

選好パラメータと児童手当の使途に関する一考察

メタデータ	言語: ja 出版者: 静岡大学人文社会科学部 公開日: 2022-08-24 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 村田, 慶 メールアドレス: 所属:
URL	https://doi.org/10.14945/00029101

論 説

選好パラメータと児童手当の使途に関する一考察

村 田 慶

I. はじめに

わが国では、育児・教育費の負担軽減を目的として、児童手当が実施されている。児童手当とは、各家計に対して、子どもの数に応じて助成金を支給する制度である。内閣府「平成30年版少子化社会対策白書」によれば、わが国における夫婦の理想的な子どもの数（平均理想子ども数）は、1987年から減少傾向にあり、2015年には2.32人と過去最低となっている。また、実際に持つつもりの子どもの数（平均予定子ども数）も2.01人と過去最低となっている。実際に持つつもりの子どもの数（平均予定子ども数）が理想的な子どもの数（平均理想子ども数）を下回る理由としては、「子育てや教育にお金がかかりすぎるから」が56.3%と最も多く、30～34歳では8割を超えている。すなわち、わが国では少子化が深刻化しており、その主な要因は育児・教育費の負担であることが分かる。上記の観点で捉えると、児童手当は少子化問題の解決につながるが一見期待できる。しかしながら、児童手当には、助成金の実際の用途についてモニタリングできないという問題点も指摘される。厚生労働省「（平成24年）児童手当の使途等に係る調査報告書」によれば、最も多く使われているのは「子どもの教育費等（予定含む）」が44.2%で最も高い割合であるものの、「子どもに限定しない家庭の日常生活費（予定含む）」も29.4%とかなり高い割合である¹。すなわち、親の選好次第では、児童手当が子どもの育児・教育費ではなく、消費をはじめとする日常生活費に回ってしまう恐れが少なからずあることが伺える。

経済学的に、親世代の育児・教育費負担は出生率のみならず、教育を通じて子どもが獲得する人的資本蓄積にも影響を及ぼすと考えられる。本稿では、上記の問題意識に基づき、児童手当の使途が出生率および人的資本蓄積に及ぼす影響について、世代重複モデルによる一考察を行う。

世代重複モデルによる児童手当と出生率に関する先行研究としては、Groezen, Leers and Meijdam (2003) がある。Groezen, Leers and Meijdam (2003) では、小国開放経済を設定することによって

¹ ただし、この調査は複数回答の形式で実施されている点に留意する必要がある。他の調査項目および調査結果としては、「子どもの生活費（予定含む）」が33.8%、「子どもの将来のための貯蓄・保険料（予定含む）」が21.8%、「子どものおこづかいや遊興費（予定含む）」が10.6%、「子どものためとは限定しない貯蓄・保険料」が4.0%、「その他（予定含む）」が2.2%、「大人のおこづかいや遊興費（予定含む）」が1.8%となっている。

賃金率を一定とし、それが各個人の所得水準と等しくなるとした上で、政府が税金を徴収し、それを財源とする児童手当および賦課方式年金をモデル化している。また、Groezen, Leers and Mejidam (2003) では、各個人の生涯効用は、若年期における消費と子どもの数、および老年期における消費によって決まるとしている。しかしながら、これらの先行研究では、出生率が教育支出に及ぼす影響については考慮されておらず、教育支出による影響を受ける子どもの人的資本蓄積についても分析されていない。

