静岡大学教育学部附属教育実践総合センター紀要　No.8 p.49〜66 (2002)

〈論文・実践報告〉

中学校での図形の学習指導の改善
－生徒の探究活動を重視して－
An Improvement in Teaching Geometry in Lower Secondary School

棒葉伸吾*・羽田明夫**・園田博人*・国宗　進***
Shingo SHINBA, Akio HANEDA, Hiroto SONODA,and Susumu KUNIMUNE

(平成13年12月10日受理)

This study focusses on teaching and learning geometry in lower secondary school.
We had already proposed basic principles to make lesson plan about geometry from seventh grade to ninth. Based on this principles, we had made a plan about every lessons and taught it.
By observing practical lessons and analyzing their writings at these lessons, we pointed out the merit that we start teaching spacial figures at seventh grade, and the possibility that we teach the propositions about the triangles, quadrirateral s and so on at eigth grade by the method that students and teacher proceed the lessons according to the order that students want to check and prove the problem.

1　研究のねらい

本研究は，中学校３年間を見通した図形に関する学習指導のあり方を，授業実践を通して検討することを目的としている。

これまでに，中学校での図形指導に関する問題点を指摘し，その改善に関する筆者らの基本方針を明らかにした。また，中学校３年間を見通した授業計画を提案し，それに基づいた授業での生徒の理解の様相を明らかにした（国宗・羽田・榛葉, 1999 ； 羽田・榛葉・国宗, 2000)。

本稿のねらいは，筆者らが提案した授業計画に基づいた中１，中２の授業における生徒の図形学習に関する理解の様相を明らかにし，授業改善の方針の実現可能性について検討することである。

2　図形の学習指導改善の基本方針

筆者らが提案している図形の学習指導に関する改善の基本方針とその理由のうち，本稿での研究内容に大きく関係するものは，次の通りである。

(1)　中１の学習指導を，「空間図形」から導入する。

つまり，身の回りの立体から学習を始め，空間図形の中にある平面図形を見出していく。

○小学校での学習が生かされ，また，直線と平面，２直線の位置関係や用語・記号の指導

---

*附属島田中学校教諭　**焼津市立焼津中学校　***数学教育教授

等の重複がなくなり，時間数も軽減される。

(2) 従来中２で扱っている「平行線の性質と条件」から「多角形の内角，外角の和」までを中１で取り扱い，「論理的に考察する基礎を培う」ための中心的教材として位置づける。

○角についての性質であり，生徒にとって学習の困難性はないと考えられる。

○「数学教育の現代化」の時の実践がある。

(3) 中１では「条件を満たす点の集合と図形，基本的な作図」を単独で取り扱わない。それを中２で扱い，作図しその方法が正しいことを確かめるという展開を重視して論証指導につなげる。

○現在も中２で作図の方法が正しいことの証明が再登場し，重複して扱われている。

○中２での論証の学習場面で，作図を意識することによって，授業がより活動的になる。

3　中学校第１学年での学習指導

ここでは，特に次の２つの方針に基づいた授業を行い，そこでの生徒の追究の様子を明らかにして，授業改善の方向の是非を検討する。

・中１の図形指導を，空間図形から導入する。

・従来中２で扱っている「平行線の性質と条件」から「多角形の内角・外角の和」までの内容を中１で取り扱う。

（1）第１学年での図形に関する授業計画

上の方針に従い，次のような授業計画を作成し，実践した。

第１，２時　「平面図形・空間図形の意味，多面体，展開図の意味」

① 平面図形，空間図形，立体の意味，及び立体の展開図の意味

② 多面体，正多面体の意味，及び正多面体は５種類あること

第３時　「点，直線，平面，及び距離」

① 点と直線・半直線・線分，及び平面の意味とその表し方

② 距離の意味，及び２点間の距離，点と直線との距離

③ 直線は２点で，平面は３点で決定すること

第４，５，６時　「直線や平面の位置関係，角」

① 空間にある２直線，平面と直線，２平面の位置関係

② 平行，垂直の意味，及びその表し方

③ 角の意味と表し方，空間における角の概念

第７，８，９時　「三角形の３つの辺，線対称・点対称」

① 三角形の２辺の和は他の１辺よりも長いこと

② 線対称・点対称の意味を理解し，図形を対称性の観点から見ること

第10，11時　「平行線の作図，円の接線」

① 作図の意味，定規とコンパスの役割

② 定規とコンパスを利用して，直線の平行線を作図すること

③ 合同な三角形，角の移動等の基本的な作図の方法

④ 円に関する用語

⑤ 円の接線は，その接点を通る半径に垂直であること

以下，項目名だけをあげる。
第12，13，14時　「対頂角，平行線の同位角・錯角」
第15時　「三角形の内角の和」
第16，17時　「多角形の内角の和，外角の和」

