

## 材料の物性値の温度依存性を考慮した複合球の定常熱応力\*

入交 裕\*\*, 竹内洋一郎\*\*\*, 野田直剛\*\*\*\*

### 1. 緒 言

近年、複合材料の使用の増加に伴い、複合材料の熱応力は重要な問題となってきた。複合材は材料の物性値の差異のため、単一材に比べて、一般に熱応力が過大となる。そのため、複合円筒や複合球の熱応力の解析例はかなり報告されている<sup>(1)~(3)</sup>。しかし、それらの報告では材料の物性値の温度依存性は考慮されていない。また、一方において材料の物性値の温度依存性を考慮した熱応力の解析例の報告も少なくない<sup>(4)~(7)</sup>。しかしながら、両者を総合した材料の物性値の温度依存性を考慮した複合材の解析例はみあたらない。

そこで本報告では材料の物性値の温度依存性を考慮した複合中空球の定常熱応力を解析した。温度分布は簡単な閉形の解であるが、熱応力の解析は困難になり、摂動法を用いて解析した。なお解析にあたり、材料の物性値については、直接熱応力に大きな影響を与える縦弾性係数と線膨張係数は温度に依存するとし、熱伝導率とボアソン比は温度に依存しないと仮定した。実験結果から<sup>(8)(9)</sup>、縦弾性係数は  $e$  のべき乗とし、線膨張係数は温度の一次式で表されたとした。

### 2. 解 析

図1に示すように内材の内半径  $a$ 、内材の外半径  $b$ 、外材の内半径  $c$ 、外材の外半径  $c$  の複合中空球

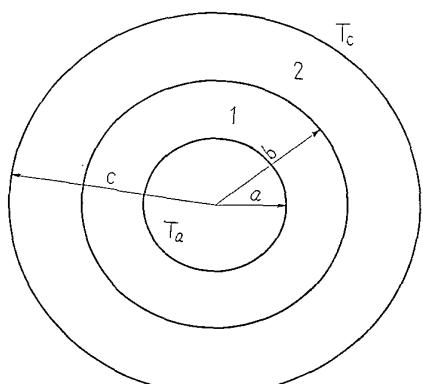


図1 複合中空球

\* 昭和51年6月30日 関西支部第235回講演会において講演、原稿受付 昭和51年11月11日。

\*\* 正員、阿南工業高等専門学校。

\*\*\* 正員、大阪府立大学工学部(堺市百舌鳥梅町4-804)。

\*\*\*\* 正員、静岡大学工学部。

が、内側の媒質温度が  $T_a$ 、外側の媒質温度が  $T_c$  の中に浸されている場合の複合中空球の定常熱応力問題について考える。複合球の内材には添字1を、外材には添字2をつけて区別する。

熱伝導の基礎式は

$$\nabla^2 T_k = 0 \quad (k=1, 2) \quad \dots \dots \dots \quad (1)$$

境界条件は

$$\left. \begin{aligned} r=a \text{ で } \frac{\partial T_1}{\partial r} - h_1(T_1 - T_a) &= 0 \\ r=b \text{ で } T_1 = T_2, \quad \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} &= \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial r} \\ r=c \text{ で } \frac{\partial T_2}{\partial r} + h_2(T_2 - T_c) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (2)$$

ここで、 $\lambda_1, \lambda_2$  は熱伝導率、 $h_1, h_2$  は内外境界における相対熱伝達率である。式(1)を式(2)を満足するように解くと、温度分布は

$$T_1 = A_1 + B_1 r^{-1} = T_a + (T_c - T_a) \times \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{a^{-1} + a^{-2} h_1^{-1} - r^{-1}}{b^{-1} - c^{-1} + c^{-2} h_2^{-1} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} (b^{-1} - a^{-1} - a^{-2} h_1^{-1})} \quad \dots \dots \dots \quad (3)$$

$$T_2 = A_2 + B_2 r^{-1} = T_c + (T_c - T_a) \times \frac{c^{-1} - c^{-2} h_2^{-1} - r^{-1}}{b^{-1} - c^{-1} + c^{-2} h_2^{-1} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} (b^{-1} - a^{-1} - a^{-2} h_1^{-1})} \quad \dots \dots \dots \quad (4)$$

次に、材料の物性値の温度依存性について考える。図2に示すように、多くの材料に対し、線膨張係数は

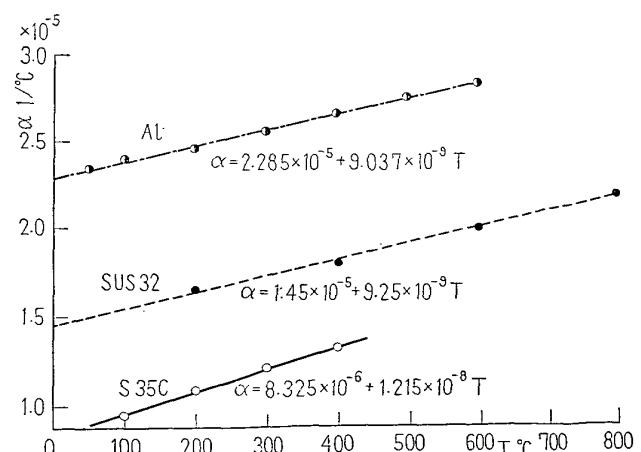


図2 線膨張係数の温度依存性

温度の一次式で表される。また図3に示すように、多くの材料に対し、縦弾性係数は温度の $e$ のべき乗で表される。ポアソン比も温度により変化するが、線膨張係数、縦弾性係数に比べて、温度依存性が少ないので、ポアソン比は温度に依存しないと仮定する。すなわち、縦弾性係数 $E_k$ と線膨張係数 $\alpha_k$ は

$$E_k = c_k e^{D_k T_k}, \quad \alpha_k = F_k + 2G_k T_k \quad \dots \dots \dots (5)$$