教育支出と人的資本蓄積に関する先行研究としては、Glomm and Ravikumar (1992) および Cardak (2004) がある。Glomm and Ravikumar (1992) では、2 期間の世代重複モデルにより、生涯効用は、第 1 期における余暇時間、第 2 期における消費および次世代への教育支出、Cardak (2004) では、同じく 2 期間の世代重複モデルにより、各個人の生涯効用は、第 2 期における消費および次世代への教育支出によって決まるという設定になっている。また、人的資本蓄積について、Glomm and Ravikumar (1992) では、学習時間、親世代による教育支出、および親世代の人的資本水準、Cardak (2004) では、親世代による教育支出および親世代の人的資本水準によって決定付けられるとしている。これらの先行研究では、教育を公・私教育に分類しており、公教育支出は所得比例課税を財源としていること、各個人は第 2 期において人的資本を獲得するという点が共通している。さらに、Groezen, Leers and Mejidam (2003) では、子どもの数が内生化されており、人口動態が考慮されているのに対し、Glomm and Ravikumar (1992) および Cardak (2004) では、人口規模を一定としており、人口動態が考慮されていない。それに対し、村田 (2017b) では、Groezen, Leers and Mejidam (2003) について、Glomm and Ravikumar (1992) および Cardak (2004) に倣い、生涯効用の決定要素として、次世代への教育支出による影響を新たに組み入れ、また、教育支出が次世代に均等配分され、人的資本蓄積は子ども一人当たり配分される教育支出と親世代の人的資本水準によって決定付けられるとし、人的資本蓄積において、子どもの数の内生化を考慮したモデル設定を行うことによって、若干の拡張・修正を試みている²。さらに、児童手当について、Glomm and Ravikumar (1992) および Cardak (2004) における公教育支出と同様、所得比例課税を財源として実施されるケースをモデル化している³。さらに、村田 (2021) では、村田 (2017b) における生涯効用関数について、児童手当による助成金の支給後、消費に対する選好が高まるケースについて検討し、それが出生率と人的資本蓄積、ひいては経済成長に及ぼす影響について考察

² ただし、本稿および村田 (2021) モデルも同様であるが、Groezen, Leers and Mejidam (2003) と異なり、老年期における各個人の行動は分析対象とならないため、貯蓄および公的年金に関する議論は捨象されている。

³ わが国における所得税は累進課税となっているが、このケースを想定すると、所得水準の段階ごとに税率を設定しなければならず、分析が複雑化する恐れがある。しかしながら、児童手当の財源として所得税を想定する場合、Groezen, Leers and Mejidam (2003) における定額税よりも、所得比例課税のケースの方が現実に近いと思われる。

している。

本稿では、村田(2021)について、さらなる議論の拡張を試みる。村田(2021)モデルでは、生涯効用は、壮年期における消費と子どもの数、および次世代が獲得する人的資本水準によって決まり、各要素の選好を表わすパラメータが設定されており、消費に対する選好の変化は、子どもの数に対する選好に影響を与えるものの、次世代が獲得する人的資本水準に対する選好（主観的割引率）には影響を与えない設定となっている。しかしながら、消費に対する選好が高まることは、次世代への教育支出を重視しなくなることを意味することから、これは子どもの数に対する選好のみならず、次世代の人的資本蓄積に対する選好（主観的割引率）にも影響を及ぼすと考えるべきであろう。また、村田(2021)モデルでは、村田(2017b)と同様、各個人が生涯効用を最大化するにあたり、児童手当が政府による所得比例課税を財源とする点についても制約条件として組み込んでいる。しかしながら、各個人が仮に政府の行動を完全に把握できるとしても、児童手当の支給額はともかく、財源確保までを考慮して行動するというのは稀であろう。それに対し、本稿モデルでは、前者の問題について、消費に対する選好の変化が、次世代が獲得する人的資本水準に対する選好（主観的割引率）に直接影響を及ぼすような生涯効用関数を設定する。また、後者の問題について、各個人は生涯効用を最大化するにあたり、児童手当の財源確保（政府の行動）を制約条件に組み込まないことによって、より現実的な拡張・修正を行う。その上で、児童手当による助成金の支給後、消費に対する選好が高まった場合、それが出生率と人的資本蓄積、ひいては経済成長に及ぼす影響について考察する。

本稿における構成として、まずⅡ節において、村田(2021)モデルについて、生涯効用関数における消費、子どもの数、および次世代が獲得する人的資本水準、各要素に対する選好パラメータが互いに影響し合うような設定を行った基本モデルを概観する。その上で、Ⅲ節において、生涯効用関数における消費に対する選好が高まるケースを想定し、それが出生率と人的資本蓄積、ひいては経済成長に及ぼす影響について考察する。

