的に配列された内容から選定・抽出していくことが求められる。この作業は、多くの系統的に配列された教育内容の中から、教科構造にとって鍵的位置であること、学習者にとって驚きの疑問を抱かせることの2つの観点から行われる。より本質的な教材を選定・抽出していくことであり、当初は「隙間への勇気」（取り立てて取り上げない教材が存在することに対して）と言われていた。その後、ヴァーゲンシャイン、デルボラフ、ショイアールなどに代表される議論を通して、「隙間」に対する消極的な意味づけから、選定・抽出した教材に高い価値を与える意味で「徹底性」の追求という言い方がなされていく。

端的に述べれば、教科と学習者双方の観点から「より本質的な教材」を抽出して、それを起点に授業実践をしていく中で、関連する事柄を自然な形で（関わりをもたせながら）学習していくことを指す。範例をもとに、適材適所で関わりのある内容を押さえていく学習といえる。

このように、「範例」には、教材をより本質的なものに精選するという強い考えがある。
さらに、「範例」は、それを通して「より本質的なもの」を学習者に開示し、あるいは照らし出すこ

とができるという考えがある。ヴァーゲンシャインは、範例を通して得られる「より本質的なもの」を「範例的なもの」と述べ、主に次の4つの段階を示している。(大高, 1999)

【ヴァーゲンシャインの示す「範例的なもの」】

① 学習者に衝撃や驚きを与え、既知のことがらとの対比や関連づけのもとに、理解の活動を促すような「個別的な教材やテーマ」

② 個別的な教材やテーマに関する理解や思考を乗り越え、それらを通して明らかになる「一般的なもの」、または他の特殊なものへ「転移が可能な方法、考え方、様式」

③ 「徹底性、自己活動性、発生的方法との関連、期待に満ちた注意深さ」という方法によって、範例より「より本質的なもの」を抽出していくための教授原理

④ 「放射、教科の機能目標、教科の境界の解消、テーマ、基準との関係」など、範例から「より本質的なもの」を抽出し、さらに学習者自身には「学び」に対する精神的な面での反省的思考や陶冶を行うための教授構想全体

上記の①〜④をいいかえると、次のようになる。(大高, 1999, pp.115)

①' 特定の教材やテーマ

②' 獲得される研究方法など

③' 陶冶を成立させるための教授原理

④' 陶冶事象と教授の原理、前提を包含する教授構想全体

ヴァーゲンシャインの初期の論文では、①あるいは②が「範例的なもの」として捉えられていたが、徐々に③や④のように範例的教授・学習に基づく授業を構想する要素や要素全体を指すように変わっていった。本稿では、①の範疇に属す「個別的な教材やテーマ」のうち、教師から授業時に提示されたり紹介される最初の「課題」や「学習場面」に対して、「範例」という用語を充てることにする。その「課題」や「学習場面」に対する学習者自身、学習者同士あるいは学習者と教師との相互作用を経て得られることがらを「範例的なもの」と呼ぶことにする。なお、「範例」に対する問題解決や思考活動により得られるすべてのことがらが「範例的なもの」とは限らない。「範例的なもの」は、教科構造の中で鍵的位置を持ち、教科の中で、あるいは学習者の学びの中で「本質的なものへの移行」が求められている。それゆえ、教師と学習者との間で繰り広げられる「本質的なものへの追求」という意図を持った活動によって、得られることがらと捉える。

ヴァーゲンシャインは、物理学における「範例的なもの」(根本的なもの)の例として、次の6点を挙げる。(大高、1999、pp.111〜112)

「○ 自然の経過の数学科可能性の経験

○ 測定・数学科・理論化する以前に、現象そのものが秩序や連関を認識させるという経験

○ 波動、場、原子モデルのような多少直観的比喩の考案によって、このような連関が本質的に修正されるという経験

○ 実験という方法が前提なしてはなく(孤立系、繰り返し可能性、観察者の人格からの独立性)、また絶対的な方法でもなく、一つの方法であるという経験

○ 物理学はまず分解し統合する方向に自己を限定し、それから定量的な概念に限定するという経験

○ 物理学は特定の理解様式として、自然のアスペクトを開くにすぎないし、その可能性に驚嘆せ

ざろうえないという経験」

この6つの事柄は、「物理学の本質的な特徴」と「物理学を学ぶことの意味や意義」の双方を端的に表した文章といえる。自然現象の数学化可能性、モデルを設定することの思考の自由度、実験をすることの意味は、前者を表す。また、要素に分解してからそれらを組み合わせる方法、自然現象の捉え方としての限界と可能性などは、後者を表す。「物理学の本質的な特徴」と「物理学を学ぶことの意味や意義」は、たくさんの自然現象やそれに関連する公式群を知っただけでは、なかなか理解することができない。自分の行ってきた思考活動を「反省的に分析」し、その意味や行為を「教科の中で」と「自分の活動の中で」の双方で深く捉えようとすることが必要である。ゆえに、最も本質的ともいえるこれら6つのポイントに至るためには、学習者自身がそのような思考をするための意欲を高めること（感動、衝撃、驚きといった活動）、学習者の内面を揺り動かすような教師からのアクションが必要となる。

「範例的なもの」は、本質的なものが存在するという前提に立つ実存哲学を基調にした見方である。そして「範例的なもの」は、教科の中でのキーポイントとなることがら、その教科特有の見方や考え方、推論の方法などに加え、範例からスタートする学びを学習者自身が反省的に振り返ることによって得られる「自分の学びや活動の意味や意義」「得たことがらから帰結される教訓」「自分と対象との関わり方、そしてその関わり方の可能性と限界」なども「範例的なもの」に含まれる。前者は、教科としての学びの深化を表し、後者は精神的な面での陶冶の深化を表す。特に、精神的な面での陶冶に関しては、実質陶冶と形式陶冶を乗り越え、それらを結びつけるものが「精神陶冶」であるというヴァーゲンシャインの考え方や、ドイツ教育論が背景にある。自分の学びを自他の比較や異同を通して反省的にとらえ、自分自身のあり方やそのアイデンティティーを考える、などに代表される人間形成を、教科学習を通して行おうとする思想がある。この点は、日本固有の教育理論にかなり近い面があると考える。そうした「精神陶冶」が大変特徴的であるが、ヴァーゲンシャインの示す4つの「範例的なもの」を数学授業を念頭において、端的なことばで表現していくと次のようになる。なお、ここでは本質的なものへの追求における「人間形成」の部分を、人間的なものへの気づきと示した。