で表される。

つりあい方程式は

$$\frac{\partial \sigma_{rrk}}{\partial r} + \frac{2}{r} (\sigma_{rrk} - \sigma_{\theta\theta k}) = 0 \quad (k=1, 2) \quad \dots \dots \dots (6)$$

物性値の温度依存性を考慮したフックの法則は

$$\sigma_{rrk} = \frac{m_k E_k}{(m_k+1)(m_k-2)} \left\{ (m_k-1) \frac{\partial u_k}{\partial r} + 2 \frac{u_k}{r} - (m_k+1) \int_{T_i}^T \alpha_k dT \right\} \quad \dots \dots \dots (7)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi k} = \sigma_{\theta\theta k} = \frac{m_k E_k}{(m_k+1)(m_k-2)} \left\{ \frac{\partial u_k}{\partial r} + m_k \frac{u_k}{r} - (m_k+1) \int_{T_i}^T \alpha_k dT \right\} \quad \dots \dots \dots (8)$$

ここで、 $u_k$ は半径方向変位、 $T_i$ は初期温度、 $m_k$ はポアソン数である。式(7)と(8)を式(6)に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_k}{\partial r^2} + \left( \frac{2}{r} - \frac{B_k D_k}{r^2} \right) \frac{\partial u_k}{\partial r} - \left( \frac{2}{r^2} + \frac{2 B_k D_k}{r^3 (m_k-1)} \right) u_k = & - \frac{m_k+1}{m_k-1} [(F_k + 2G_k A_k) B_k r^{-2} + 2G_k B_k^2 r^{-3} \\ & + B_k D_k r^{-2} (F_k (A_k - T_i) + G_k (A_k^2 - T_i^2) + (F_k B_k + 2G_k B_k A_k) r^{-1} + G_k B_k^2 r^{-2})] \quad (k=1, 2) \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (9)$$

式(9)を書き直すと

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_k}{\partial r^2} + \left( \frac{2}{r} - \frac{B_k \delta D_1}{r^2} \right) \frac{\partial u_k}{\partial r} - \left( \frac{2}{r^2} + \frac{2 B_k \delta D_1}{r^3 (m_k-1)} \right) u_k = & - \frac{m_k+1}{m_k-1} [(F_k + 2G_k A_k) B_k r^{-2} + 2G_k B_k^2 r^{-3} \\ & + B_k \delta D_1 (F_k (A_k - T_i) + G_k (A_k^2 - T_i^2) + (F_k B_k + 2G_k B_k A_k) r^{-1} + G_k B_k^2 r^{-2})] \quad (k=1, 2) \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (10)$$

ここで、 $\delta$ は $k=1$ のとき $\delta=1$ 、 $k=2$ のとき $\delta=D_2/D_1$ である。

式(10)の解を求めるために摂動法を用いる。すなわち、 $D_1$ を摂動パラメータとする。変位 $u_k$ を

$$u_k = \sum_{n=0}^{\infty} u_{kn} D_1^n \quad (k=1, 2) \quad \dots \dots \dots (11)$$

と置き、式(10)に代入すると

$n=0$ のとき

$$\frac{\partial^2 u_{k0}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_{k0}}{\partial r} - \frac{2}{r^2} u_{k0} = - \frac{m_k+1}{m_k-1} [(F_k + 2G_k A_k) B_k r^{-2} + 2G_k B_k^2 r^{-3}] \quad (k=1, 2) \quad \dots \dots \dots (12)$$

$n=1$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_{k1}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_{k1}}{\partial r} - \frac{2}{r^2} u_{k1} = & \frac{B_k \delta}{r^2 (m_k-1)} \left\{ (m_k-1) \frac{\partial u_{k0}}{\partial r} + \frac{2}{r} u_{k0} \right\} - \frac{m_k+1}{m_k-1} \frac{B_k \delta}{r^2} [F_k (A_k - T_i) \\ & + G_k (A_k^2 - T_i^2) + (F_k B_k + 2G_k A_k B_k) r^{-1} + G_k B_k^2 r^{-2}] \quad (k=1, 2) \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (13)$$

$n \geq 2$ のとき

$$\frac{\partial^2 u_{kn}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_{kn}}{\partial r} - \frac{2}{r^2} u_{kn} = \frac{B_k \delta}{r^2 (m_k-1)} \left\{ (m_k-1) \frac{\partial u_{k(n-1)}}{\partial r} + \frac{2}{r} u_{k(n-1)} \right\} \quad (k=1, 2) \quad \dots \dots \dots (14)$$