Ⅱ. モデル設定

各個人の経済活動は、2期間にわたって行われるとする。本稿では、2期について、 $t-1$ 期と t 期を基準とし、各期に生まれた個人をそれぞれ、 $t-1$ 世代、 t 世代の個人と呼ぶこととする。また、各世代の子どもは第2期に誕生するものとする。

Ⅱ. 1. 人的資本形成

各世代の個人は第2期において、自身の人的資本を形成するものとする。村田(2021)に倣い、

本稿モデルでは、人的資本の蓄積方程式を(1)のように設定する⁴。

$$h_{t+1} = \theta \left(\frac{e_t}{n_t} \right)^{1-\delta} (h_t)^\delta ; \delta \in (0,1), \theta > 0 \quad (1)$$

(1)において、 γ と δ はそれぞれ、親世代から受け取る教育支出および親世代の能力水準の人的資本蓄積に対する影響力パラメータ、 e_t は t 世代の各個人が t 期において $t-1$ 世代から受け取る教育支出の総額、 h_t は $t-1$ 世代の各個人が t 期において獲得する人的資本水準、 h_{t+1} は t 世代の各個人が $t+1$ 期において獲得する人的資本水準である。本稿モデルでは、村田(2021)と同様、親世代は教育支出の総額を子ども全員に均等配分すると仮定する。また、本稿では、 $t+1$ 期における一国全体の効率労働 H_{t+1} を(2)のように定義する。

$$H_{t+1} = \prod_{j=0}^t n_j L_0 h_{t+1} = (n_0 \times n_1 \times \dots \times n_t) L_0 h_{t+1} \quad (2)$$

(2)において、 L_0 は初期における人口規模である。

II. 2. 効用最大化

各世代の個人は第2期において、労働を行うとする。すなわち、 $t-1$ 世代の各個人が労働所得を得るのは t 期である。本稿では、遺産贈与は考慮しないものとする。また、Glomm and Ravikumar (1992), Cardak (2004), および村田(2017b, 2021)と同様、生産者の利潤最大化問題を考慮しておらず、賃金率に関する議論が存在しないことから、 $t-1$ 世代の各個人の t 期における所得水準 y_t は、(3)のように、獲得する人的資本水準と一致する。

$$y_t = h_t \quad (3)$$

Glomm and Ravikumar (1992), Cardak (2004), および村田(2017b, 2021)に倣い、各個人は、壮年期における労働の可処分所得と政府から支給される児童手当による助成金を、自身の消費およ

⁴ 人的資本蓄積に関する影響力パラメータについて、村田(2021)モデルでは、児童手当の用途に関する議論が限定的となってしまうことから、合計値が1未満となるように設定している。しかしながら、本稿モデルでは、そのような懸念はないため、村田(2017b)と同様、親世代による子ども一人当たりへの教育支出および親世代の人的資本水準の人的資本蓄積に対する影響力パラメータについて、合計値が1となるように設定している。

び子どもの育児費用と教育支出に支出するものとする。 $t-1$ 世代の各個人が t 期において直面する予算制約は、(4)のようになる⁵。

$$(1 - \tau_t)y_t + \varphi n_t = c_t + pn_t + e_t; \quad p > 0, \varphi > 0 \quad (4)$$

(4)において、 c_t と e_t はそれぞれ、 $t-1$ 世代の各個人の t 期における消費および t 世代への教育支出、 p と φ はそれぞれ、各期における子ども一人当たりにかかる育児費用および子ども一人当たりに対して支給される助成金、 τ_t は t 期における所得税率である。

