

## Practice of Inquiry Activities Using Salt Mountains in High School Mathematics

|       |                                                                                                                     |
|-------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| メタデータ | 言語: jpn<br>出版者:<br>公開日: 2022-12-22<br>キーワード (Ja):<br>キーワード (En):<br>作成者: 松永, 泰弘, 守屋, 太雅, 古田, このみ<br>メールアドレス:<br>所属: |
| URL   | <a href="https://doi.org/10.14945/00029263">https://doi.org/10.14945/00029263</a>                                   |

## 高校数学における塩山を用いた探究活動の授業実践

Practice of Inquiry Activities Using Salt Mountains in High School Mathematics

松永 泰弘<sup>1</sup>, 守屋 太雅<sup>2</sup>, 古田 このみ<sup>3</sup>

Yasuhiro MATSUNAGA, Taiga MORIYA and Konomi FURUTA

（令和 4 年 11 月 30 日受理）

### ABSTRACT

High school mathematics needs to reflect the process of finding mathematical problem from real phenomena and solving the problem mathematically in the learning process. In our last research, we studied salt mountains among the teaching materials of mathematical activities and performed the teaching practice using mathematical activity "Salt Mountains" for high school students. In this paper, we performed the teaching practice using mathematical activity "Salt Mountains" for high school students again. We included activities to mathematically express the shape of "Salt Mountains", which was not possible in the previous survey due to time constraints. In addition, we will clarify the content and characteristics of activities through practice.

### 1. 緒言

中央教育審議会答申<sup>1</sup>では、PISA2015 や TIMSS2015 の調査結果について、「数学的リテラシー、科学的リテラシー共に、平均得点の高まりが見られ、中学生が数学を学ぶ楽しさや、学習する意義に対しても肯定的な回答をする割合の改善が見られた一方で、いまだ諸外国と比べると低い状況にある」とし、学習意欲の面で課題が存在していることを指摘した。同答申では、「探究的な学習は、学習に対する興味・関心・意欲の向上をはじめ、知識・技能の着実な習得や思考力・判断力・表現力等の育成に有効である」ことから、さらなる学習意欲の高まりのために探究的な学習の充実の必要性を主張した。探究的な学習により、強い知的好奇心や自発的な研究態度、自ら課題を発見したり未知のものに挑戦したりする態度を育成することも求められている。

このような背景から、数学と理科にわたる探究的科目として「理数」が新設された。高等学校学習指導要領解説理数編<sup>2</sup>では「数学的な見方・考え方や理科の見方・考え方を組み合わせるな

---

<sup>1</sup> 技術教育系列

<sup>2</sup> 教育実践高度化専攻

<sup>3</sup> 愛知教育大学・静岡大学大学院教育学研究科共同教科開発専攻(技術教育系列)

どして働かせ、探究の過程を通して、課題を解決する」とあり、数学や理科の知識や技能を活用して主体的な探究活動を行うことが求められている。

高等学校学習指導要領解説数学編<sup>3)</sup>では、「数学的活動の一層の充実」として、数学科の見方・考え方を働かせて課題を解決する活動が求められている。また、数学科の目標としている資質・能力を育成していくためには、事象を数理的に捉え、数学の問題を見だし、問題を自立的、協働的に解決し、解決過程を振り返って概念を形成したり体系化したりする過程が重要であり、数学的に問題発見・解決する過程を取り入れることが求められている。

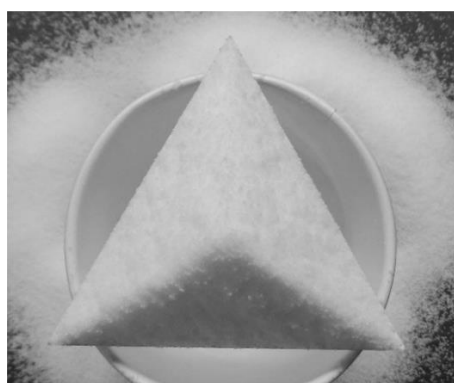
また、高等学校学習指導要領解説数学編<sup>3)</sup>では、数学的活動の一部として、「観察」、「実験」、「操作」が挙げられている。澁谷<sup>4)5)</sup>は、現物を用いた実験の重要性を述べており、中学生を対象として、円周角の定理を測定によって確かめる学習具を開発し、実践を通して現物を用いた実験の効果を実証した。さらに、池田<sup>6)</sup>は、高校生を対象として畳の敷き詰め方を実際にカードを敷き詰めることで確かめる現物実験の教材を開発し、実践を通して、多くの生徒の数学への興味・関心、探究心を喚起する可能性が示唆されている。一方で、これらの実践例においては、すでに用意された学習具・教材を扱っており、実験をする事が重要視され、生徒が考えて設計・製作をする探究的な視点が取り入れられていないことが問題点として挙げられる。

そこで、ものづくりの中に数学的活動を見出し、ものづくりの視点から数学的探究へとアプローチする数学的のものづくり活動として塩山を取り上げる。塩山は、黒田<sup>7)</sup>によって考案され、土台となる平面図形の平板に塩を最大限まで盛った時に形成される塩山の稜線、頂点を平板に投影した図形を探究する数学的活動である。早苗<sup>8)</sup>は、塩山の稜線が形成される法則について詳細に解説した。矢崎<sup>9)</sup>は、数学を使った実験の一例として塩山を取り上げ、稜線の算出方法や、塩山に関連する学習内容について解説している。これらは、学習者が数学に興味・関心を持つことを目的として取り上げられている。松永・八木<sup>10)</sup>らは、様々な形状の土台、粒子を用いた塩山に関する研究を行い、理数探究における活動の流れを明らかにした。松永・守屋<sup>11)</sup>らは、高校1年生を対象に塩山を用いた活動を実施し、「生徒の興味を引き出す教材である」こと、「多面的な探究の促進」につながるなどが示唆される結果を得た。