式(12)～(14)の一般解は

$$u_{k0} = H_{k0} r + K_{k0} r^{-2} + \frac{m_k+1}{2(m_k-1)} (F_k + 2G_k A_k) B_k + \frac{m_k+1}{2(m_k-1)} 2G_k B_k^2 r^{-1} \quad \dots \dots \dots (15)$$

$$\begin{aligned} u_{k1} = H_{k1} r + K_{k1} r^{-2} - \frac{B_k \delta}{m_k-1} \left[ \frac{m_k+1}{2} H_{k0} + \frac{m_k-2}{2} K_{k0} r^{-3} - \frac{m_k+1}{2} \{F_k (A_k - T_i) + G_k (A_k^2 - T_i^2)\} \right. \\ \left. + \frac{(m_k+1)(2-m_k)}{2(m_k-1)} (F_k + 2G_k A_k) B_k r^{-1} + \frac{2(m_k+1)(2-m_k)}{3(m_k-1)} G_k B_k^2 r^{-2} \left( \ln r + \frac{1}{3} \right) \right] \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (16)$$

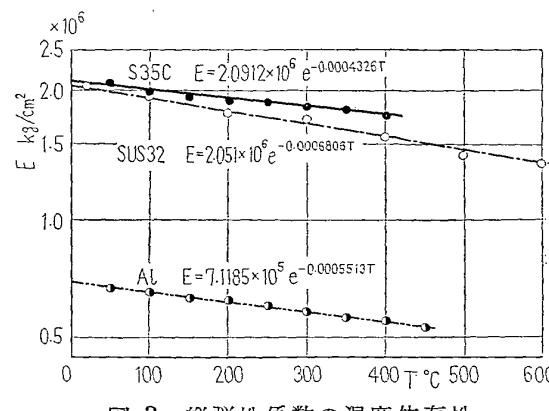


図3 縦弾性係数の温度依存性

$$u_{kn} = H_{kn}r + K_{kn}r^{-2} + \frac{B_k\delta}{3(m_k-1)} \left[ r \int \left\{ (m_k-1) \frac{\partial u_{k(n-1)}}{\partial r} + \frac{2}{r} u_{k(n-1)} \right\} r^{-2} dr - r^2 \int r \left\{ (m_k-1) \frac{\partial u_{k(n-1)}}{\partial r} + \frac{2}{r} u_{k(n-1)} \right\} dr \right] \quad (n \geq 2) \quad (17)$$

ここで,  $H_{kn}$ ,  $K_{kn}$  ( $k=1, 2, n=0, 1, 2, \dots$ ) は境界条件より決定される未知定数である。

次に, 式 (11) を式 (7) と (8) に代入すると

$$\sigma_{rrk} = \frac{m_k c_k e^{D_k T_k}}{(m_k+1)(m_k-2)} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (m_k-1) \frac{\partial u_{kn}}{\partial r} + 2 \frac{u_{kn}}{r} \right\} D_1^n + (m_k-1) \frac{\partial u_{k0}}{\partial r} + 2 \frac{u_{k0}}{r} - (m_k+1) \{ F_k(T_k - T_i) + G_k(T_k^2 - T_i^2) \} \right] \quad (18)$$

$$\sigma_{\theta\theta k} = \sigma_{\varphi\varphi k} = \frac{m_k c_k e^{D_k T_k}}{(m_k+1)(m_k-2)} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\partial u_{kn}}{\partial r} + m_k \frac{u_{kn}}{r} \right) D_1^n + \frac{\partial u_{k0}}{\partial r} + m_k \frac{u_{k0}}{r} - (m_k+1) \{ F_k(T_k - T_i) + G_k(T_k^2 - T_i^2) \} \right] \quad (19)$$

となる。ここで、

$$\sigma_{rrk} = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{rrkn} D_1^n, \quad \sigma_{\theta\theta k} = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{\theta\theta kn} D_1^n, \quad \sigma_{\varphi\varphi k} = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{\varphi\varphi kn} D_1^n \quad (20)$$

とおくと、

$$\sigma_{rrk0} = \frac{m_k c_k e^{D_k T_k}}{(m_k+1)(m_k-2)} \left[ (m_k-1) \frac{\partial u_{k0}}{\partial r} + 2 \frac{u_{k0}}{r} - (m_k+1) \{ F_k(T_k - T_i) + G_k(T_k^2 - T_i^2) \} \right] \quad (21)$$

$$\sigma_{\theta\theta k0} = \sigma_{\varphi\varphi k0} = \frac{m_k c_k e^{D_k T_k}}{(m_k+1)(m_k-2)} \left[ \frac{\partial u_{k0}}{\partial r} + m_k \frac{u_{k0}}{r} - (m_k+1) \{ F_k(T_k - T_i) + G_k(T_k^2 - T_i^2) \} \right] \quad (22)$$

$$\sigma_{rrkn} = \frac{m_k c_k e^{D_k T_k}}{(m_k+1)(m_k-2)} \left\{ (m_k-1) \frac{\partial u_{kn}}{\partial r} + 2 \frac{u_{kn}}{r} \right\} \quad (n=1, 2, \dots) \quad (23)$$

$$\sigma_{\theta\theta kn} = \sigma_{\varphi\varphi kn} = \frac{m_k c_k e^{D_k T_k}}{(m_k+1)(m_k-2)} \left\{ \frac{\partial u_{kn}}{\partial r} + m_k \frac{u_{kn}}{r} \right\} \quad (n=1, 2, \dots) \quad (24)$$