本稿では、児童手当は所得比例課税を財源として実施され、政府は所得税率 τ を児童手当による助成金 φ が維持されるように調整すると仮定する。したがって、 t 期における所得税率 τ_t は、(5)の条件を満たすように決定付けられる⁶。

$$\varphi = \frac{\tau_t \prod_{j=0}^{t-1} n_j L_0 h_t}{\prod_{j=0}^t n_j L_0} = \frac{\tau_t h_t}{n_t} \Rightarrow \tau_t = \frac{\varphi n_t}{h_t} \quad (5)$$

各個人は、生涯効用を最大化するように行動するものとする。本稿における生涯効用とは、2 期間全体において得られる効用水準を意味する。本稿モデルでは、各個人の生涯効用について、第2期における消費水準⁷と子どもの数、および次世代が獲得する人的資本水準によって決定付けられるとする⁸。 $t-1$ 世代の各個人の2 期間全体における効用水準を V^{t-1} とおくと、それは以下のように表される。

⁵ 村田(2017b)および村田(2021)では、児童手当による助成金を η と表記しているが、本稿では、Groezen, Leers and Mejidam (2003)と同様、児童手当を φ と表記する。

⁶ 村田(2017b)および村田(2021)と同様、本稿モデルでは、政府活動は所得比例課税による助成金の支給額の維持のみであるとし、他の活動は一切考慮していない。

⁷ Glomm and Ravikumar (1992), Cardak (2004), および村田(2017b, 2021)では、第1期における消費は考慮されておらず、本稿でも同様の設定を行う。この解釈は、若年期における教育支出の中に、生活に必要な消費も含まれているというものである。

⁸ 村田(2017b)では、各個人の生涯効用について、第2期における消費水準と子どもの数、および次世代の一人当たりに対する教育支出によって決まるとしている。しかしながら、本稿モデルでは、人的資本蓄積が親世代から受け取る教育支出と親世代の人的資本水準のみによって決まるため、議論において根本的な影響は生じない。ただし、村田(2017a)において示されているように、単に子どもに対する教育支出から効用を得ることと、子どもが獲得する人的資本水準から効用を得ることは同一ではなく、生涯効用の決定要素についての選好パラメータ、教育支出が人的資本蓄積に与える影響力パラメータ次第であることに注意が必要である。

$$\underset{c_t, n_t, e_t}{\text{Maximize}} \quad V^{t-1} = \alpha \log c_t + \beta \log n_t + \gamma \log h_{t+1}; \quad \alpha, \beta, \gamma \in (0,1), \alpha + \beta + \gamma = 1$$

$$\text{subject to} \quad (1 - \tau_t)y_t + (p - \varphi)n_t = c_t + e_t, \quad y_t = h_t, \quad \tau_t = \frac{\varphi n_t}{h_t}$$

ここで、 α と β はそれぞれ、第2期における自身の消費と子どもの数に対する選好を表わすパラメータ、 β は次世代が獲得する人的資本水準から得られる効用の主観的割引率である。一階条件より、 $t-1$ 世代の各個人の t 期における最適な子どもの数、最適教育支出、および最適消費はそれぞれ、(6)、(7)、および(8)のように導出される⁹。

$$n_t = \frac{\{\beta - \gamma(1 - \delta)\}(1 - \tau_t)h_t}{(\alpha + \beta)(p - \varphi)} \quad (6)$$

$$e_t = \frac{\gamma(1 - \delta)(1 - \tau_t)h_t}{\alpha + \beta} \quad (7)$$

$$c_t = \frac{\alpha(1 - \tau_t)h_t}{\alpha + \beta} \quad (8)$$

(6)において、本稿では、 $\beta > \gamma(1 - \delta)$ を仮定する¹⁰。また、育児費用と児童手当による助成金の大小関係について、 $p > \varphi$ を仮定する¹¹。

Ⅲ．児童手当の使途と人的資本蓄積および経済成長

Ⅱ節を踏まえ、本節では、人的資本関数および人的資本の定常均衡を導出し、その上で、消費に対する選好が高まった場合、それが出生率と人的資本蓄積、ひいては経済成長に及ぼす影響について考察する。本稿モデルでは、物的資本蓄積に関する議論を捨象していることから、経済成長パターンは効率労働のみによって決まる。また、(2)より、効率労働は各個人の子どもの数（出生率）と人的資本水準によって決まることから、経済成長パターンは出生率と人的資本蓄積によって決定付けられる。