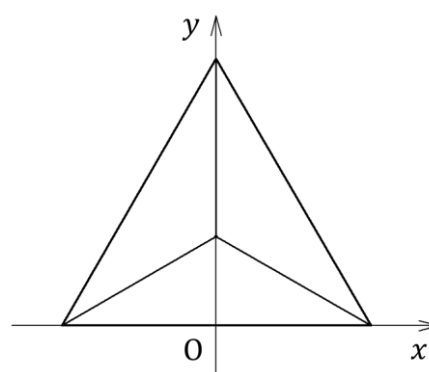
本研究では、高校生対象の活動として塩山を用いた探究活動を開発するとともに、開発した活動を高校2年生を対象に実施する。生徒のワークシートやアンケートの分析から塩山を用いた活動における探究内容や教材の特徴を明らかにする。

## 2. 塩山を創る数学的のものづくり活動

塩山は、黒田<sup>7)</sup>によって考案され、土台となる平面図形の板に塩を最大限まで盛ったときに形成される塩山の稜線、頂点を平板に投影した図形を探究する数学的活動である(図1参照)。松永・八木<sup>10)</sup>は、塩山の探究対象を粉体工学や土質工学で研究されている立体としてのパラメータの範囲に広げ、現実事象と数学的抽象化を往還する教材として提案した。粉体工学は、資源・エネルギー・食料・工業材料など広範囲の産業を支える基盤であり、新しい産業の創成・発展につながる学問分野の一つである<sup>12)</sup>。粉体を含む塩山教材は、数学的抽象化において仮説を立て、具体物の測定実験で検証しながら、理論の訂正・修正を行い、その上に構築される別の具体的量に関する新たな抽象化をさらなる別の測定実験で検証することにより、より確からしい理論に近づける過程を体験する教材である。



(a) 形成される塩山



(b) 塩山と稜線平面図

図1 正三角形平板の土台と塩山稜線

塩山の原理<sup>7)~11)</sup>は、境界が存在する平面図形の土台上に塩を盛ることで、円錐が重なり合いながら連続して形成され、頂点を結んだ稜線が現れる。ある点を中心に塩を盛っていくときに、円錐形状を保ちながら、底面の円の半径および頂点の高さが大きくなっていき、底面の円が土台の境界に接した時点で円錐形状の塩山は最大限の大きさとなる。土台に盛られた塩山は、このように形成された塩山円錐の集合体と考えることができ、塩山の稜線は境界からの距離が等しい点の集合となる。

### 3. 高校生を対象とした実践

本章では、高校生を対象に行った塩山の探究活動の概要と実践に対する分析方法について述べる。

#### 3.1 実践の概要

実践の概要を以下に示す。

【日 時】2022年3月7日～16日 全5時(各50分) ※第1～2時はオンラインで実施  
 【授業者】高校教員 (著者<sup>3)</sup>)  
 【対 象】静岡サレジオ高等学校 2年生24名  
 【授業名】数学Ⅱ

本実践では、高校2年生を対象に塩山を用いた数学的活動を実施した。対象の生徒は、数学Ⅱの授業において、軌跡・三角関数・微分・積分を学習し、これらの学習内容を応用する活動として数学を用いた探究活動を実施した。活動の流れを図2、活動で使用したワークシートの項目を表1に示す。

本実践では、感染症予防対策として第1～2時の授業はオンラインで行い、第3～5時の授業は対面で行った。第1～2時の活動の流れを以下に示す。

#### 【第1～2時の個人活動の流れ】

- ① 塩山の概要について説明を聞く。
- ② 粉末造形やアリジゴクなどの粉体でできた立体の実例を考える活動を通して、塩山と現実事象との関わりを実感し、塩山を身近な問題として捉える。
- ③ 正三角形の土台を使用して塩山を創り、観察する。
- ④ 観察の中で見つけたこと、感じた疑問を書き出す。

- ⑤ 発見・疑問を基に塩山の稜線の仮説を立てる。
- ⑥ 仮説を検証するために、自分で土台を考え、製作する。
- ⑦ 塩山の形状と稜線を平板に投影した時の図形を予想する。
- ⑧ 自分が製作した土台に塩山を創り、⑤で立てた仮説の検証や、⑦で予想した稜線と実際の稜線を比較する。予想と一致しない場合には、稜線の現れ方を観察し、仮説の修正を行う。
- ⑨ ⑤～⑧を繰り返し、基礎的概念・原理について探究する。この基礎的概念・原理の上に、今後の探究を積み上げていく。

第1～2時では、個人活動として導入と稜線の探究を行った。本活動では、導入の後、正三角形の土台に塩を盛ったときに形成される塩山を観察し、発見・疑問を書き出す活動を取り入れた。その後、稜線の形成に関する仮説を設定し、検証する活動を行った。発見・疑問を書き出すことにより、スムーズに稜線の形成に関する仮説を設定することが期待される。仮説の検証の際には、生徒自身が仮説の検証に適した土台を考案し製作する活動を行った。土台の製作は、生徒が容易に加工できるように厚紙を用いて行った。また、オンラインの活動であったため、チャット上で話し合いの時間を設けた。

第3～5時では、生徒の興味関心に沿い、「稜線の数学的表現の探究」、「体積の探究」、「粒子による塩山形状の違いの探究」に活動を分け、グループで活動を行った。「稜線の数学的表現の探究」の活動では、土台の形状(直角三角形)と座標軸を示したワークシートを使用した。第1～