式 (15)~(17) を式 (21)~(24) に代入すると

$$\sigma_{rrk0} = \frac{m_k c_k e^{D_k T_k}}{(m_k+1)(m_k-2)} \left[ (m_k+1)H_{k0} + 2(m_k-2)K_{k0}r^{-3} - (m_k+1) \{ F_k(A_k - T_i) + G_k(A_k^2 - T_i^2) \} + \frac{(m_k+1)(2-m_k)}{m_k-1} (F_k + 2G_k A_k) B_k r^{-1} + \frac{2(m_k+1)(2-m_k)}{m_k-1} G_k B_k^2 r^{-2} \right] \quad (25)$$

$$\sigma_{\theta\theta k0} = \sigma_{\varphi\varphi k0} = \frac{m_k c_k e^{D_k T_k}}{(m_k+1)(m_k-2)} \left[ (m_k+1)H_{k0} + (m_k-2)r^{-3} - (m_k+1) \{ F_k(A_k - T_i) + G_k(A_k^2 - T_i^2) \} + \frac{(m_k+1)(2-m_k)}{2(m_k-1)} (F_k + 2G_k A_k) B_k r^{-1} \right] \quad (26)$$

$$\sigma_{rrkn} = \frac{m_k c_k e^{D_k T_k}}{(m_k+1)(m_k-2)} \left[ (m_k+1)H_{kn} - 2(m_k-2)K_{kn}r^{-3} + \frac{B_k\delta}{3(m_k-1)} (m_k+1) \times \int r^{-2} \left\{ (m_k-1) \frac{\partial u_{k(n-1)}}{\partial r} + \frac{2}{r} u_{k(n-1)} \right\} dr + 2(m_k-2)r^{-3} \int r \left\{ (m_k-1) \frac{\partial u_{k(n-1)}}{\partial r} + \frac{2}{r} u_{k(n-1)} \right\} dr \right] \quad (n=1, 2, \dots) \quad (27)$$

$$\sigma_{\theta\theta kn} = \sigma_{\varphi\varphi kn} = \frac{m_k c_k e^{D_k T_k}}{(m_k+1)(m_k-2)} \left[ (m_k+1)H_{kn} + (m_k-2)K_{kn}r^{-3} + \frac{B_k\delta}{3(m_k-1)} \times \left[ (m_k+1) \int r^{-2} \left\{ (m_k-1) \frac{\partial u_{k(n-1)}}{\partial r} + \frac{2}{r} u_{k(n-1)} \right\} dr - (m_k-2)r^{-3} \int r \times \left\{ (m_k-1) \frac{\partial u_{k(n-1)}}{\partial r} + \frac{2}{r} u_{k(n-1)} \right\} dr \right] \right] \quad (n=1, 2, \dots) \quad (28)$$

次に境界条件について考える。

$$\left. \begin{array}{l} r=a \text{ で } \sigma_{rr1}=0 \\ r=b \text{ で } u_1=u_2, \sigma_{rr1}=\sigma_{rr2} \\ r=c \text{ で } \sigma_{rr2}=0 \end{array} \right\} \quad (29)$$

式(11)と(20)より、式(29)は

$$\left. \begin{array}{l} r=a \text{ で } \sigma_{rr1n}=0 \\ r=b \text{ で } u_{1n}=u_{2n}, \quad \sigma_{rr1n}=\sigma_{rr2n} \quad (n=0,1,\dots) \\ r=c \text{ で } \sigma_{rr2n}=0 \end{array} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (30)$$