【数学授業における「範例的なもの」】
(a)' 概念
(b)' 方法、考え方、様式
(c)' 数学的なものの本質
(d)' 人間的なものへの気づき

範例的教授・学習理論において、「範例的なもの」を4つの徐々に深まっていくものとして捉えた背景には、次のような理解観や陶冶観が存在する。

3－2.「理解の様相」について

ヴァーゲンシャインは、「理解」には次の6つの段階があると考え、それらの段階を踏まえて授業を構想し実践していく必要性を主張する。この6つの段階では、①から徐々に理解の様相が深まっていくと捉える。なお、ヴァーゲンシャインの論文ではkennen（知る）ということばが用いられているが、このことばの使われ方が「理解」と同義であると捉え、ここでは「理解」の用語を用いる。（大高，1999，pp.162～177）

① ことばでのみ知る段階
② 技術的処理・操作の段階
③ 理解（納得）の段階
④ 専門の方法の訓練の段階
⑤ 系統的拡張の段階
⑥ 専門から距離をおく科学的考察の段階

①〜⑥の理解の段階は、ヴァーゲンシャインの述べる物理学における落下法則の例をもとに解釈すれば、次のように表すことができる。

① ことばでのみ知る段階
…例えば、落下運動の状態を表す“$S=1/2gt^2$”の式が示すことを、その式の表面的な構造に沿って「ことば」で読むことができること。すなわち、定理の内容は詳しくわからなくとも、その内容を字句を通して表面的に読み知ることができる段階。

② 技術的処理・操作の段階
…定理や公式などが表していることを理解し、その意味に即して定理や公式を活用することができること。例えば、“$S=1/2gt^2$”の式に対しては、落下運動をする物体の移動距離が「所要時間の2乗に比例する」ことや比例定数として「定数gの数値の1/2が存在する」こと、のように公式の意味を式の順序に沿って読めるだけでなく、具体的な移動時間を表す数値tに対する移動距離を求めるといった処理ができるようになる段階である。この公式では、等式の性質に基づく式変形を行ったり、目的に応じて式変形を行うことなども、この段階に入ると考えられる。

③ 理解（納得）の段階
…定理や法則を活用することができるだけでなく、その定理や法則を自分なりに語ることができ、他者にその意味を説得する（納得させる）ことができること。

この段階では、②よりも定理や法則をより深く「理解する」ことが求められ、なぜそのような定理や公式になるのか、どこからその定理や公式を得ることができるのか、といった定理や公式にまつわる背景を探り、それをもとに定理や公式を見直すことになる。

④ 専門の方法の訓練の段階
…③で納得した定理や公式などを、その教科で学習する方法によってきちんと説明できること。数学では、定理を証明することであり、公式を初期値や仮定にあたる条件を基にして、演繹的に示していくことである。また、自然科学では、実験を通して、定理や公式を満たす事例を見出し、確認することである。

⑤ 系統的拡張の段階
…④で学習した教科独特の方法について、その意味や意義をより深く考えたり、他の場面での活用可能性などを検討することなどにより、関わりのある分野や領域、その教科全体の仕組みを洞察しようとすること。④を起点として、定理や公式の背景にある見方や考え方、さらに教科の中でのその定理や公式の位置づけといった「潜在的なもの」を見出そうとする段階。

⑥ 専門から距離をおく科学論的考察の段階
…得られた見方・考え方や知見などを、既知のものと比較したり、今までの自分の学びと比較することにより、ある側面（アスペクト）に着目して得られたものであるといった見方ができる

こと。また、現段階では、ある限られた側面からしか現象をとらえていない自分を意識することにより、自分の学びのその時点における可能性や限界を考えることができる。

これらの「理解の6つの段階」は、題材を数学に限定すれば「理解」を次の3つの段階で捉えていると解釈できる。

第Ⅰ段階：「定理や法則」を知り、それを使うことができる段階
第Ⅱ段階：「定理や法則」を数学として学び、その妥当性を示すことができる段階
第Ⅲ段階：数学としての「定理や法則」の学びや自分の学びを反省的に捉えることができる段階

なお、第Ⅰ段階は①と②を、第Ⅱ段階は③と④を、第Ⅲ段階は⑤と⑥をそれぞれ表す。

例えば、ピタゴラスの定理の証明を知らなくても、ピタゴラスの定理を知り、それを使って計算ができることが第Ⅰ段階である。直角三角形の各辺をa，b，cとおいたときに、$a^2+b^2=c^2$という式を知っていて、a，b，cのうち2つの数値を与えられるとそれに伴って他の1つの辺の長さが計算することができる状態である。第Ⅱ段階では、ピタゴラスの定理を既知の図形の性質を基に演繹的に示し、数学的な証明の意味を知ることができる段階である。例えば、面積が等しい図形に次々に置き換えて考えていくこと、相似の関係にある図形に着目すること、直角三角形を4つ用いてできる図形の面積に着目することなど、様々な方法によってピタゴラスの定理はその妥当性を示していくことができる。また、既に妥当性を認めた、あるいは示した図形の性質群から、それらをうまく組み合わせることによって、新たな図形の性質の妥当性を示すことができるという数学的な証明の意味を知ることができる。

第Ⅲ段階では、自分と他者の数学的活動の比較や反省的なとらえを通して、ピタゴラスの定理の数学的な意味や意義を洞察したり、学習者自身が自分の変容を認識することである。このことにより一段階高いレベルで自分を捉えることができる。例えば、演繹的に図形の性質の妥当性を示すということに対しては、「数学的諸真理の相互依存性」，「数学的諸真理の根源性」，「数学体系の演繹性・無矛盾性」といった事柄が洞察可能である。また、ピタゴラスの定理に関わる性質をさらに一般化させようと考えれば、面積定理としては直角三角形の各辺を1辺とする、相似な図形どうしの面積間の関係を表すものとなる。また「2乗」の部分の拡張にこだわれば、フェルマーの定理へのプロローグとなっていく。また、授業の中で営まれた証明の営みを反省的にとらえれば、証明の社会的な意味として法的思考と数学的思考などの類似性への着目、それぞれの個人の特性に依存することなく平等に議論することができるといった公平さへの着目を導き出すことができる。