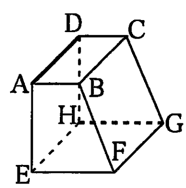
（2）授業での生徒の考え方

①「空間での２直線の位置関係」の授業（第４時）

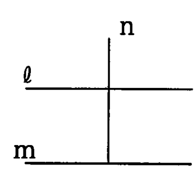
第４時で生徒たちは，第１時に苦労しながらも完成させた立体模型を手元に置いて，次の問題に取り組んだ。

この立体の12の辺を延長して直線と考え，２直線の位置関係を分類しよう。

まず，個人でじっくり考える時間を確保した後，全体の場で意見を出し合った。
Ａさん「直線ＡＤと直線ＨＧは，上から見ると交わっているから，交わっていると言うんではないかな。」
Ｂさん「これは交わっていない。クロスしている。垂直なんだけど，交わってはいない。」
Ｃくん「(ペンを２本使ってＡＤとＨＧの関係を示しながら）こういう関係だなあ。」
Ｄくん「交差点と歩道橋の関係だ。」



Ｃくん「交わるの意味を辞書で調べたら，･･･ふれる，接すると書いてありました。」
Ｅさん「垂直っていうのは，直線ＡＤと直線ＤＨのような関係を言うのだと思います。」
Ｆくん「では，直線ＡＤと直線ＨＧは，横から見るとＥさんのような関係って言ったらいいと思います。」
教師　「なるほど，横から見るとＥさんのような関係か。別の言い方で言うと，どのように言えるのかな。」
Ｆくん「他の角度から見ると平行でもなく，交わりもしない関係と言えると思います。」
Ｇさん「そうそう，立体交差だよ。学校の近くのバイパスと県道がそうなっている。」
ここで，Ｈくんが，右の図を板書しながら次の意見を発表した。
Ｈくん「直線ＡＤと直線ＨＧは垂直だと思います。理由は，図のように$\ell \perp n$で，しかも$\ell // m$ならば$m \perp n$になる。だから，この場合にも直線ＡＤと直線ＨＧは垂直といえると思います。それは，直線ＡＤ⊥直線ＤＣ，直線ＤＣ//直線ＨＧだからです。」



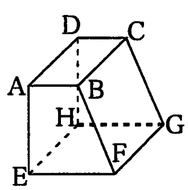
このＨくんの意見をもとにして，議論が進められた。
Ｉさん「でも，それは平面上で考えたときにしか言えないことじゃないかと思います。」
それを聞いていたＪさんは，「それじゃあ，垂直っていったい何のことだろう。」と言いながら広辞苑を引いて，次のように発言した。
Ｊさん「私が広辞苑を調べたら，垂直とは『２直線が交わっているとき，その角度が90°の場合』と書いてあったので，直線ＡＤと直線ＨＧは，交わっていないのだから垂直とは言え

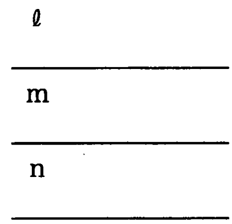
ないと思います。」

授業はこのよう展開していき，続いて『直線と平面の位置関係』，『２平面の位置関係』というように，自然な流れで直線や平面の位置関係を考察することができた。

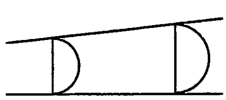
また，『直線と平面の位置関係』に関しては，次のようなやりとりが見られた。

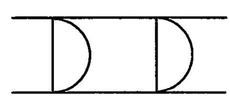
Ｋくん「平面ＥＦＧＨと直線ＥＦ，ＦＧ，ＧＨ，ＨＥも平行だといえると思います。理由は，ℓ//mでしかも，m//nなら，ℓ//nになるからです。そして，実際にこの図で考えると，平面ＥＦＧＨ//直線ＡＢで，直線ＡＢ//直線ＥＦなので，平面ＥＦＧＨ//直線ＥＦだと思います。」