式(15)と(25)を式(30)に代入すると

$$\left. \begin{array}{l} (m_1+1)H_{10}-2(m_1-2)K_{10}\alpha^{-3}=(m_1+1)\{F_1(A_1-T_t)+G_1(A_1^2-T_t^2)\} \\ -\frac{(m_1+1)(2-m_1)}{m_1-1}(F_1+2G_1A_1)B_1\alpha^{-1}-\frac{2(m_1+1)(2-m_1)}{m_1-1}G_1B_1^2\alpha^{-2} \\ H_{10}b+K_{10}b^{-2}-H_{20}b-K_{20}b^{-2}=-\frac{m_1+1}{2(m_1-1)}(F_1+2G_1B_1)B_1 \\ -\frac{m_1+1}{2(m_1-1)}2G_1B_1^2b^{-1}+\frac{m_2+1}{2(m_2-1)}(F_2+2G_2B_2)B_2+\frac{m_2+1}{2(m_2-1)}2G_2B_2^2b^{-1} \\ \frac{m_1c_1e^{D_1T_1(b)}}{m_1-2}H_{10}-\frac{2m_1c_1e^{D_1T_1(b)}}{m_1+1}K_0b^{-3}-\frac{m_2c_2e^{D_2T_2(b)}}{m_2-2}H_{20}+\frac{2m_2c_2e^{D_2T_2(b)}}{m_2+1}K_2b^{-3} \\ =-\frac{m_1c_1e^{D_1T_1(b)}}{(m_1+1)(m_1-2)}[-(m_1+1)\{F_1(A_1-T_t)+G_1(A_1^2-T_t^2)\} \\ +\frac{(m_1+1)(2-m_1)}{m_1-1}(F_1+2G_1A_1)B_1b^{-1}+\frac{2(m_1+1)(2-m_1)}{m_1-1}G_1B_1^2b^{-2}] \\ +\frac{m_2c_2e^{D_2T_2(b)}}{(m_2+1)(m_2-2)}[-(m_2+1)\{F_2(A_2-T_t)+G_2(A_2^2-T_t^2)\} \\ +\frac{(m_2+1)(2-m_2)}{m_2-1}(F_2+2G_2A_2)B_2b^{-1}+\frac{2(m_2+1)(2-m_2)}{m_2-1}G_2B_2^2b^{-2}] \\ (m_2+1)H_{20}-2(m_2-2)K_{20}\alpha^{-3}=(m_2+1)\{F_2(A_2-T_t)+G_2(A_2^2-T_t^2)\} \\ -\frac{(m_2+1)(2-m_2)}{m_2-1}(F_2+2G_2A_2)B_2\alpha^{-1}-\frac{2(m_2+1)(2-m_2)}{m_2-1}G_2B_2^2\alpha^{-2} \end{array} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (31)$$

ただし、 $T_1(b)$ 、 $T_2(b)$ は $r=b$ におけるそれぞれ内材、外材の温度である。四元連立一次方程式(31)を解くことにより、未知係数 $H_{10}$ 、 $K_{10}$ 、 $H_{20}$ 、 $K_{20}$ が求まる。

$n \geq 1$ に対し、

$$\left. \begin{array}{l} (m_1+1)H_{rn}-2(m_1-2)K_{1n}\alpha^{-3}=-\frac{B_1\delta}{3(m_1-1)}\left[(m_1+1)\int r^{-2}\left\{(m_1-1)\frac{\partial u_{1(n-1)}}{\partial r}\right.\right. \\ \left.\left.+\frac{2}{r}u_{1(n-1)}\right\}dr+2(m_1-2)\alpha^{-3}\int r\left\{(m_1-1)\frac{\partial u_{1(n-1)}}{\partial r}+\frac{2}{r}u_{1(n-1)}\right\}dr\right]_{r=a} \\ H_{1nb}+K_{1nb}b^{-2}-H_{2nb}-K_{2nb}b^{-2}-\frac{B_1\delta}{3(m_1-1)}\left[r\int\left\{(m_1-1)\frac{\partial u_{1(n-1)}}{\partial r}+\frac{2}{r}u_{1(n-1)}\right\}\right. \\ \times r^{-2}dr-r^{-2}\int r\left\{(m_1-1)\frac{\partial u_{1(n-1)}}{\partial r}+\frac{2}{r}u_{1(n-1)}\right\}dr\Big]_{r=b}+\frac{B_2\delta}{3(m_2-1)} \\ \times\left[r\int\left\{(m_2-1)\frac{\partial u_{2(n-1)}}{\partial r}+\frac{2}{r}u_{2(n-1)}\right\}r^{-2}dr-r^{-2}\int r\left\{(m_2-1)\frac{\partial u_{2(n-1)}}{\partial r}\right.\right. \\ \left.\left.+\frac{2}{r}u_{2(n-1)}\right\}dr\right]_{r=b}+V_n \\ \frac{m_1c_1e^{D_1T_1(b)}}{(m_1-2)}H_{1n}-\frac{2m_1c_1e^{D_1T_1(b)}}{m_1+1}K_{1n}b^{-3}-\frac{m_2c_2e^{D_2T_2(b)}}{m_2-2}H_{2n}+\frac{2m_2c_2e^{D_2T_2(b)}}{m_2+1}K_{2n}b^{-3} \\ =-\frac{B_1}{3(m_1-1)}\left[(m_1+1)\int r^{-2}\left\{(m_1-1)\frac{\partial u_{1(n-1)}}{\partial r}+\frac{2}{r}u_{1(n-1)}\right\}dr\right. \\ \left.+2(m_1-2)r^{-3}\int r\left\{(m_1-1)\frac{\partial u_{1(n-1)}}{\partial r}+\frac{2}{r}u_{1(n-1)}\right\}dr\right]_{r=b} \\ +\frac{B_2\delta}{3(m_2-1)}\left[(m_2+1)\int r^{-2}\left\{(m_2-1)\frac{\partial u_{2(n-1)}}{\partial r}+\frac{2}{r}u_{2(n-1)}\right\}dr\right. \\ \left.+2(m_2-2)r^{-3}\int r\left\{(m_2-1)\frac{\partial u_{2(n-1)}}{\partial r}+\frac{2}{r}u_{2(n-1)}\right\}dr\right]_{r=b} \end{array} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (32)$$

$$(m_2+1)H_{2n}-2(m_2-2)K_{2n}c^{-3}=-\frac{B_2\delta}{3(m_2-1)}\left[\left.(m_2+1)\int r^{-2}\left\{(m_2-1)\frac{\partial u_{2(n-1)}}{\partial r}\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{2}{r}u_{2(n-1)}\right\}dr+2(m_2-2)r^{-3}\int r\left\{(m_2-1)\frac{\partial u_{2(n-1)}}{\partial r}+\frac{2}{r}u_{2(n-1)}\right\}dr\right]_{r=c}$$