範例的教授・学習理論では、第Ⅲ段階の理解が特徴的であり、範例を通して徹底的かつ連続的に思考を続けることを通して、理解を深めることが要求される。

ヴァーゲンシャインは、その陶冶観を次のように説明する。(大高，1999，pp.53～56)

「我々が望んでいるのは、教材を切り取ることではなく、選択することである。しかもそれは『ヴィルヘルム・マイスター』や『教育州』の中でゲーテが述べているような意味で選択することである。つまり、学ばれたものがゲシュタルトをもち、一つの有機体であり、成長するものである、という意味である。このときは、翻訳できないドイツ語である『陶冶』が、それ本来の意味で理解されているのである。つまり、状態としてではなく、成長するプロセスとしての意味で、学校がめざさなければならない決して完結しないものとしての意味で、形成する行為を開始することとして

の意味で理解されているのである。」

また、ヴァーゲンシャインの陶冶観を特徴づける5つの要素として「分裂しないものであること」「人間の内面の豊かさ、信頼、畏敬の念を覚醒すること」「感動を本質的な契機とすること」「自己活動の中で実現されること」「対話によって引き起こされること」が挙げられる。

特に、「対話」に関しては、次のように主張する。

「なにものも対話ほど、我々の思考の実質を活動させるものはない。……陶冶は確かに、個人的なプロセスではあるが、それは事実と学習者の間だけでは決して起こりえないのである。われわれのだれもがいつでも集団であることを学んでいる。その陶冶プロセスの進行には、乗り物『対話』が必要なのである。」

この対話の活動の重視の背景には、ヴァーゲンシャインがソクラテス的な対話のプロセスに大きな価値を抱いていることがある。陶冶を進める上で、「対話」に大きな意義があると捉えることにより、共同体としての授業の営みによって陶冶が連続的に生じていくと考えることができる。また、共同体における議論を通して、他者との対話、自分自身との対話のように徐々に議論から「対話」に変化していくことが予想される。一斉授業における議論からいかに哲学的な意味での対話が生じ、さらに個人の中で陶冶が発生していくのかという点については、より詳細な研究が必要であるが、数学授業における陶冶活動を分析していく中で「対話」は大きな切り口となる。

また、ヴァーゲンシャインは範例的陶冶の成立過程として、次の2つの命題を挙げる。

「1．教科のある適切な個別的問題の解明に印象的かつ熱心に深く没頭すればするほど、ますますその教科の全体をひとりでに獲得する。

2．ある教科に深く没頭すればするほど、教科の壁がひとりでに必然的に解消する。
そして、相互に連関している人間らしくする深みに達する。この深みに全人としてのわれわれは根ざしているのであり、ここで心の底より感動し、衝撃を受け、変容され、ゆえに陶冶されるのである。」

「深く没頭する」（徹底性）に基づいて、個別的なものから全体への放射が起こると考えているのである。ヴァーゲンシャインは、「照明」や「開示」という概念を用いて、理解が深まりかつ陶冶が進むことを説明する。範例を通しての学習者の活動に対して、あたかもサーチライトで焦点化して照らし出すことができるように、より本質的なものを「照明」し、学習者自身に対して「開示」されると考えている。「照明」のもつある部分を強く照らし出すという焦点化と、一旦他の部分を捨象して考えるという二面性を持った機能が、その照らし出した部分に関する理解を進めさせる。

こうした陶冶は、次の4つのステップを踏むことにより深化していくと考えられる。

【「変容→陶冶」の深まりを示す4段階】
Ⅰ．得られたことがらの意味や価値の探求
Ⅱ．「私の」あるいは「我々の」概念の発生史の探求
Ⅲ．概念や方法の焦点のあて方（アスペクト）の探求
Ⅳ．「私と他者」「私と対象」との関わりやあり方の探求

このⅠ～Ⅳのステップは、学びの中でいかに学習者が「私」を意識し、そのあり方を問うていくかという点によって深まりをみせていく。例えば、ある数学の概念を獲得する際に、それに関わる数学的な見方や考え方を思考していくことによって、概念の理解が一層深まる。さらに、その数学の概念の発生に着目し、学習者自身の概念の獲得の仕方と他者のものを比較することにより、数学の概念に関わることがらをより明確にすることができる。

ⅠからⅣのステップを徐々に進行することにより、「範例的なもの」の４つの段階のうち、「人間的なものの気づき」が可能になってくるのである。

３－３.「結節点の形成」について

ヴァーゲンシャインは、物理学における諸法則や現象、数学における諸定理を「下から順に積み上げて」学習させていく方法は、学習者の学ぶ意欲を減退させる可能性が高いものとして、これとは異なる学習方法を主張する。その学習方法は、ある時点における学習者の学びの上で、高すぎず低すぎない「範例」を準備し、その範例を手がかりに「範例の近傍」（範例に関連する既習の事柄と新しく学ぶ事柄の双方の意味で）を学習させ、ある程度高まってきたところで「次なる範例」を提示する方法である。これは、スモールステップの問題の連結させていく方法ではなく、主たるテーマにあたる問題をもとに、それに関わる「問い」を順次解決していくものである。それゆえ、数時間の授業を１つの学習単位とみなし、その数時間の中で「範例」に関わる事柄をおさえていくことが教師に求められる。教師側にとっては、数時間の授業の中で、おさえるべき事柄を自在に配列したり、学習者の状況に応じて取捨選択することが可能になる。また、学習者にとっては、数時間の授業が１つの大きなストーリーをもって流れることになり、数時間の授業全体を流れる目的意識を持ちながら学習を進めることができる。「範例から次なる範例まで」の学習では、教師側には指導の自由度を、学習者側には学習の目的性を高めるメリットがある。

「範例」から「範例の近傍」の学習に進み、そして「次なる範例」に向かっていく学習方法は、ちょうどプラットホームから乗り込み次のプラットホームまで進んでいく様子に似ている。ヴァーゲンシャインは、幾つかの節目によって形作られる道を喩えとして、節目にあたる部分を「結節点」あるいはプラットホームと呼び、その結節点に学習者が入っていくことを「アインシュティーク」（乗り込むこと）という語をあて表現する。