⁹ (6)、(7)、および(8)の導出過程については、付録を参照せよ。

¹⁰ この仮定を置かなければ、最適な子どもの数がゼロもしくはマイナスとなるケースが生じてしまい、これらは現実的に有り得ないためである。

¹¹ 村田・丁(2022)においても述べているが、児童手当による助成金が育児費用と同額もしくはそれを上回ることは、現実的に考えにくいためである。

(6)と(7)を(1)に代入すると、人的資本関数は(9)のように導出される。

$$h_{t+1} = \left\{ \frac{\gamma(1-\delta)(p-\varphi)}{\beta - \gamma(1-\delta)} \right\}^{1-\delta} (h_t)^\delta \quad (9)$$

(9)より、人的資本の定常均衡値を h_s^* とおくと、それは(10)のように導出される。

$$h_s^* = \frac{\gamma(1-\delta)(p-\varphi)}{\beta - \gamma(1-\delta)} \quad (10)$$

(9)において、 $0 < \delta < 1$ であるので、 h_{t+1} は h_t についての凹関数であることから、 h_s^* は安定的な定常均衡である。また、(10)を(6)に代入することによって、 $t-1$ 世代の各個人の t 期における最適な子どもの数は、(11)のように求められる。

$$n_t = \frac{\gamma(1-\delta)(1-\tau_t)}{\alpha + \beta} \quad (11)$$

本稿モデルでは、選好パラメータについて、 $\alpha + \beta + \gamma = 1$ を仮定していることから、(10)と(11)はそれぞれ、(12)と(13)のように書き換えられる。

$$h_s^* = \frac{(1-\alpha-\beta)(1-\delta)(p-\varphi)}{\beta - (1-\alpha-\beta)(1-\delta)} \quad (12)$$

$$n_t = \frac{(1-\alpha-\beta)(1-\delta)(1-\tau_t)}{\alpha + \beta} \quad (13)$$

以上を踏まえ、児童手当の支給によって、各個人が消費に対する選好を高めるケースについて考察する。II. 2で見たように、本稿モデルでは、児童手当による助成金の支給によって、各個人の消費に対する選好パラメータの値が α から $\alpha' (> \alpha)$ に上昇したとしよう。(12)より、消費に対する選好が高まると、(14)のように、人的資本の定常均衡値は低下することが分かる。

$$\frac{(1-\alpha-\beta)(1-\delta)(p-\varphi)}{\beta - (1-\alpha-\beta)(1-\delta)} > \frac{(1-\alpha'-\beta)(1-\delta)(p-\varphi)}{\beta - (1-\alpha'-\beta)(1-\delta)} \quad (14)$$

一方、(13)より、消費に対する選好が高まると、(15)のように、子どもの数（出生率）は減少（低下）することが分かる。

$$\frac{(1-\alpha-\beta)(1-\delta)(1-\tau_t)}{\alpha+\beta} > \frac{(1-\alpha'-\beta)(1-\delta)(1-\tau_t)}{\alpha'+\beta} \quad (15)$$

村田 (2021) モデルでは、消費に対する選好が子どもの数に対する選好には影響を与えるものの、次世代が獲得する人的資本水準から得られる効用の主観的割引率には影響を及ぼさないため、消費に対する選好が高まり、児童手当が消費に回されても、子どもの数（出生率）は減少（低下）するものの、人的資本を向上させるため、経済成長にとって、必ずしもマイナスに働くとは限らないという帰結が得られた。しかしながら、本稿モデルのように、消費に対する選好が子どもの数に対する選好のみならず、次世代が獲得する人的資本水準から得られる効用の主観的割引率にも影響を及ぼす場合、消費に対する選好が高まると、子どもの数（出生率）を減少（低下）させるのみならず、人的資本も低下させることから、経済成長にとって確実にマイナスに働くことが示された。