ただし、

$$V_1=\frac{m_1+1}{2}\{F_1(A_1-T_i)+G_1(A_1^2-T_i^2)\}+\frac{m_1+1}{2}(F_1+2G_1A_1)B_1b^{-1}+\frac{m_1+1}{3}G_1B_1^2b^{-2}\left(\ln b+\frac{1}{3}\right)$$

$$-\frac{m_2+1}{2}\{F_2(A_2-T_i)+G_2(A_2^2-T_i^2)\}-\frac{m_2+1}{2}(F_2+2G_2A_2)B_2b^{-1}-\frac{m_2+1}{3}G_2B_2^2b^{-2}$$

$$V_n=0, \quad n=2, 3, \dots$$

四元連立一次方程式 (32) を解くことにより、未知定数  $H_{1n}, K_{1n}, H_{2n}, K_{2n}$  が決定される。よって、各応力成分は決定することができる。

### 3. 数値計算結果および考察

数値計算例として、S 35 C, Al と SUS 32 の材料をとりあげる。それぞれの物性値は図 2 と 3 より、

S 35 C の場合、0°C から 400°C の温度範囲で

$$\alpha=0.8325 \times 10^{-5} + 0.1215 \times 10^{-7}T \quad 1/\text{°C}$$

$$E=2.0912 \times 10^6 e^{-0.0004326T} \quad \text{kg/cm}^2$$

SUS 32 の場合、0°C から 600°C の温度範囲で

$$\alpha=0.145 \times 10^{-4} + 0.925 \times 10^{-8}T \quad 1/\text{°C}$$

$$E=2.051 \times 10^6 e^{-0.0006806T} \quad \text{kg/cm}^2$$

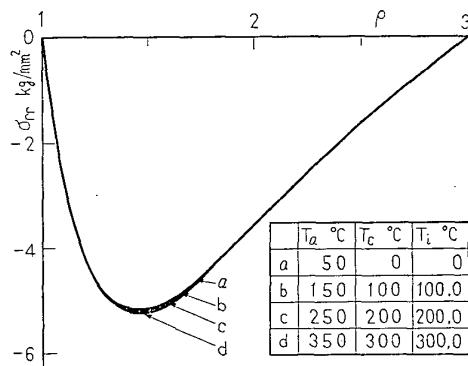


図 4 単層中空球 (SUS 32) の半径応力

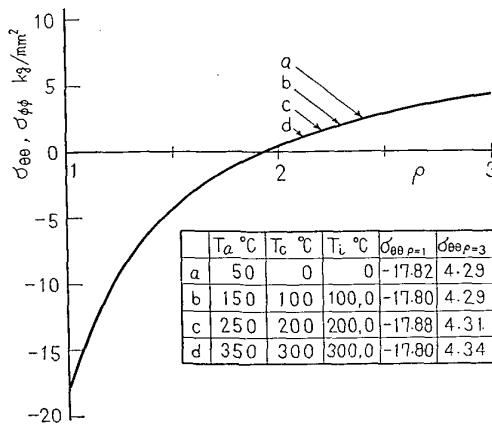


図 5 単層中空球 (SUS 32) の円周応力

A1 の場合、0°C から 450°C の温度範囲で

$$\alpha=0.2285 \times 10^{-4} + 0.9037 \times 10^{-8}T \quad 1/\text{°C}$$

$$E=7.1185 \times 10^5 e^{-0.0005513T} \quad \text{kg/cm}^2$$

である。数値計算において  $h_1$  と  $h_2$  は無限大とし、 $b/a=2, c/a=3$  とした。

図 4 と 5 には内・外表面温度の温度差を 50°C に保ち、外表面温度を 0°C, 100°C, 200°C, 300°C と変化させた場合の SUS 32 単層球の半径応力と円周応力を示す。図より SUS 32 単層球の場合、物性値の温度依存性の応力への影響はほんのわずかである。これは温度上昇に伴い線膨張係数が増加することにより、熱応力が増加する割合と、温度上昇に伴い継弾性係数が減少することにより、熱応力が減少する割合がほぼ等しいためと考えられる。また、初期温度の差異による応力の違いは無く、初期温度は熱応力に影響しない。

図 6 から 9 には、内・外表面温度の温度差を 50°C に保ち、内表面温度を 0°C, 100°C, 200°C, 300°C と変化させた場合の、内材が S 35 C、外材がSUS 32 の複合球の半径応力と円周応力を示す。図 6 と 7 には初期温度を内表面温度に等しい場合、図 8 と 9 には初期温度を 0°C に保持した場合の各応力成分を示す。図 6 と 7 より物性値の温度依存性の応力への影響が現れ、a, b, c, d の場合の最大応力に差異が生じる。高温