ヴァーゲンシャインは、アインシュティークを次のように定義する。（大高，1999，pp.178）

「アインシュティークは、第一のプラットホームに相応している問題において、『用意された』予備知識なしに、『乗り込むこと』、それゆえ、相対的に複合的で、そのため子どもの自発性を誘発する疑問に取り組むことを意味している。」

この学習方法を、数時間を１つの学習単位とみる数学授業を想定して表せば、次の５つのステップを踏んで学習を進めることといえよう。

【結節点を踏まえた一連の数学授業の展開のあり方】

① 適切な結節点（プラットホーム）を設定するために、範例の設定とその提示方法を工夫すること。

② 結節点からの学習者の乗り込みを自然な形で行えるように、学習者の理解の状況の読み取りと適切な問いを提示していくこと。また、学習者の活動の中で核となる活動を取り上げていくこと。

③ 乗り込んだ後は、範例の理解や解決に必要な予備知識を徐々に想起させ、かつ印象づけていく

こと。

④ 関連する予備知識の系列から、何が得られるのかを整理させ、それらから帰結される事柄を明確にすること。

⑤ 結節点からの乗り込みを通して、学習者が得られた事柄を明確にさせること。

また、この段階でできたこと、できなかったことを反省的にとらえさせること。

①～⑤のサイクルで表される学習は、結節点から思考活動に入り、「範例→範例の近傍→近傍を含む部分→全体への洞察」といえる。

3－4.「教師の役割」として考えられること

「範例」をきっかけにして、結節点から学習者が思考活動に乗り込み、驚きや感動を経てから、衝撃→変容→陶冶というサイクルを経て一連の学習を進めていくためには、どのようなことが教師に求められるのだろうか。範例的教授・学習における理解の様相や陶冶観を踏まえると、次の点が教師の役割として求められると考えられる。

○ 教科構造の主要な部分（鍵的位置）に添って、そして学習者の状況を踏まえて「範例」をつくること。その際に、範例に対する「範例的なもの」を明確にしていく。

○ 学習者の理解の様相を把握し、それを踏まえながら、適切な学習場面を範例とその提示方法の工夫よりつくり出す。

○ 範例から「範例的なもの」への移行を促すために、「問いの連鎖」を通して、より本質的なものを追求させていく。また、学習者側に主体的な「問い」が生じるように、核となる学習者の活動を拾い上げ、それを焦点化する活動を行う。

○ 学習者自身に、学びを通して得たことがらの意味や価値、学びそれ自体を反省的にとらえさせることを促す。

○ 実際の授業実践を通して、問いの連鎖や反省的思考を促す行動原理となる機能目標を形作っていく。また、既に教師が抱いている機能目標を再検討する。

本稿では、数学授業を念頭におき、「範例的なもの」として考えられる事柄や「範例から範例的なものへの移行」を促す「問いの連鎖」や、核となる学習者の活動を拾い上げ焦点化することについて、事例をもとに述べていく。

範例から範例的なものへの移行、結節点から次の結節点までの高まりを進めるためには、教師側に適切な問いを準備したり、状況に応じて問いを発すること、あるいは核となる学習者の活動を取り上げることを通して方向付けを図ることなどが要求される。そのよりどころとなるものが「機能目標」である。

例えば、クニューベルは「機能目標」に対して、次のように述べている。（長谷川，1974）

「機能目標を確立することは、どんな教授でも無条件に必要な事前考察に属する。機能目標がなければ、陶冶活動としての範例活動は不可能である。機能目標のうち、範例的な陶冶努力の意図が表されるからである。」

また、長谷川は地理教科の機能目標に関して、クニューベル、シュルツエ、ヴォッケの三者の言明を比較しながら、次のように述べる。（長谷川，1974，pp.88～95）

「（三者に）共通していることは、第一に、地理的な諸事実、それらの関連に関する諸概念や類型などの理解という面に機能目標が設定されていないことである。むしろ、理解の方法の背後に働いている地理的見方ともいうべきもの、地理的な原理や範疇の把握という面にあるということである。

第二に、そういう把握を通じて、人間存在に関わる経験をさせ、人間主体のあり方の自覚をさせようとする面に、機能目標の設定の中心を求めていることである。機能目標が、教科の基本的経験であるという理由も、その面にあるように思われる。」

この長谷川の言明より得られることは、範例的教授・学習理論における機能目標は、教科の面と人間形成の面の双方から形作られている点である。前者では、概念の理解にとどまらず、例えばある事柄にみられる数学的な見方・考え方を追求したり、数学特有の推論の仕方を知ることなどがあたる。後者は、人間的なものの気づきをさせるための行動原理といえよう。

また、ヴァーゲンシャインは、物理教授としての機能目標を次のように挙げている。（大高，1999，pp.86～93）

「1．精密自然科学において、理解するとは、原因を見出すとはどんなことかを経験的に知ること
2．どのようにして測定的実験を考察し、実施し、評価するのか、そしていかにしてその実験から数学的関数を得るのかを経験的に知る。
3．物理学のかなり多くの領域がどのようにして他の領域と関係づけられ、いわばそこに解消されているのかを経験的に知る。
4．物理学において「モデル」とは何かを経験的に知る。
5．物理学の研究方法そのものが、いかにして考察の対象になるのか、科学論的考察の対象になるのかを経験的に知る。
6．いくつかの概念形成に即して、自然を解明する物理学的様式が精神史的にどのように生成してきたかを経験的に知る。
7．技術的（発明的）思考と発見的思考がどのように区別されるのかを経験的に知る。
8．時期尚早の数学化やモデルがなくても、物理学の基本構造全体を区分し、結びつける現象論的（そして「定性的」）連関がどのように経験的に知る。」

大高（1999，pp.92～93）は、物理教授の機能目標は「物理学とは何かを経験的に知ること」と捉え、上記のヴァーゲンシャインの示す物理教授の機能目標を、次のように端的に示す。

「1．個別的現象の理解
2．実験・測定・数学化（関数）
3．部分領域を他の領域に組み入れること（現象論的）
4．「モデル」とは何か（ある部分領域の他の領域への解消）
5．考察の対象としての物理学的認識
6．精神史の構成要素としての物理学
7．研究と技術との区別（発見と発明）」