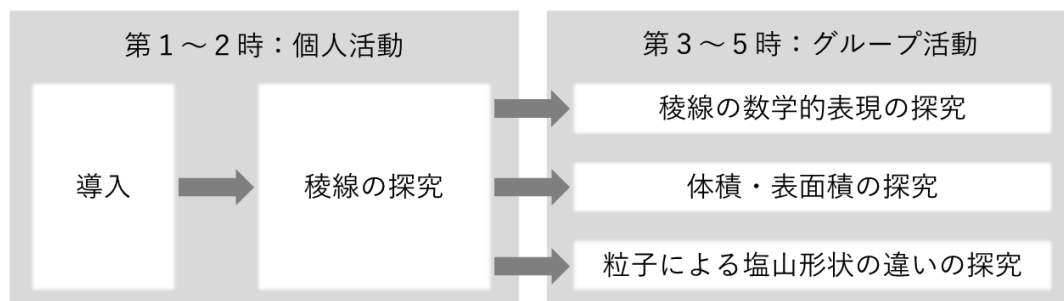


図2 授業の流れ

表1 稜線の探究活動のワークシート項目

| 項目                                                        |              |                 |
|-----------------------------------------------------------|--------------|-----------------|
| 1) 正三角形の土台に塩を盛った時に形成された塩山を観察し、見つけたこと・疑問に思ったことを詳しく書いてください。 |              |                 |
| 2) 自分で探究したいことを書き出してください。                                  |              |                 |
| 3) 塩山の稜線に関する仮説を立ててください。また、理由・根拠を書いてください。                  |              |                 |
|                                                           | 稜線が満たす条件     | 理由・根拠           |
| 仮説①                                                       |              |                 |
| 4) 自分で土台を考えて塩山を創って観察してください。さらに疑問に思ったこと・見つけたことを詳しく書いてください。 |              |                 |
|                                                           | 製作した土台の形状と稜線 | 正しいと思われる仮説      |
| 実験①                                                       |              | 見つけたこと・疑問に思ったこと |
|                                                           |              |                 |

2 時で明らかにした稜線の法則に沿って、稜線を数式に表す活動を行った。「体積の探究」の活動では、明らかにする塩山の形状は生徒自身で決定し、積分を用いた体積の算出を行った。「粒子による塩山形状の違いの探究」の活動では、時間の都合上教員が 5 種類の粒子(塩・粒子の大きさが異なるカラーサンド・ベビーパウダー・ペレット)を用意し、実験を行った。各活動について、稜線の基礎的な概念・原理、数学的な考え方等については授業者が適切に支援を行った。

### 3.2 実践におけるワークシートの分析方法

本研究では、生徒のワークシートの分析により、塩山の教材としての特徴を明らかにする。

個人活動で使用したワークシートの項目 1)では、正三角形の土台に塩を盛ったときに形成される塩山の観察から、見つけたこと・疑問に思ったことを記述する。項目 1)の分析から、正三角形の土台に塩を盛ったときに形成される塩山の観察から、どのような発見や疑問が表出するのかを明らかにする。項目 3)では仮説を立て、項目 4)では結果の予測と検証結果について記述する。生徒は項目 3), 4)を繰り返すことにより、稜線の形成の法則を明らかにしていくことが期待される。項目 3), 4)の分析から、仮説を設定し検証する活動を、生徒自身で数学的知識を活用しながら行うことが可能な教材かどうかを明らかにする。

グループ活動のワークシートの分析からは、「稜線の数学的表現の探究」、「体積の探究」、「粒子による塩山形状の違いの探究」の各活動の内容を分析し、数学Ⅱまでを学習した高校生が可能な探究内容を明らかにする。

## 4. 個人での探究活動

本章では、第 1～2 時に実施した個人活動としての塩山の稜線の探究について述べる。

### 4.1 生徒の発見・疑問の分析結果

ワークシート項目 1), 2)における、生徒の発見・疑問を分析する。生徒の発見、疑問・探究したい課題の分類・記述内容及び件数をそれぞれ表 2, 3 に示す。

[発見]

発見した内容として、「三角錐・四面体・ピラミッド」に関する記述が最も多く 10 件見られた。「きれいな三角錐になった」という記述が最も多く見られた。また、生徒 A は図 3 に示すように、塩を盛る過程において途中までは円のような形状に盛られ、最終的に三角錐の形状になったことを図示していた。この生徒は塩山が形成される原理に気づいていることが予想される。塩山を創る時間、観察する時間を十分に設けたことでこのような気づきにつながったことが期

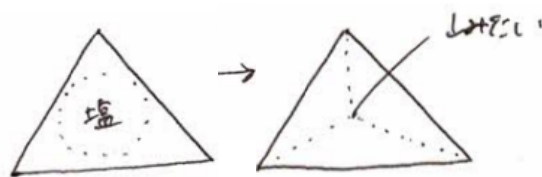


図 3 生徒 A のワークシートにおける発見内容の図

待される。

「頂点の位置」については、「重心ができています」という 1 件の記述が見られた。頂点の位置について着目し、言及した記述は他には見られなかった。

発見の記述の中では、正三角形の土台に塩を盛ったときに形成される塩山の観察から、稜線や頂点の位置に関する発見はほとんど見られなかった。

#### [疑問・探究したい課題]

疑問の記述においては、「立体・稜線の出現する理由・法則」についての記述が最も多く 11 件見られた。記述の中に、「なんでこの形になるんだろう」、「なぜ線ができるのか」と塩山が形成される法則に関する記述が多く見られた。塩山ができることに不思議さを感じていることがわかる。

「土台の違いに対する塩山の形状」について、9 件の記述が見られた。「形を変えたら稜線の数は変化するのか」というように、ワークシート項目 3), 4)の活動につながる疑問が多く見られた。