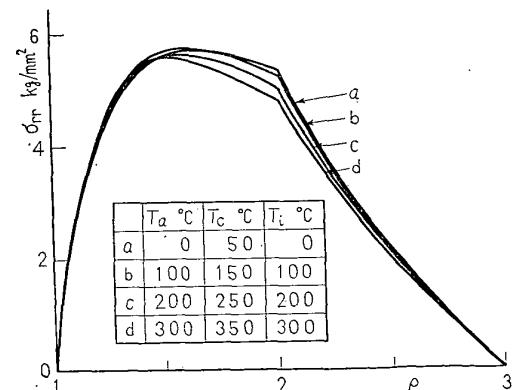


図 6 複合中空球 (内材 S 35 C, 外材 SUS 32) の半径応力

になるにつれ最大応力は増加するが、各場合との最大応力の差は減少する。また、内材と外材が接合している  $\rho=r/a=2$  の位置で、複合材のため応力に大きな差が生じる。

図8と9の点線は、内表面温度  $T_a$  と外表面温度  $T_c$  の平均温度  $(T_a+T_c)/2$  における物性値を用いて、材料の物性値の温度依存性を考慮しない場合の応力成分である。材料の物性値の温度依存性を考慮した場合の熱応力は考慮しない場合よりも大きく、高温になるにつれて最大応力の差は大きくなる。図7と9を比較することにより、初期温度状態の違いによって、最大応力に大きな差異が生じていることがわかる。これは、初期温度状態を無応力状態とし、図9の熱応力成分に、初期温度が0°Cで無応力状態の複合球が一様温度に上昇することにより生じた熱応力成分を含んでいる