この分類では主に1～5において教科の面、6と7において人間形成の面に着目されているといえる。大高による分類で、物理の部分を数学に変えると、次のような機能目標のリストを得ることができる。

「1．数学の個別的な概念を理解すること
2．数学的な見方や考え方を理解すること、現象を数学的に分析する方法を知ること
3．数学のいくつかの概念や考え方の相互関連性を理解すること

4．数学における「モデル」の意味を理解すること（モデルを介した他の場面への適用）
5．数学特有の研究方法それ自体を考察していくこと
6．数学の概念の発生史を分析することを通して、その形成過程における人間的なものに気づくこと
7．新しい場面に対して、既有の数学に関する知識体系を活用して、その構造を数学的に分析していくこと、さらに数学的に分析する自分自身の存在を認識すること」

この機能目標のリストでは、1から5の順に従って、対象としての数学の学びが深化していくことを示している。例えば、ピタゴラスの定理は、余弦定理の特殊な場合とみることができるが、この関連性はピタゴラスの定理を面積定理と見た「典型的なモデル」（直角三角形の各辺を1辺とする正方形の和として、図の変形から$a^2+b^2=c^2$を捉えるもの）を媒介にして捉えることができる。もちろん、式表示の上で$\cos 90^\circ = 0$を用いれば特殊であることがすぐ導かれるが、典型的なモデルを用いて、その図の変形として視覚的に「ピタゴラスの定理は余弦定理の特殊な場合」を捉えた方がわかりやすい。上記の4は、そうした活動を指す。

6と7に関しては、数学の題材を追求する「私」を分析することによって、陶冶活動を進めていくことを表す。この部分は先述したように、「得られたことがらの意味や価値の探求→『私の』あるいは『我々の』概念の発生史の探求→概念や方法の焦点のあて方の探求（アスペクトの意識）→『私と他者』『私と対象』との関わりやあり方の探求」のように細分化されて「人間的なものの気づき」に向かっているのかもしれない。

問いの連鎖や反省的思考を促す行動原理となる「機能目標」に関しては、実際の授業実践における教師の活動を踏まえながら、上記の1～7の項目を再検討していく必要がある。その際に、NCTMから出たStandards 2000における幾つかの教授原理が役立つと思われる。Standards 2000での言明、そして関連する論稿における主張を踏まえながら「機能目標」について考察を深めていきたい。

3－5．「範例的教授・学習」とは

範例的教授・学習は、教材過剰投与による学習者の学習意欲の低下、学力の剥落現象を改善するために、より本質的な教材を抽出・設定して、その教材を起点にして「驚き・感動→衝撃→変容→陶冶」のサイクルで、学習が深化することを志向した授業実践に基づく理論である。教科構造の鍵的位置にあり、学習者の自立性の喚起を念頭において、設定された教材を「範例」と呼び、その「範例」が工夫された提示方法などにより、ある時点の学習者に適切な「結節点」が形成される。学習者は、その「結節点」から思考活動に自然な形で入り、教師からの「問いの連鎖」や核となる学習者の活動の焦点化を通して、範例に関わることがらの理解を深化させていく。理解の深化は、単に教科の側面の理解にとどまらず、学習者自身の学びを反省的にとらえることにより、人間的なものの気づきが生じていく。そうした精神陶冶の重視に特徴があり、より本質的なものとしての「範例的なもの」を学習者は徹底的に追及することになる。

4．範例的教授・学習理論に基づく数学授業

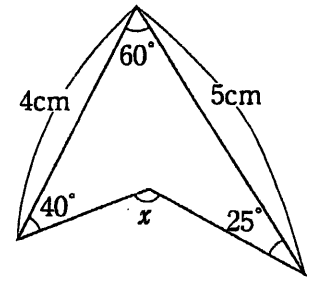
4－1．数学授業における「範例的なもの」とその洞察のための活動

数学授業における「範例的なもの」を捉える枠組みとしては、2－1で挙げた「(a)’概念、(b)’方法、考え方、様式、(c)’数学的なものの本質、(d)’人間的なものへの気づき」の4つの段階を

用いる。この4つの段階に照らし合わせながら、両角が過去に筑波大学附属中学校で実際に行った数学授業を振り返り、その授業実践に必要な事柄を考察する。

●中2「図形の性質を遡及していく教授・学習事例」

【範例】右の図に示された∠xの大きさをいろいろな方法で求めよう。
また、その際に使った図形の性質を書きなさい。



【範例の提示方法の工夫】

○「図を構成する活動」を最初に入れること。

範例における凹型の四角形をすぐ学習者にみせるのではなく、言葉によって凹型の四角形の形状を伝達し、その言葉から学習者が凹型の四角形をかき、構成していく活動をいれる。
伝達する言葉は、その言葉をつなげていくと自然に凹型の四角形がかけるように、図を構成するステップを意識した形で行う。

○「実際にかいた図を振り返る活動」を入れること。

凹型の四角形を学習者個々がかいた後に、その図形の形状を学習者同士で比較したり、図形の特徴や図形をかくプロセスを反省的に振り返ることを促す。

【範例となる理由】

○凹型の四角形の角を求める問題は、学習者に「驚き」をもたらすこと

上記の学習場面では、図形の見方の多様さと図形の性質を様々に使って多様な解法を得ることができる2つの点に「驚き」をもたらす要素がある。例えば、凹型の図形は、「2つの三角形の合併とみること」「大きな三角形より1辺を共有する小さな三角形を取り除いたものとみること」「60°の角に着目して、三角定規の形（60°, 30°, 90°の直角三角形）や正三角形を重ね合わせながらみること」「鏡映のように反射させて図形をみること」などのように、多様な見方により捉えることが可能である。また、これらの図形の見方をすることを通して、多様な解法を見出すことができる。例えば、図形の性質の組み合わせ方を工夫することにより、15通りくらいの解法をえることができる。また、音声言語による伝達を通して図をかく活動を行い、それをもとに問題に入っていくため、学習者の凹型の図形に対する意識が高まる。

また、60°の角の二等分線を頂点同士を結ぶ線分と捉える学習者が多い。このように捉えた学習者にとっては、思考を進めることにより「図形の直感的なみえ方」に依存しないことの大切さを見出すことができる。