「粒子の違いによる影響」について、5 件の記述が見られた。「塩以外に、砂や小麦粉やチョークの粉などで実験を行った場合、山の形状や高さ、角度にどのような違いが表れるのだろうか」という記述からは、粒子を変えた時に塩山のどのような変数に影響を及ぼすかについて興味を持っていることがわかる。

以上より、正三角形の土台に塩を盛ったときに形成される塩山を観察することで、様々な発見や疑問が引き出されていることがわかる。特に疑問について、塩山が形成される法則だけでなく、粒子や土台の形状による影響、高さへの影響、体積に関する疑問などが記述され、さらに、「三角形に壁をつくり、スタートを斜めにしたときに形が変わるのか」という記述も見られ、探究教材として広がりのある教材であることが期待される。

表 2 生徒の発見の分類・記述内容及び件数 [n=18]

| 発見の分類                                                       | 件数 |
|-------------------------------------------------------------|----|
| 三角錐・四面体・ピラミッド：「四面体のような形をとった。辺は三角形の頂点とつながっている」、「盛った時に線が出てきた」 | 10 |
| 必ず一定の形状になること：「一定の形になる(どんなに塩をかけても)」、「一定の量まで行くと盛れなくなる」        | 4  |
| 頂点の位置(重心)：「重心ができています」                                       | 1  |
| 特徴的な記述：「円錐のように広がる」                                          | 1  |

表 3 生徒の疑問の分類・記述内容及び件数 [n=18]

| 疑問の分類                                                          | 件数 |
|----------------------------------------------------------------|----|
| 立体・稜線が出現する原理：「均等に広がらないのはなぜ?」、「なんで断面がななめになるのか(土台があるから上にのりそうなの)」 | 11 |
| 土台の違いに対する塩山の形状：「土台が四角・その他図形だった場合はどうなるのか」、「他の図形でもできるのか」         | 9  |
| 粒子の違いによる影響：「塩以外の物質でも三角柱は形成される!? のか」                            | 5  |
| 塩山の高さ：「もっと高くするのはどうすれば」、「高さには限界がある?」                            | 5  |
| 特徴的な記述：「三角形に壁をつくり、スタートを斜めにしたときに形が変わるのか」                        | 1  |

## 4.2 生徒が立てた仮説の分析

ワークシート項目3)において、生徒が立てた仮説を分析する。生徒が立てた仮説の分類を表4に示す。生徒の中には、仮説設定、検証し、修正しながら次の仮説に生かして探究を深めている生徒が5名みられた。仮説設定・検証を修正しながら繰り返していた生徒のワークシートの記述を表5に示す。

生徒Bは、「投影した頂点の位置(以下頂点の位置とする)」について探究していた。正三角形の土台を使った実験で観察された内容から、頂点が重心に存在していると仮説を立てた。その後、正三角形ではない三角形で実験を行い、「重心とは頂点がずれていた」ことに気づき、仮説を「重心→内心」に修正した。再度、正三角形ではない三角形で実験を行い、内心が正しいことを検証していた。

生徒Cは、「稜線と土台の境界との関係」について探究していた。正三角形の土台を使った実験で観察された内容から、「稜線は角(土台の頂点)から距離が等しい点の所に結ばれる」と仮説を立てた。その後、正三角形ではない三角形で実験を行い、土台の頂点から等距離の位置に頂点が位置するわけではないことに気づき、「三角形の平板の場合角の二等分線になる」と仮説を修正していた。さらに、星形の土台を用いて実験を行い、「角の二等分線が現れる事を確認」し、仮説が正しいことを確かめていた。

三角形を土台に用いた際、頂点は内心に位置するが、正三角形を土台に用いた塩山の実験では重心・内心・外心・垂心が同一の位置であるため、どれが正しいか判断することができない。

表4 生徒が立てた塩山稜線の仮説の分類 [n=18]

| 仮説の分類         | 件数 |
|---------------|----|
| 頂点の位置         | 9  |
| 高さ・粒子による違い    | 8  |
| 稜線の本数と頂点の数の法則 | 7  |
| 稜線と土台の境界との関係  | 2  |

表5 仮説設定・検証を修正しながら繰り返していた生徒のワークシートの記述

### (a) 「頂点の位置」を探究した生徒Bのワークシートの記述

|     |                                          |
|-----|------------------------------------------|
| 仮説① | 「土台三角形の重心までの長さの関係している」                   |
| 実験① | 正三角形ではない三角形で実験<br>→「重心とは頂点がずれていた」        |
| 仮説② | 「仮説①の重心→内心」                              |
| 実験② | 正三角形ではない三角形で実験<br>→「頂点、稜線共に一致しているように見えた」 |

### (b) 「稜線と土台の境界との関係」を探究した生徒Cのワークシートの記述

|     |                                   |
|-----|-----------------------------------|
| 仮説① | 「稜線は角から距離が等しい点の所に結ばれる」            |
| 実験① | 正三角形ではない三角形で実験<br>→「角の二等分線が3本現れる」 |
| 仮説② | 「三角形の平板の場合角の二等分線になる」              |
| 実験② | 星型で実験<br>→「角の二等分線が現れる事を確認」        |
| 実験③ | 正方形で実験<br>→「長方形の場合は異なるのだろうか」      |