Ｌさん「私は，別の理由で平行だと思います。それは平行とは，どこまで行っても距離が同じことだと思います。つまり，２本の直線が平行で，その距離が５㎝なら，どこを測っても５㎝です。平行でなければ，図る位置によって距離が違ってきます。この場合には，どこで測っても０㎝になるので，平行といっていいと思います。」





Ｍさん「(広辞苑で平行を調べながら）でも平行とは，どこまで行っても交わらないことだから，それは平行とは言えないと思います。」

【考察】

以上に述べたように，生徒たちは，身近な物を例に出したり，理由を論理的に述べたりしながら，２直線の位置関係を分類した。

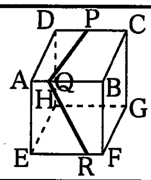
Ｈくんの意見は，２直線が平面上にあるのか，空間上にあるのかによって，成り立ったり成り立たなかったりする。この意見を聞き，即座にそれを見抜いたＩさんの洞察もすばらしいが，別の直線との関係をもとに２直線の関係を考えて，この意見に達したＨくんの目の付け所には優れたものがある。何よりも論理的に考察しようとする姿勢を評価したい。

また，クラス全体で討論した様子は，意欲に満ちていた。もし平面は平面，空間は空間で，別々に位置関係を考察していたならば，これほど意欲的な生徒の取り組みは見られなかったであろう。

②「空間上にできる角の大きさ」の授業（第６時）

直線や平面の位置関係を学習し，角に関する用語を理解した生徒たちは，第６時に次の問題に取り組んだ。

右の立方体の辺ＤＣ上に点Ｐ，辺ＡＢ上に点Ｑ，
ＥＦ上に点Ｒをとる。
∠ＰＱＲの大きさはどうなるのだろうか。



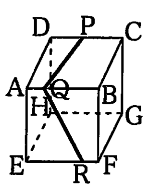
空間にできる角の大きさを考える問題である。個人で考える時間をたっぷりとった後，４人の小集団ごとに意見を交換した。そして，クラス全体でその意見を出し合った。そこでは，以下のように，点Ｐ，Ｑ，Ｒをどの位置にとっても90°になるという意見が多かった。

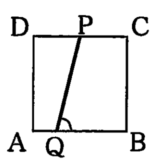
	個人追究後	小集団後	全体学習前
① どこにとっても90°になる…………	25人	25人	20人
② 角度は変わる…………………………	11人	13人	19人
③ わからない……………………………	4人	2人	1人

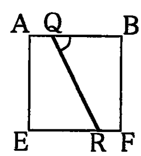
生徒たちには，立方体の辺上の点を結んでできるこの角の大きさをどのように考えたらいいのかとまどいがみられた。まず，次のような意見が発表された。

Ａくん「∠ＰＱＲの大きさは，平面ＡＢＣＤ上にできる角∠ＰＱＢと平面ＡＢＦＥ上にできる角∠ＲＱＢの和と等しいと思います。」

∠ＰＱＢ＋∠ＢＱＲ＝∠ＰＱＲ



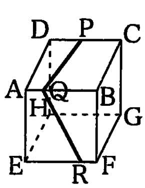




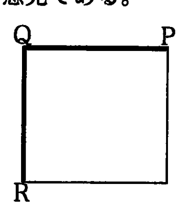
Ａくんは，∠ＰＱＲがどこにどのようにできているかがはっきりと把握できていないために，このように考えたのであろう。立方体には表面があるから，その部分も含めて考えなければならないという理由で，２つの平面にできた角の和になると考えていた。

Ｂくん「ぼくは，平面ＢＦＧＣの方角からこの角を見ると，その大きさが90°になるので，点Ｐ，Ｑ，Ｒをどこにとってもこの角は90°になると思います。」

先に示した数値からわかるように，クラスの半数の生徒が，この意見である。

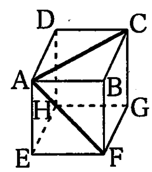


←この方向から見ると



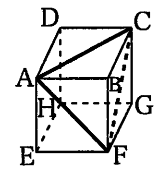
個人追究の時にＣさんは，「先生，立体を切ってもいい？」と話しかけてきた。「やってごらんよ。」と言うと，立方体にはさみを入れて角の大きさを調べ始めた。そして，次のように全