IV. 結語

本稿では、村田 (2021) を拡張・修正し、消費に対する選好の変化が、次世代が獲得する人的資本水準に対する選好（主観的割引率）に直接影響を及ぼすような生涯効用関数を設定し、さらに、各個人は生涯効用を最大化するにあたり、児童手当の財源確保（政府の行動）を制約条件に組み込まないモデルを設定した。その上で、児童手当による助成金の支給後、消費に対する選好が高まった場合、それが出生率と人的資本蓄積、ひいては経済成長に及ぼす影響について考察した。

本稿における主要な帰結は、以下の通りである。

- (A) 各個人の消費に対する選好が、子どもの数（出生率）に対する選好および次世代が獲得する人的資本水準から得られる効用の主観的割引率に影響を及ぼし、選好パラメータの合計値が 1 である場合、児童手当の支給後、各個人の消費に対する選好が高まると、子どもの数（出生率）は減少（低下）する。
- (B) 各個人の消費に対する選好が、子どもの数（出生率）に対する選好および次世代が獲得する人的資本水準から得られる効用の主観的割引率に影響を及ぼし、選好パラメータの合計値が 1 である場合、児童手当の支給後、各個人の消費に対する選好が高まると、人的資本は低下する。

- (C) 各個人の消費に対する選好が、子どもの数（出生率）に対する選好および次世代が獲得する人的資本水準から得られる効用の主観的割引率に影響を及ぼし、選好パラメータの合計値が1である場合、児童手当の支給後、各個人の消費に対する選好が高まると、一国全体の経済成長にとって確実にマイナスに働く。

本稿モデルが想定するようなケースが、わが国における家計の現状をある程度捉えたものであるならば、児童手当による助成金を支給しても、子どもの数が減るだけでなく、経済成長にとってマイナスに働いてしまうことから、単なる「金のばらまき」になってしまうことが示唆された。

最後に、本稿における分析内容について、今後の展望を述べる。本稿モデルでは、児童手当による助成金は全ての個人に対して一律に支給される設定となっているが、現在のわが国における児童手当には、所得制限が設けられている。それと関連して、児童手当による支給された助成金について、低所得家計は消費に回すであろうが、そうでない家計は本来の目的である育児・教育費に回すと考えられる。そうすると、個人について、異質性を考慮する必要があるが、このようなモデルの下では、児童手当による助成金の一国全体の経済成長への効果に関する分析結果が変わる可能性がある。また、個人を同質とするとしても、本稿モデルでは、老年期における経済活動を考慮していないため、分析範囲が限定されている。わが国では、少子化と同時に、高齢化も深刻化しており、公的年金は基本的に賦課方式で運営されていることから、出生率が改善するかどうかは、公的年金の財源確保と大きく関わる問題である。これらの点の分析については、稿を改めて論じたい。

参考文献

- [1] Cardak, B.A. (2004a) “Education Choice, Endogenous Growth and Income Distribution,” *Economica*, Vol.71, pp.57-81.
- [2] Glomm, G. and B. Ravikumar (1992) “Public versus Private Investment in Human Capital: Endogenous Growth and Income Inequality,” *Journal of Political Economy*, Vol.100, pp.818-834.
- [3] Groezen, B. van T. Leers and L. Meijdam (2003) “Social Security and Endogenous Fertility: Pension and Child Allowance as Siamese Twins,” *Journal of Public Economics*, Vol.87, pp.233-251.
- [4] 厚生労働省「(平成24年) 児童手当の使途等に係る調査報告書」
(<https://www.mhlw.go.jp/file/04-Houdouhappyou-11906000-Koyoukintoujidoukateikyoku-Ikuseikankyoku/0000013255.pdf>)
- [5] 内閣府「平成30年版少子化社会対策白書」
<https://www8.cao.go.jp/shoushi/shoushika/whitepaper/measures/w-2018/30pdfgaiyoh/pdf/s1-1>.