○凹型の四角形の角を求める問題は、中2の図形学習全体の中で「鍵的位置」をもつものであること

中1までに学んだ三角形や四角形に関する図形の性質を、多様な解法を促すことによって顕在化することができる。また、ある補助線をひいた図形であっても、図形の性質の組み合わせ方や用いる図形の性質を変えることによって、さらに多様な解法が期待できる。それらの学習活動によって、平行線の同位角、平行線の錯角、対頂角、三角形の内角の和、四角形の内角の和、三角形の外角の性質、外角の和、回転角としての角の捉え、正三角形の性質、二等辺三角形の性質、

直角二等辺三角形の性質などを得ることができる。これらの図形の性質は、中2の「三角形と四角形」の学習で焦点をあてる部分であり、範例を通してこれらの図形の性質の関連を洞察することができよう。

また、問いの連鎖や核となる学習者の活動に焦点化することを通して、「図形の性質が横並びの状態から縦並びの状態に変換する」ことが可能になる。この「図形の性質を遡及してしていく活動」(局所的・教育的な意味での公理系づくり)は、説明から証明に至るプロローグとなる。

【範例的なもの】

○ (a)' の例
- 凹型の四角形を2つの三角形を合併したものとみれること
- 凹型の四角形は1つの三角形から1辺を共有する三角形を取り去ったものとみれること
- 三角形の内角の和は180°であること
- 三角形の1つの外角は、それととなりあわない2つの内角の和に等しいこと

○ (b)' の例
- 補助線によって分割した2つの三角形に対して、三角形の内角の和の性質を用いると$\angle x$の値を求めることができること
- 凹型を四角形の内角の和の性質を用いて分析する際には、1回転が360°であることに着目する必要があること
- 向かい合う頂点同士を結ぶ直線に対しては、外角の性質を2回用いることによって$\angle x$の値を得ることができること。その方法によれば、$\angle x$は3つの内角の和として表せること。
- 凹型の四角形に対して、補助線を引いて分割したり、よく知っている図形の性質に関わりのある図形をつくることを通して、$\angle x$の値を求めることができる。

○ (c)' の例
- 図形の性質を横並びの状態から、縦並びの状態に変換すること
- 数学的諸真理の相互依存性
- 全称命題としての図形の性質の理解
- 数学的諸真理の根源性
- 数学体系の演繹性，無矛盾性

○ (d)' の例
- 我々は、一定のルールのもとに既に正しいと推論したことがらを用いて、自由に議論をすることができること。即ち、共同体の中で、個人の特性などによらず、共通のルールや用いることができる言語・記号によって平等に議論ができること。
- 物事は単独で存在するのではなく、因果関係が存在すること。
- みんなで協働して考えると、一人では容易に獲得できないことが得られること。

【範例的なものの洞察のために】

一斉授業の中では、教師からの問い、問いの連鎖、そして核となる学習者の活動に焦点化することが、範例的なものの洞察のために必要である。問いおよび問いの連鎖に関しては、範例的なものとして挙げた(a)'～(d)'を教師が意識して、一連の数学授業の中でこれらに関わる問いを位置づけていくことが必要である。また、教師の投げかけに対して学習者は様々な動きをする。その動きの中で「核

となる学習者の活動」に着目し、焦点化していくことは、広義の「問いの連鎖」ととることができる。その理由は、教師が「核となる学習者の活動」を取り上げ、価値づけることによって、それが学習者全体の中に何らかの「問い」の作用を与えるからである。

例えば、「○○君の考え方、おもしろい方法だね」という価値付け、「この方法、どのようにして解いているかわかるかな？」という焦点化、「この方法に使われている図形の性質を挙げてみよう」というさらなる焦点化などは、教師の授業におけるねらいを踏まえたり、状況をより明確にする意図など、ゆるやかな意味での「問い」の性格を持つ。核となる学習者の活動に対しては、「抽出、引き取り、焦点化、価値付け、方向付け、関連づけ、比喩、例示、特徴付け、引き戻し、投げかけ」などにみられる教師の活動により、授業の中で何らかの「問い」として、あるいは議論の進行役としての機能を持つ。黒澤（1999, 2001）は、核となる学習者の活動を一斉授業の中で焦点化させていく教師の活動を、「認める→取り上げる→収集する→解釈する→調整する→進める」というメカニズムのあるものとして分析している。

核となる学習者の活動の焦点化は、学習者にとっては「授業の流れに自然にのっていくもの」として、さらに「学習意欲を推進するもの」としての役目を、そして教師にとっては「問いの連鎖をより学習者の立場で実現するもの」としての役目を果たす。これらを詳細に分析することは、ベテランの教師のもつわざや、授業研究会などで議論されることの多い「よい授業における教師の諸活動」を詳細に考察することともいえる。瞬時の教師の判断の中で、何が行われているのか、教師の評価活動に絡めて今後詳細に分析していく予定である。

この事例での「問いの連鎖」は、次のようになる。

○　（凹型の）四角形をかいてみて、気づいたことや、こんなことがいえそうかなということはないだろうか。

この初発問の後は、生徒の発言、予想、つぶやきを収集しながら「本当にそのようなことがいえるだろうか？」「すごいことに気づいたね」などの教師からの返しをしながら、以下のように、自他の考えの比較や異同を意識する問い、図形の性質を次々に遡及していくための問い、図形の性質を次々に遡及していくプロセスを反省的にとらえるための問いを連鎖させていく。

○　（黒板にかかれた図のみによる解法をみて）友達がどのような図形の性質を使って解いたのか、自分なりに考えてみよう。
○　同じ図でも、違う図形の性質を使って解いた人はいるかな。
○　この解法の意味、自分なりにわかる人、手を挙げよう。
○　この問題を解くには、どれくらいの図形の性質を使うことができるのかな。
○　いろいろな解法をみて、気づくことがあるかな。
○　この問題を解くには、いろいろな図形の性質が使われていることがわかった。この方法では、三角形の１つの外角はそれととなりあわない２つの内角に等しいという図形の性質が使われている。この図形の性質は本当に正しいのだろうか。どうしてそんなことがいえるのだろうか。
→　以上、(a)', (b)' に関する問い
○　図形の性質同士を矢印で結んでいくことを図に表してみたけど、この図をみてどんなことがいえそうだろうか。　→　(c)' に関する問い