体発表の時に発表した。



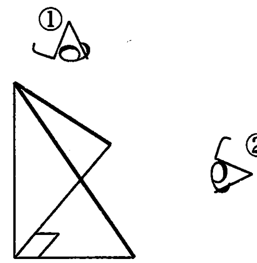
Cさん「私は立方体を切って調べました。ACとAFを切ると，ここに角ができます。この角は90゜にはならないと思います。そして，角はこの場合CとA，AとFを結んだ部分にできるのだから，90゜にはならないと思います。」

Dくん「ぼくは，模型を切って，その切り口に分度器を差し込んで角度を測りました。その角度は90゜にはならずに，だいたい60゜になりました。」



Eさん「私はその角度が60゜になる理由を考えました。CとFを結ぶと三角形ができます。見取図ではわかりにくいかもしれませんが，この三角形はどの辺の長さも等しいので正三角形になります。だから，∠CAFの大きさは60゜になるのだと思います。」

Fさん「(点Bが含まれる方の立体を指さしながら）でも私は，この部分のふくらみのことも考えなければならないのだと思います。」



Gくん「ぼくもはじめは90゜だと思っていました。それは①の方向から見ていたからです。でも②の方向から見ないと正しい角度にはならないのではないかと考えました。角度を考えるときは，見る方向によって見え方が違うので，正しく測ろうとしたら，この方向から見なくてはいけないと思います。」

といいながら黒板に図をかいて見る方向を示した。

Hくん「そうだ，ねじれの位置の授業の時にも問題になっていたけど，角を測る場合にも分度器はACとAFにしっかりつけないと，正しく角度が測れないと思います。」

【考察】

空間にできる角を考えることが，中学1年生にとってこれほど抵抗のあることだとは思わなかった。これが授業者の正直な感想である。これまで授業者自身がそれを実感できなかったのは，平面図形の学習と空間図形の学習を別の単元の学習として位置づけて授業を構成していたことが原因の一つであると考えられる。

空間図形から導入したことにより，角について，平面上のみで考えるより深く考察できることがわかった。最後のHくんの発言の奥には，角とは何なのか，どのように角度を測るのかについて，分度器の使い方に立ち返りながら，根底を見つめ直そうとする姿勢も感じ取ることができる。

また，Gくんの考えは，角をふくむ平面と垂直な方向から見れば角度を正しく把握できることを示唆している。これは空間の概念が形成されつつあることを示している。

教師にとっても，空間における角はとらえにくいものである。ここで取り上げた「問題」は，生徒の実態によっては，取り扱うことでかえって混乱をきたす恐れもあるであろう。

(3) まとめ

以上に述べた実際に基づいて，授業展開の妥当性について検討する。

① 直線や平面の位置関係の学習が意欲的になる

従来は，「平面図形」でまず２直線の位置関係を学習し，「空間図形」でさらに，直線と直線，直線と平面，平面と平面といった順序で扱われる内容である。

筆者も以前から感じていたことであるが，同じような内容でありながら２度扱わなければならない。時間のロスであり，生徒の思考の面でもぎくしゃくしたものを感じていた。

今回のように空間図形で扱った場合にも，平面図形の２直線の位置関係を理解することができた。生徒の意欲も持続していたように思う。

単元の導入として立体を製作したことも生徒の学習に対する意欲を高める上で意味があったと思われる。空間図形の学習は，頭の中で考えると理解しがたいが，模型を手に取りながら考察すると理解しやすい。

また，生徒は空間図形を考えることにより，自然とその一部であるその一部である平面図形も考えることになる。

② 切って調べることにより，学習が豊かになる

「切断」は2001年からの学習指導要領では，削除される内容であるが，空間図形の見方として是非とも生徒に身につけさせたい内容である。それは空間認識を高めるために，必要だと考えるからである。

「指導内容が行き過ぎたということで削除されるのであれば，数学の学習のおもしろさをどこでどう伝えたらいいのであろうか。」などとも思ってしまう。

今回の授業では，意図して切断を学習内容に盛り込んだわけではないが，空間の中の角を考えることで，生徒は自ら探究活動の中で切断を考えていたし，実際に自分の模型にはさみを入れていた。それだけ手応えのある問題であったともいえるであろう。