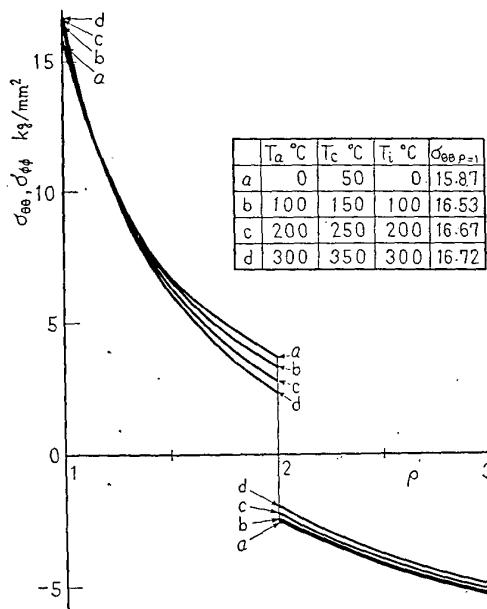


図7 複合中空球（内材 S35C, 外材 SUS32）の円周応力

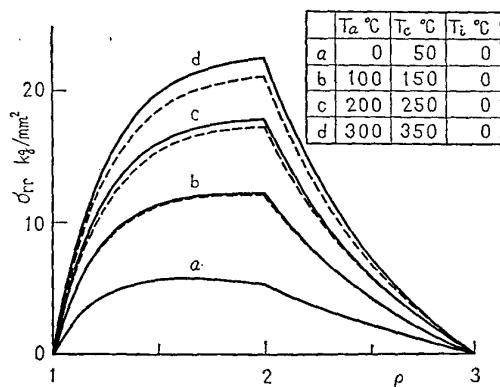


図8 複合中空球（内材 S35C, 外材 SUS32）の半径応力（初期温度が 0°C の場合）

ためである。すなわち、初期温度の違いにより応力状態に差異が生じない単層材と異なり、複合材では同じ

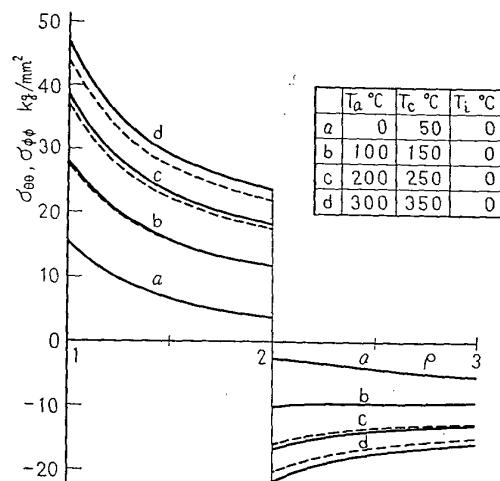


図9 複合中空球（内材 S35C, 外材 SUS32）の円周応力（初期温度 0°C の場合）

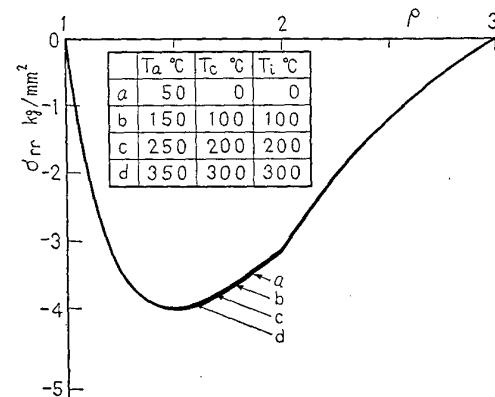


図10 複合中空球（内材 Al, 外材 SUS32）の半径応力

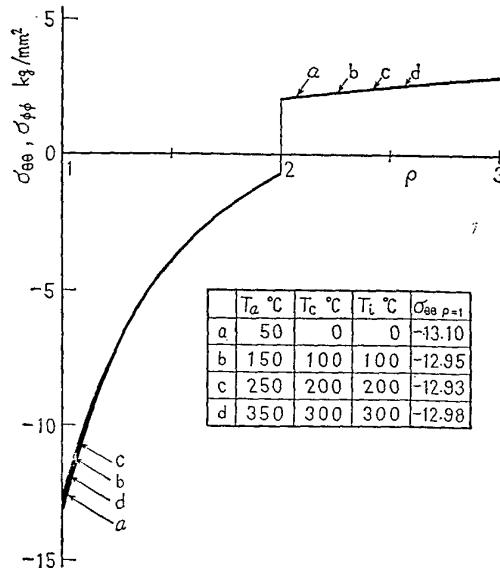


図11 複合中空球（内材 Al, 外材 SUS32）の円周応力

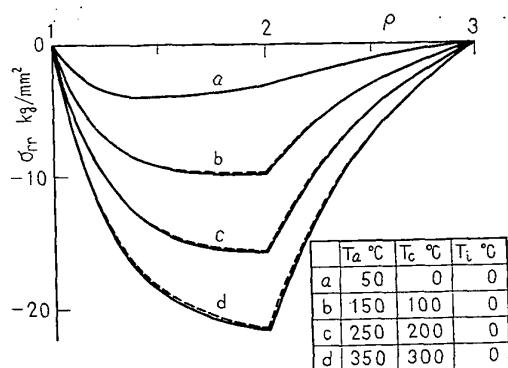


図 12 複合中空球（内材 Al, 外材 SUS 32）の半径応力（初期温度が 0°C の場合）

境界温度であっても、初期温度の違いにより熱応力は大きく変化する。

図 10 から 13 には、内外表面温度の差を 50°C に保ち、外表面温度を 0°C, 100°C, 200°C, 300°C と変化させた場合の、内材が Al, 外材が SUS 32 の複合球の半径応力と円周応力を示す。図 10 と 11 には初期温度を外表面温度に等しくした場合、図 12 と 13 には初期温度を 0°C に保持した場合の各熱応力成分を示す。内材が S 35 C, 外材が SUS 32 の場合と同様なことが言えるが、この場合はその場合よりも物性値の温度依存性の熱応力への影響は少ない。

#### 4. 結 論

材料の物性値の温度依存性を考慮して複合中空球の定常熱応力を摂動法を用いて解析し、数値計算した結果、

(1) 単層材より複合材のほうが、物性値の温度依存性の応力への影響が大きい。

(2) 物性値の温度依存性を考慮した場合の熱応力は、内外表面温度の平均温度における物性値を用い、

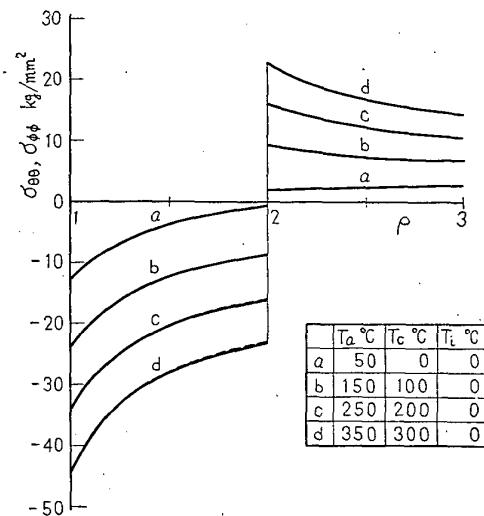


図 13 複合中空球（内材 Al, 外材 SUS 32）の円周応力（初期温度が 0°C の場合）

物性値の温度依存性を考慮しない場合の熱応力より大きい。

(3) 単層材は初期温度により応力状態は変化しないが、複合材では初期温度の違いにより、応力状態は大きく変化する。

最後に、数値計算には名古屋大学大型計算機センターを利用した。

#### 文 献

- (1) 野田・ほか 2 名, 機論, 43-365 (昭 52-1), 38.
- (2) 小泉・谷脇, 機論, 33-248 (昭 42-4), 522.
- (3) 武井, 機論, 41-348 (昭 50-8), 2278.
- (4) Trostel, R., Ing.-Arch., 26-2 (1958-2), 134.
- (5) 小泉・谷脇, 機論, 31-221 (昭 40-1), 15.
- (6) 畑・渥美, 機論, 33-254 (昭 42-10), 1569.
- (7) 畑・渥美, 機論, 34-266 (昭 43-10), 1697.
- (8) 例えば Touhoukian, Y.S., *Thermophysical Properties on Material*, (1969), IFI/Plenum; Grass, G. und Würker, K.G., *Allg. Warmtechnik*, 7-10 (1959-10), 211.
- (9) 例えば 竹内・ほか 2 名, 材料, 20-214 (昭 46-7), 826; 軽金属, 21-12 (昭 46-12), 803.