pdf

- [6] 村田 慶 (2017a) 「効用関数と人的資本蓄積に関する一考察」『経済研究』(静岡大学) 21 巻 3 号, pp.1-9.
- [7] 村田 慶 (2017b) 「児童手当と人的資本蓄積に関する一考察」『経済研究』(静岡大学) 21 巻 4 号, pp.31-38.
- [8] 村田 慶 (2021) 「児童手当の使途と人的資本蓄積に関する一考察」『経済研究』(静岡大学) 25 巻 4 号, pp.15-24.

付録

制約条件式を効用関数 V^{t-1} における c_t に代入すると, 次のようになる.

$$V^{t-1} = \alpha \log \{ (1 - \tau_t) h_t - (p - \varphi) n_t - e_t \} + \beta \log n_t + \gamma \log \theta + \gamma (1 - \delta) \log e_t - \gamma (1 - \delta) \log n_t + \gamma \delta \log h_t$$

一階条件である $\partial V^{t-1} / \partial c_t = 0$ より,

$$\frac{\partial V^{t-1}}{\partial e_t} = - \frac{\alpha}{(1 - \tau_t) h_t - (p - \varphi) n_t - e_t} + \frac{\gamma (1 - \delta)}{e_t} = 0$$

上の式を変形して整理すると, $t-1$ 世代の各個人の t 期における最適教育支出は, 次のように求められる.

$$e_t = \frac{\gamma (1 - \delta) \{ (1 - \tau_t) h_t - (p - \varphi) n_t \}}{\alpha + \gamma (1 - \delta)} \quad (\text{A-1})$$

また, $c_t = (1 - \tau_t) h_t - (p - \varphi) n_t - e_t$ より, $t-1$ 世代の各個人の t 期における最適消費は, 次のように求められる.

$$c_t = \frac{\alpha \{ (1 - \tau_t) h_t - (p - \varphi) n_t \}}{\alpha + \gamma (1 - \delta)} \quad (\text{A-2})$$

(A-1) および (A-2) を効用関数に代入すると, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
 V^{t-1} = & \alpha \log \frac{\alpha \{(1-\tau_t)h_t - (p-\varphi)n_t\}}{\alpha + \gamma(1-\delta)} + \beta \log n_t + \gamma \log \theta \\
 & + \gamma(1-\delta) \log \frac{\gamma(1-\delta) \{(1-\tau_t)h_t - (p-\varphi)n_t\}}{\alpha + \gamma(1-\delta)} \\
 & - \gamma(1-\delta) \log n_t + \gamma \delta \log h_t
 \end{aligned}$$

一階条件である $\partial V^{t-1} / \partial n_t = 0$ より,

$$\frac{\partial V^{t-1}}{\partial n_t} = -\frac{\alpha(p-\varphi)}{(1-\tau_t)h_t - (p-\varphi)n_t} + \frac{\beta}{n_t} - \frac{\gamma(1-\delta)(p-\varphi)}{(1-\tau_t)h_t - (p-\varphi)n_t} - \frac{\gamma(1-\delta)}{n_t} = 0$$

上の式を変形して整理すると、 $t-1$ 世代の各個人の t 期における最適子どもの数は、次のように求められる。

$$n_t = \frac{\{\beta - \gamma(1-\delta)\}(1-\tau_t)h_t}{(\alpha + \beta)(p-\varphi)} \quad (\text{A-3})$$

(A-3) を (A-1) に代入することによって、 $t-1$ 世代の各個人の t 期における最適教育支出は、次のように求められる。

$$e_t = \frac{\gamma(1-\delta)(1-\tau_t)h_t}{\alpha + \beta}$$

(A-3) を (A-2) に代入することによって、 $t-1$ 世代の各個人の t 期における最適消費は、次のように求められる。

$$c_t = \frac{\alpha(1-\tau_t)h_t}{\alpha + \beta}$$