「この角の大きさをどうしても調べたい。」

「頭で考えるとこうなるはずだが，確かめるためには，切って調べたい。」

このように考えるのは，自然な流れである。切断そのものが学習の目的ではなく，考察するための手段としての切断を私達は今後もどんどん授業に取り入れたい。

③ 論理的に考察する基礎を培うことが可能になる

学習指導要領では中１の目標に「論理的に考察する基礎を培う」と明記されているものの，具体的にはどの教材を通してそれを達成するかがはっきりしなかった。むしろ，これまでの１年生の図形学習でその目標を達成しようとするのは困難であった。

しかし，従来は中２で扱っていた「平行線と角」，「三角形の角」，「多角形の角」を１年生で扱うことによって，論理的に考察する基礎を培うことが可能になるであろう。

理由を考察する学習においては，生徒は，対頂角，平行線と同位角，錯角の関係を利用して，中学２年生が行うような説明を筋道立てて述べていた。特に「三角形の内角の和が180°であることを説明する」学習においては，中２を対象にした場合と何ら変わりなく授業を行うことができた。むしろ，中２で扱った場合よりも，小学校で学習したことが発揮しやすいのではないかとさえ感じられた。

中学生は，直観から論理へ，思考の中身が徐々に変化していく時期である。論理的に考察する基礎を培おうとしたら，それにふさわしい学習内容を中１にも配置するべきである。

4　中学校第２学年での学習指導

ここでは，特に次の２つの方針に基づいた授業を行い，そこでの生徒の追究の様子を明らかにして，授業改善の方向の是非を検討する。

・中２の図形の論証の学習では，小学校及び中１で学習した図形の性質を学級で共有して既知のものとして認め，生徒の疑問から生じた問題を解決することを中心に授業を展開する。

・中１では扱わなかった「基本作図」を中２で取り上げ，作図しその方法が正しいことの証明を考えるという展開を重視して論証の指導につなげる。

（1）第２学年での図形の授業展開

筆者らの勤務校は１学年３クラス編成である。中２のすべてのクラスにおいて，前述の方針で授業を実践した。一連の授業において各クラスが取り上げた主な問題を，授業での展開の順に以下に示す。

下の表で，●は教師が提示した問題，○は生徒の疑問から生じて取り上げた問題である。

本単元の授業を実施するにあたって，特に次の２点に留意した。

・全体の場で生じた生徒の疑問を取り上げて授業を進めるだけでなく，一つの課題を解決した後に，全体の場で疑問がないかどうかを確認するようにした。

・下の表に示したように，教師が提示する問題は，作図しその方法が正しいかどうかを調べるという学習が可能であるものを中心にした。

<table>
<tr><th>２A</th><th>２B</th><th>２C</th></tr>
<tr><td colspan="3">●平行線の角度を求める問題</td></tr>
<tr><td colspan="3">●これまで学習した性質のうち誰もが認める性質をクラスで共有する</td></tr>
<tr><td>○二等辺三角形の底角は等しいことの証明
○２組の向かい合う辺が等しい四角形は平行四辺形であることの証明
○平行四辺形の２組の向かい合う角が等しいことの証明
●三角形の合同条件のうち，２辺とそのはさむ角は，なぜはさむ角なのかについての検討
○直角三角形の合同条件（斜辺と他の一辺）の証明
○鈍角三角形の合同条件の証明
○２角の等しい三角形は二等辺三角形であることの証明</td><td>○いろいろな三角形・四角形の関係はどのようになっているのかをベン図に表す
○ひし形は平行四辺形であることの証明・平行四辺形の対角線は互いに他を二等分することの証明
●三角形の合同条件のうち，２辺とそのはさむ角は，なぜはさむ角なのかについての検討
○直角三角形の合同条件（斜辺と他の一辺）の証明
○鈍角三角形の合同条件の証明
○２角の等しい三角形は二等辺三角形であることの証明</td><td>○ひし形の対角線は垂直に交わることの証明
●三角形の合同条件のうち，２辺とそのはさむ角は，なぜはさむ角なのかについての検討
○直角三角形の合同条件（斜辺と他の一辺）の証明
●角の二等分線の作図とその方法でかけることの証明
○平行線の作図とその方法でかけることの証明
○２組の向かい合う辺が等しい四角形は平行四辺形であることの証明
●角の二等分線の性質の証明
●平行四辺形の２点が重なる</td></tr>
</table>