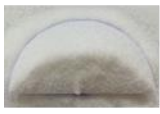


表6 仮説を検証するための土台を考えていた生徒のワークシートの記述

## (a) 「稜線の本数と頂点の数の法則」を探究した生徒Dのワークシートの記述

|     |                                                         |                                                                                    |
|-----|---------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| 仮説① | 「頂点の数と同じ数の稜線が表れる」                                       |                                                                                    |
| 仮説② | 「辺の数と同じ数の稜線が表れる」                                        |                                                                                    |
| 実験① | 円の土台で実験 →「稜線なし」                                         |                                                                                    |
| 実験② | 正方形の土台で実験                                               |                                                                                    |
| 実験③ | リボン型の土台で実験<br>→図形の中心部分も稜線が表れたため、稜線は頂点の数だけ表れるのではないとわかった。 |  |
| 実験④ | 長方形で実験<br>→実験③と同様に稜線は頂点の数だけ表れるのではないとわかった。               |                                                                                    |

## (b) 「稜線の本数と頂点の数の法則」を探究した生徒Eのワークシートの記述

|     |                                       |                                                                                      |
|-----|---------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| 仮説① | 「土台の図形の線の数と稜線の数に等しくなる」                |                                                                                      |
| 仮説② | 「稜線は図形の線の長さに比例する」                     |                                                                                      |
| 実験① | 正方形の土台で実験                             |    |
| 実験② | 王冠型で実験<br>→土台の図形の線の数と稜線の数に等しくならぬことを確認 |   |
| 実験③ | 半円で実験<br>→「直径部分は直線なのに円の方に影響され線がまがった」  |  |
| 実験④ | 五角形で実験                                |  |
| 実験⑤ | 長方形で実験                                |  |

正三角形を土台に用いた塩山の観察・実験からは、簡単に正解を導き出すことができないため、検証の際に間違いに気づき修正する姿を引き出すことができたと考えられる。

その他にも、仮説を検証するための土台を考え、塩山を製作し、仮説の検証をしている生徒もいた。仮説を検証するための土台を考えて生徒のワークシートの記述を表6に示す。

生徒Dは、「稜線の本数と頂点の数の法則」について探究していた。正三角形の土台を使った実験で観察された内容から、「頂点の数と同じ数の稜線が表れる」、「辺の数と同じ数の稜線が表れる」と仮説を立てた。その後、円・正方形で、実験を行い、円と正方形の土台では、仮説が成り立つことを確かめていた。さらに、リボン型・長方形の土台を用いて実験を行い、「図形の中心部分も稜線が表れたため、稜線は頂点の数だけ表れるのではない」ことを確認し、仮説が間違っていることに気付いていた。

生徒Eは、「稜線の本数と頂点の数の法則」について探究していた。正三角形の土台を使った実験で観察された内容から、「土台の図形の線の数と稜線の数に等しくなる」と仮説を立てた。

その後、正方形・王冠型・半円・五角形・長方形で、実験を行い、仮説の検証をしていた。

本活動では、塩山を製作・観察し稜線の法則を考えるだけでなく、仮説の検証に適した土台を考え、結果を予測する活動も行った。そのため、仮説の検証のための条件設定を生徒自身で行う活動が引き出された。

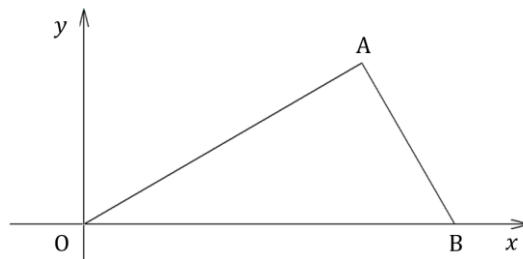
## 5. グループでの探究活動

本章では、第 3～5 時の授業で行った活動のワークシートと授業後のアンケートを分析し、探究内容を明らかにする。第 3～5 時では、生徒の興味関心に沿って、「稜線の数学的表現の探究」、「体積の探究」、「粒子による塩山形状の違いの探究」に活動を分け、グループで活動を行った。各活動について分析を行う。

### 5.1 稜線の数学的表現の探究における探究内容の分析

稜線の数学的表現の探究では、稜線を数式に表す活動を行った。稜線の数学的表現の探究については 3 つのグループが取り組んだ。このグループが取り組んだ課題を以下に示す。

【課題】図に示すように  $\angle AOB = 30^\circ$ ,  $\angle OAB = 90^\circ$ ,  $OA = 10$  の  $\triangle OAB$  について、辺  $OA$ ,  $OB$  を境界とするときの稜線の方程式を求める。



第 1～2 時の活動を通して、以下の 2 点について気づきが促された。

- ・ 三角形の土台を用いて塩山を創ると、頂点が内心に存在する。
- ・ 角の二等分線が稜線として出現する。

この 2 点を基に探究活動が行われた。

[グループ①]

グループ①の稜線を求める方針を以下に示す。

$\angle AOB$  の二等分線と辺  $AB$  の交点を  $L$  とおき、 $L$  の座標から稜線の式を算出する。

このグループのワークシートを図 4 に示す。図 4 より、ベクトルの内積を基に点  $L$  の座標を求めようとしていることがわかる。このグループが使用した式を以下に示す。

$$\begin{aligned}\vec{OA} \cdot \vec{OL} &= |\vec{OA}| |\vec{OL}| \cos 15^\circ \\ \cos 15^\circ &= \cos(45^\circ - 30^\circ) \\ &= \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ\end{aligned}$$

上記のように、加法定理を用いて値を求めていることがわかる。その後、 $\vec{OA}$ ,  $\vec{OL}$ ,  $|\vec{OA}|$ ,  $|\vec{OL}|$ ,  $\cos 15^\circ$  の値を代入し、内積の式を解いていた。ベクトルの内積の式、 $\vec{OA}$ ,  $\vec{OL}$  の値の設定で間違ってしまったため、正しい解答にたどり着くことはできなかったものの、既習内容を活用して課題に取り組んでいたことがわかる。