○ 「本当？」「なぜ？」「出発点」をキーワードにしてきたけど、今までみんなで考えてきたことを通して、どんなことを感じてきたかな。自分の感じ方を書き出してみよう。
○ それぞれの感じ方を聞いて、さらに感じたこと、考えたことを発表してみよう。

→ (d)' に関する問い

【範例的なものを洞察していった学習者の例】

上記の(d)' に関する問いに対して、数学的諸真理の相互依存性や数学的諸真理の根源性について、その学習者なりに洞察を行っていった者の感想を例としてあげたい。この学習者の感想では、数学の世界における相互依存性や根源性について述べられているが、さらに教師の問いを洗練させることによって「人間的なものへの気づき」が生じると考えられる。

なお、数学的諸真理の相互依存性に関しては、循環論法に陥ることの指摘や次々に図形の性質を演繹的に示そうとする姿勢、数学的諸真理の根源性に関しては、これ以上説明することができないことの指摘があることにより判断した。

「平行線の同位角が等しいことは、平行線で同じ内側の角の和が180° であることとか、平行線の錯角と対頂角とかを使えば説明できる。平行線の内側にある角の和が180° であることは、平行線の錯角の性質を使えば説明することができる。だが、この錯角の説明は、今説明しようとしている同位角を使うので、矛盾していることになる。また、錯覚、対頂角を使うというのも、対頂角は平角＝180° だけで説明できるが、錯覚がやはり同位角を使ってしまうのでダメである。

つまり、私はこの平行線の同位角が同じということは、説明できないような気がする。でも、やっぱり、このことは事実にあっていることだと思う。」(学習者の感想より)

4－2．中学・数学授業で考えられる「範例的なもの」

「範例的なもの」に対しては4つの段階が考えられるが、中学校数学の授業における行動目標としての「範例的なもの」として、数と式、図形、関数各領域における範例的なものを5項目ずつ例示したい。(c)' を中心に述べていく。

● 「数と式」領域における範例的なもの
① 数の世界の拡がりとして「新しい数」を捉えていくことができること
② 計算可能性の拡大として「新しい数」を捉えていくことができること
③ 式の言語的側面に着目して、「式に表す」「式を変形する」「式を読む」の3つの関連を図っていくことができるようになること
④ 計算のアルゴリズムを知り、それを使えるようになること
－計算方法が有限回の構成的な手続きからなることを知ること－
⑤ 場面や表現の仕方を変えて、式の見方や考え方をふくらませていくこと
－手続きと意味との関連を折に触れて図っていくこと－

● 「図形」領域における範例的なもの
① 図がみえることの二面性を知ること
→「図にみえている」からわかることがあり、逆に「図にみえている」からわかるために妨げていることがあることを知ること。
② 図形をみる観点変更に伴って、保存されるものと捨象されるものがあることを知ること

→ 次元を変えて図形をみたり、ある観点に沿って図形をみるときに、保存されるものと捨象されるものとがあることを知ること

③ 図形の性質を、横並びの状態から縦並びの状態に並び替え位置づけること

④ 全称命題としての図形の性質を意識し、証明に反映できること

→ 図形の性質の証明においては、典型的な図をもとに証明を行うが、その典型的な図の特性に依存されずに証明を行わなければならないことを理解する。

⑤ 図形の証明の組み立て方を、順方向と逆方向の双方の視点から理解すること

→ 図形の性質の証明を組み立てていくためには、仮定からどのように組み立てていくかという順方向と、結論を得るためにはどのようなことがいえればよいかという逆方向の思考を適宜組み合わせていけばよいことを理解する。

● 「関数」領域における範例的なもの

① 「関係があること」を調べ、知ることができること

→ 伴って変わる2つの数量があるかどうか調べようとする姿勢を高め、関数関係にある2つの数量をみつけることができること。

② 「関係それ自体」を調べ、知ることができること

→ 関数関係にあるとみられる、2つの数量間の対応や変化の仕方を明らかにすることができること。

③ 「関係を表現すること」を知り、数学的な表現（式、表、グラフ）ができること

→ 関数関係を数学的に表現することができ、その特徴を調べる姿勢を高めることができる。

④ 「基本的な関数の特徴」を知り、その特徴を理解することができること

⑤ 関係があることを知り、その「関係を活用すること」ができること

→ 一方を固定したり、あるいは変化させてその結果を調べる、帰納的に調べて規則性をみつける、などの関数的な見方や考え方を問題解決に活かすことができる。

これらの項目に対して、例えば「関数」領域の範例的なものの(d)' は、次のように表せる。

○ いくつかの「事柄」の間に、相互関係があることを見つけ、その関係をより深く知ろうとすること。

－因果関係や相互関係への洞察－

○ ある「事柄A」をより深く知るために、「事柄A」に関わりのある「事柄B」に着目する。その「事柄B」について調べたこと、示せたことを、「事柄A」も同じように成り立つと考え、「事柄A」に適用していく。

－関わりをもとにした推論方法の追求－

この2点は、中学生としての推論の仕方を高めるために大変有効といえる。例えば、総合的な学習において「環境問題」を生徒たちと共に考え、洞察を深めていくという場面を想定してみる。

導入においては、環境問題に関わりのあるいくつかの事柄を、話し合いなどによって挙げていくだろう。これは、「因果関係や相互関係への洞察」にあたる。例えば次のような系列図によって、環境問題に関わりのある事柄の因果関係を矢印を用いて表すことができる。

「環境問題→ f →地球温暖化→ g →オゾン層の破壊→ h →二酸化炭素の増加→ i →
化石燃料の使用・燃焼→ j →車の生産台数の増加→ k →車のニーズの高まり→ l →…」

ここで、f ～ l の記号は「関わりのある」ことを写像で表現したものである。

この合成写像f・g・h・i・j・k・lの逆写像として、原因や解決策を考えていくことが「関わりをもとにした推論方法の追求」にあたる。言い換えれば、身近な生活での出来事の背景をさぐることにより、次々と因果関係を追求していくことである。