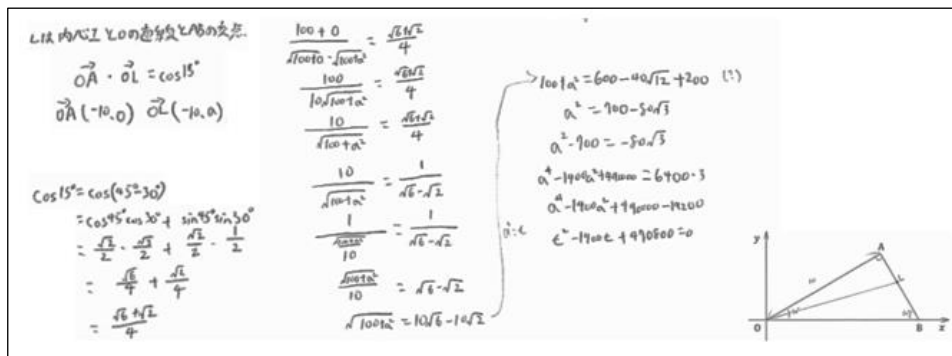


図4 塩山の数式表現活動の内積を使った探究のワークシートの記述

## [グループ②]

グループ②の稜線を求める方針を以下に示す。

$\triangle OAB$  の内心を  $G$  とおき、2点  $G$ 、 $O$  を結ぶ直線の長さから稜線の式を算出する。

このグループのワークシートを図5に示す。図5より、直角三角形や内接円などの図形の性質を利用して稜線の長さを求めていることわかる。まず初めに、三角比を使って内接円の半径を求め、求めた内接円の半径を基に、三角比を使って線分  $OA$ 、 $OB$ (頂点  $A$ 、 $B$  からそれぞれのびている稜線)の長さを求めている。そして、三平方を使い線分  $OG$ (頂点  $O$  からのびている稜線)の長さを求めた。

内接円の半径を算出するところで間違ってしまったため、正しい解答にたどり着くことはできなかったものの、補助線を引きながら  $1:2:\sqrt{3}$  や、 $1:1:\sqrt{2}$  の直角三角形を見出して、生徒自身の知識を活用することで、辺の長さを求めることができていた。

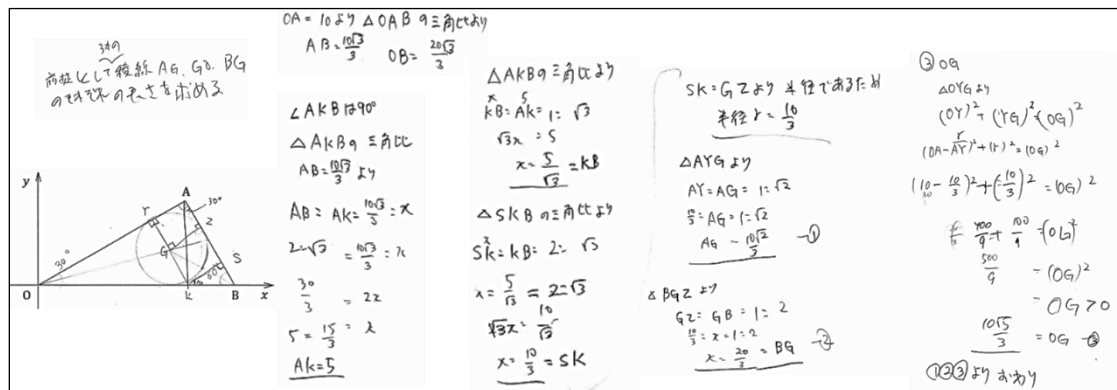


図5 塩山の数式表現活動の直角三角形の三角比を使った探究のワークシートの記述

## [グループ③]

グループ③の稜線を求める方針を以下に示す。

稜線は辺  $OA$  と辺  $OB$  から等距離にある点の軌跡によって稜線の式を算出する。

このグループのワークシートを図6に示す。まず初めに、直線  $OA$  の方程式を算出するために、点  $A$  の座標を明らかにし、2点  $O$ 、 $A$  の座標を基に直線  $OA$  の方程式を算出した。

グループ③は第3~4時において粒子による塩山形状の違いの探究に取り組んでおり、第5時に稜線の数学的表現の探究を始めたため、直線  $OA$  の方程式を求めるところまで終了した。

以上より、稜線の数学的表現の探究に取り組んだ生徒は、ベクトルの内積・加法定理・内心の性質・三角比・三平方・軌跡など数学的内容を活用しながら課題に取り組み、数学的な探究が行われたことがわかる。その一方で、生徒の計算が正しいかどうかを確認する活動を取り入れることができなかったため、計算に間違いも見られた。そのため、塩山の稜線の長さを実際に計測することや、求めた方程式に値を代入して図示することなどの確認する活動を取り入れる指導が必要であると考えられる。

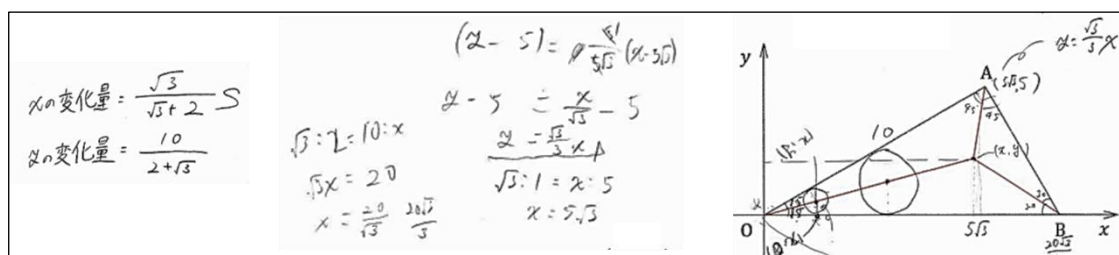


図6 塩山の数式表現活動の軌跡の考え方を使った探究のワークシートの記述

## 5.2 体積の探究における探究内容の分析

体積の探究については、1つのグループが取り組んだ。このグループのワークシートを図7に示す。体積の探究を行ったグループの活動の方針を以下に示す。

- ① 土台の面積を算出する
- ② 塩を盛ったときに形成される塩山の高さを計測する
- ③ 公式を使って体積を算出する
- ④ 積分を使って体積を算出する

まず初めに、一辺が4cmの正方形を土台とする塩山について活動を行った。土台の面積が $16\text{cm}^2$ 、塩山を実際に測定した高さが1.3cmであることから、公式を用いて体積を算出した。

$$V = 16 \times 1.3 \div 3 = 6.93 \text{ cm}^3$$

次に、形成された塩山を図8のように4つに分割し、その1つを積分を用いて算出を試みた。図8のように図形を置き、区間 $0 \leq x \leq 2\sqrt{2}$ における積分について考えた。 $yz$ 面に平行な断面が直角三角形になることから、断面の三角形の高さと底辺の長さを導き、塩山全体の体積を算出した。

$$V = 4 \int_0^{2\sqrt{2}} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1.3\sqrt{2}}{4} x \cdot x \right) dx = 6.93 \text{ cm}^3$$

となる。

塩山を4分割する考え方については教員が支援を行いながら確認したが、その後の立式については生徒自身が行った。積分区間の設定は正しく行えたが、高さや底辺の長さの立式で間違えたため、正しい解を導くことができなかった。しかし、このグループは、公式によって算出した値と積分を用いた算出の2つの方法を用いていたため、積分を用いた計算において値が異なることに気づき、計算しなおす姿が見られた。また、正三角形・正五角形を土台とした塩山に関してもそれぞれ公式による算出は行われていたが、時間の都合上、積分で算出する活動はできなかった。

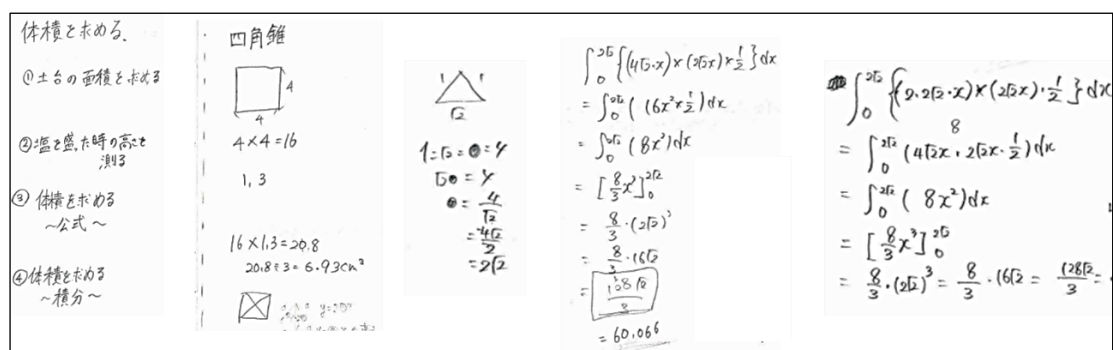


図7 体積の探究におけるワークシート

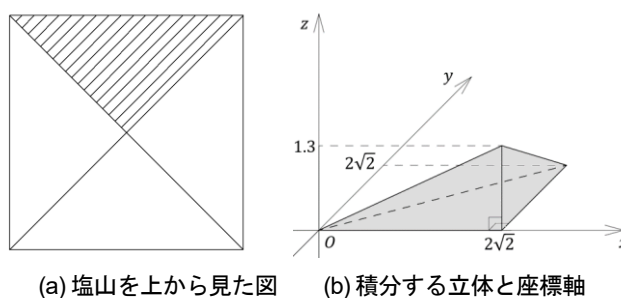


図8 正方形を土台とする塩山の体積を求める際の考え方

### 5.3 粒子による塩山形状の違いの探究における探究内容の分析

粒子による塩山形状の違いの探究では、カラーサンド2種類(赤：粒子径1.0mm，緑：粒子径0.2mm)，ペレット，ベビーパウダーを用いて，粒子の違いが塩山の形状に与える影響を分析する活動を行った。粒子による塩山形状の違いの探究については4つのグループが取り組んだ。4つのグループのうち1つのグループを取り上げて分析を行う。

#### [グループ①]

グループ①の実験内容を以下に示す。

実験①：同じ土台で違う粒子を盛り，稜線の出方を見る

実験②：稜線が出た時の高さを測る

予想①：ペレットは稜線が出なさそう

(カラーサンド)緑・赤・ベビーパウダーは稜線が出る

ワークシートを図9に示す。正三角形の土台を用いて，4種の粒子で，比較実験を行っている。ワークシートの記述から，実験の課題を設定した後，予想を立て，見通しをもって実験していることがわかる。実験の結果については，粒子の大きさによる稜線の出方や塩山の高さと質量を表に整理し，粒子の違いによる塩山の違いを，写真に撮影して記録している(図10)。実験では，稜線の出方だけでなく，塩山の高さと質量についても計測していることから，塩山を多面的にとらえていることがわかる。稜線の出方と塩山の高さを比較した結果，「粒子の大きさが小さくなればなるほど，土台に盛れる高さが高くなる。また，稜線もきれいにしやすくなる」ことを結論としてまとめている。このことについては，他の3つの班でも同様の結果となり，結論として記述されていた。