こうした推論の手法や考え方を、「関係」を「関数関係」に限定し、「事柄」を「数量」に限定して学んでいくのが、中学校数学における数量関係の学習であるといえる。

5．おわりに

本研究では、範例的教授・学習の教授の側面に焦点をあて、範例的教授・学習理論をヴァーゲンシャインの言明とそれに関連する諸論文を参考に考察してきた。範例的教授・学習理論に基づく数学授業構想にあたっては、範例の選定と設定、範例に対する範例的なものの明確化、適切な結節点の設定、範例から範例的なものへの洞察を促す活動として「問いの連鎖と核になる学習者の活動の焦点化」、範例的なものを目指す中での理解の深化と陶冶作用、次なる範例の柔軟な設定、などの教師に求められる要素を述べてきた。これらの要素は「よい算数・数学の授業」を展開されているベテランの教師が、日々の研鑽のもと行っている技や行動を、理論化していく可能性を持っている。それゆえ、「よい授業」を展開されるベテランの教師が日常行っていく活動に、どのような特徴があり、それが理論的に言明されるのかを検討していく必要がある。

Wittmann（1989）の主張には、教育現場との連携によってカリキュラムが構成されていくという強い思想がある。ヴァーゲンシャインは、長年のギムナジウムでの教師としての経験を踏まえて、そこで培ったわざや思想を理論化していった。東京教育大学附属中学校で開発された「範例統合方式」は、教育現場における実際の授業の集積として、カリキュラムを構成するという強い理念と教師集団の思いがある。こうした共通点を踏まえ、今後、次の点を中心に研究を進めたい。

① 範例的なものを洞察させていくために、どのような教師の具体的活動があり、それが理論化されていくのか。教師の状況を踏まえた瞬時の判断では、何が行われているのかなどの解明をすること。

② 一斉授業における数学的活動を大谷(2001)の理論などから分析し、範例的教授・学習理論に基づく数学授業に関して現代的な意味づけや位置づけを図る。

③ ヴァーゲンシャインの思想は、後半、範例的なものから発生的なものに移行している。その陶冶観も踏まえ、ヴァーゲンシャインの思想の背景、特に科学哲学に着目し更なる考察を行う。

【引用・参考文献】

小高俊夫編著（1998).「図形・空間のカリキュラム改革へ向けて」, 東洋館出版社

小高俊夫（1989).「算数・数学カリキュラムと授業の追求」, 富士教育出版社

E.Wittmann (1998). Mathematics Education as a “Design Science”, Mathematics Education as a Reseach Domain. pp.87-103, Kluwer Academic Publishers

E.Wittmann (1984). Teaching units as the integrating core of mathematics education, Educational Studies in Mathematics, 15, 25-36

E.Wittmann (2000). Developing Mathematics in a Systemic Education (ICME9, Plenary Lecture,2000. at Makuhari), 湊三郎訳,「算数・数学教育を生命過程として発展させる」, 日本数学教育学会誌, Vol.82, No.12, pp.30～42, 2000

平林一栄（2001).「最近の数学教育研究の視点 －「文化」と「エコロジー」－」, 全国数学教育学

会誌，数学教育学研究第7巻，pp.1～6，全国数学教育学会
岡崎正和（2000).「教授単元の考えを普段の授業に実践する一つの試み－教授学的工学に着目して－」，日本数学教育学会，第33回数学教育論文発表会論文集，pp.31～36
岡崎正和（2001).「全体論的な視座からの代数の導入過程に関する研究　－代数的発想の生起の様相－」全国数学教育学会誌，数学教育学研究第7巻，pp.39～49，全国数学教育学会
國本景亀（2001).「ドイツの算数・数学教育の最近の動向」，日本数学教育学会誌，Vol.83，No.9，pp.39～49，2001
長谷川栄（1972).「教材構成におけるエクセンプラリッシュ方式の意味」富田竹三郎編著，「現代の教授理論」，pp.198～222，協同出版
木原健太郎（1974).「現代教科教育学体系　第1巻　教科教育の理論」「範例方式と教科」（長谷川栄著）など所収
大高　泉（1999).「ドイツ科学教育史」，協同出版
三枝孝弘（1965).「範例方式による授業の改造」，明治図書
井上　弘（1971).「範例的教授学習入門」，明治図書
H. ロート，A. ブルメンタル共編，三枝孝弘，平野一郎監訳（1968).「範例方式の授業」，黎明書房
F. X. エッガースドルファー著，富田竹三郎訳（1979).「陶冶理論の発展，古代から現代まで」，教育方法学研究　第5巻，pp.40～53，日本教育方法学会紀要
長谷栄（1966).「ヴィルマン教授学の社会的観点」，教育方法学研究　第1巻，pp.21～45.日本教育方法学会紀要
長谷川栄（1969).「範例教授・学習と形式陶冶」，教育方法学研究　第3巻，pp.26～41.日本教育方法学会紀要
長谷川栄（1983).「ヴィルマンの「発生的方法」の教授学的意義」，教育方法学研究　第6巻，pp.115～133，日本教育方法学会紀要
大高　泉（1986「自然科学の陶冶的価値の認識構造分析　－M.ヴァーゲンシャインの物理教育論の場合－」，教育方法学研究　第7巻，pp.63～85，日本教育方法学会紀要
大高　泉（1989).「M. ヴァーゲンシャインの科学教育論における「発生的」の概念とその変容」.教育方法学研究　第8巻，pp.109～127，日本教育方法学会紀要
大高　泉（1996).「M. ヴァーゲンシャインの科学教育論における範例的原理とその構造」，教育方法学研究　第12巻，pp.53～69，日本教育方法学会紀要
黒澤俊二（1999).「なぜ『算数的活動』なのか」，東洋館出版社
黒澤俊二（2001).「愉しい算数新聞をつくろう」，東洋館出版社
大谷　実（2001).「学校数学の一斉授業における数学的活動の社会的構成　－社会数学的活動論の構築－」，筑波大学博士論文
平山光義編著（1997).「質的研究法による授業研究」，北大路書房
柴田義松（2001).「21世紀を拓く教授学」，明治図書
松波信三郎（1962).「実存主義」，岩波新書
両角達男(2001).「中学校数学の授業における導入問題に関する一考察」，静岡大学教育実践総合センター紀要　№7，pp.43～61