粒子による塩山形状の違いの探究では，データの測定・整理・分類・読み取りの活動が引き出されていることがわかる。

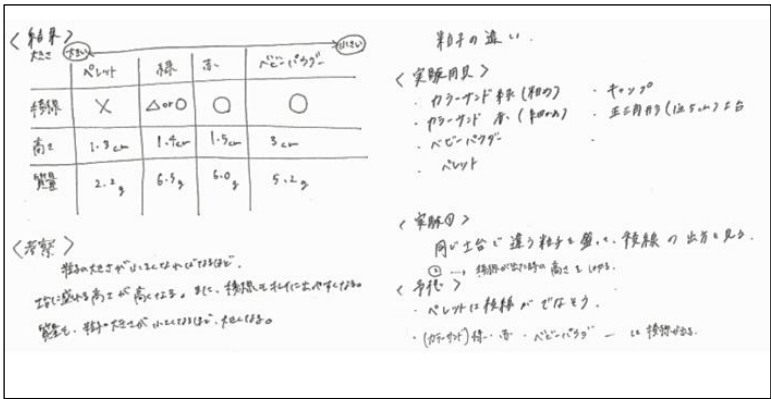


図9 粒子による高さと質量の違いの探究における生徒のまとめの記述



図10 生徒が撮影した実験の記録

5-4 塩山を用いた探究活動において引き出された数学的内容

塩山を用いた探究活動として、「稜線の数学的表現の探究」、「体積・表面積の探究」、「粒子による塩山形状の違いの探究」が行われた。それぞれの活動の中で引き出された数学的内容を表7に示す。

今回の授業で行った探究活動の中では、高等学校数学科(以下高校数学とする)だけでなく、小学校からの系統的な内容を活用しながら、探究を行っていることがわかる。塩山の探究では、高校数学の知識だけでなく、これまでに習得した知識を活用しながら課題の解決を行うため、数学の系統性を実感できることが期待できる。また、多角的な方法で解に迫っていることがわかる。

表7 活動の中で引き出された数学的内容

|          |     | 稜線の数学的表現                                    | 体積                    | 粒子による塩山形状の違い                   |
|----------|-----|---------------------------------------------|-----------------------|--------------------------------|
| 高等学校     | I   | (1) 数と式<br>「式」<br>(2) 図形と計量<br>「三角比」        | (2) 図形と計量<br>「三角比」    |                                |
|          | II  | (2) 図形と方程式<br>直線と円                          | (5) 微分・積分の考え          |                                |
|          | III |                                             | (2) 積分法               |                                |
|          | A   |                                             |                       |                                |
|          | B   |                                             |                       |                                |
| 中学校以前の内容 | C   | (1) ベクトル<br>平面上のベクトル                        |                       | ・データの分類<br>・整理<br>・読み取り<br>・測定 |
|          |     | ・平方根 ・図形の相似<br>・円周角と中心角<br>・三平方の定理<br>・一次関数 | ・測定<br>・空間図形<br>・一次関数 |                                |



## 6. 結言

本研究は、理数探究、数学的活動の教材として「塩山」を取り上げ、高等学校数学において実践を行い、活動の内容と特徴を明らかにした。本研究で明らかになったことを以下に示す。

- ・導入時に重心・内心・垂心が一点で重なる正三角形を土台に用いたことで、一般的な三角形を土台とする塩山形成の法則を容易に導き出すことができないため、検証の際に間違いに気づき修正する姿が引き出された。
- ・塩山の製作・観察から稜線の法則を考えるだけでなく、仮説の検証に適した土台を考え、結果を予測する活動を取り入れたことで、仮説の検証のための条件設定を生徒自身で行う活動が引き出された。
- ・稜線の数学的表現の探究に取り組んだ生徒は、ベクトルの内積・加法定理・内心の性質・三角比・三平方・軌跡など数学的内容を活用しながら課題に取り組むことができおり、数学的活動が行われた。
- ・体積の探究に取り組んだ生徒は、公式による算出と積分を用いた算出の2つの方法を用いていたため、値を比較し、値が異なることに気づくことができ、計算しなおす姿が見られた。体積を求める過程においても検証・修正が行われていた。
- ・粒子による塩山形状の違いの探究では、データの測定・整理・分類・読み取りの活動が引き出された。

本研究は、JSPS 科研費 JP21K02924 の助成を受けたものである。

## 参考文献

- 1) 文部科学省：中央教育審議会 幼稚園，小学校，中学校，高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善及び必要な方策等について(答申)(中教審第197号)(2016)
- 2) 文部科学省：高等学校学習指導要領解説 数学編(2018)
- 3) 文部科学省：高等学校学習指導要領解説 理数編(2018)
- 4) 澁谷久：数学教育に個人による現物実験を取り入れる実証的研究，稚内北星学園大学紀要，第17号 pp.19-32(2017)
- 5) 池田真結，郷原惇平，佐古彰史，渡辺雄貴：高等学校数学科における現物実験を取り入れた教材の開発，日本教育工学論文誌，第42号，pp.117-120(2018)
- 6) 黒田俊郎：塩が教える幾何学，西三数学サークル(2000)
- 7) 早苗雅史：数学玉手箱，デザインエッグ社(2016)
- 8) 矢崎成俊：実験数学読本 真剣に遊ぶ数理実験から大学数学へ，日本評論社(2016)
- 9) 松永泰弘，八木涼，松永元輝，大西俊弘：理数探究における数学的ものづくり活動教材「塩山」の開発，静岡大学教育学部研究報告 教科教育学編，第49号，pp.115-127(2017)
- 10) 松永泰弘，守屋太雅，松永元輝：高校数学における塩山を用いた数学的活動と授業実践，日本産業技術教育学会誌，第63巻，第2号，pp.229-237(2021)
- 11) 椿淳一郎・鈴木道隆・神田良照：粒子・粉体工学，日刊工業新聞社(2002)