●垂線の作図方法とその方法でかけることの証明 ○ある決められた角度の作図はどうしたらいいのかの検討 ○角の二等分線の作図方法とその方法で角が二等分されることの証明 ●角の二等分線の性質を証明 ○いろいろな三角形・四角形の関係はどのようになっているのかをベン図で表す ●平行四辺形の２点が重なるように折ったときの折り目の線の作図方法を考察 ●線分の垂直二等分線の性質の証明 ●三角形の外接円，内接円の作図方法を考察 ○直角三角形の場合，外接円の中心が斜辺上にあることを証明 ○二つの三角形が相似になっていることの証明はどうすればいいのかを考察 ●２組の向かい合う角が等しい四角形は平行四辺形であることの証明	●垂線の作図方法とその方法でかけることの証明 ●角の二等分線の作図方法とその作図方法で角が二等分されることの証明 ●角の二等分線の性質を証明 ●平行四辺形の２点が重なるように折ったときの折り目の線の作図方法を考察 ○折ったときにできる四角形がひし形になることの証明 ○二つの三角形が相似になっていることの証明はどうすればいいのかを考察 ○線分の垂直二等分線の性質の証明 ●三角形の外接円，内接円の作図方法を考察 ○直角三角形の場合，外接円の中心が斜辺上にあることを証明 ●平行四辺形の作図方法とその方法で平行四辺形が作図できることの証明（平行四辺形になるための条件の証明）	ように折ったときの折り目の線の作図方法を考察 ○折ったときにできる四角形がひし形になることの証明 ○折ったときにできる三角形が二等辺三角形になることの証明 ○２角の等しい三角形は二等辺三角形であることの証明 ●三角形の外接円，内接円の作図方法を考察 ○三角形の３辺の垂直二等分線が１点で交わることの証明 ●平行四辺形の作図方法とその方法で平行四辺形が作図できることの証明（平行四辺形になるための条件の証明） ○平行四辺形の性質の証明 ○二つの三角形が相似になっていることの証明はどうすればいいのかを考察 ○いろいろな三角形・四角形の関係はどのようになっているのかをベン図に表す

（2）本授業展開の特徴

ア．クラスごとに展開が異なる

生徒の疑問に応じて授業を進めたり，生徒の作図方法が正しいかどうかを検討したりすることで，授業はクラスごとに大きく違った流れになる。

例えば，「いろいろな三角形・四角形の関係」については，２Ｂでは，単元の早い段階で生徒から疑問が出され，それを課題として扱った。２Ａでは，単元の途中でこの疑問が生じたために，そこで取り上げた。２Ｃの場合は，単元の最終に生徒から疑問があがり，そこで取り上げている。

イ．追究が２，３時間に及ぶ

授業は１時間完結にはならないことが多く，次の時間へと疑問を引き継いだり，課題追究の

時間が２時間，３時間にまたがったりすることがほとんどであった。上の表に示した内容はあくまで主なものであり，生徒が見つけた作図方法について追究し，結果的にはその作図方法では解決が図れないことに気づくなど，授業内容は深まった。

また，上の表からわかるように，単元を通して教師が提示した問題（●）の数は８個ないし９個である。生徒の疑問から設定された課題（○）は，10個または11個であるが，実際には３～４個の作図方法が発表され，それを証明をしているので，単元全体を通して，多くは生徒の疑問から生じた課題を追究したことになる。

（３）生徒の疑問からクラス全体の問題へ

ここでは，生徒の疑問がクラス全体の問題へとどのように発展したかについて，２Ａの授業記録を基に，２例を以下に示すことにする。

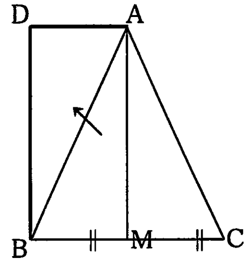
ただし，ここでの例は，一連の流れが分かるように要点を整理したものであり，授業の流れそのものではない。例えば，次の例（ア）「二等辺三角形の二つの底角は等しい」ことの証明方法は，ここでは１つしか示していないが，実際の授業では３通りの証明方法が発表されたり，結論を示すまでには至らない意見が発表されたりしている。

（ア）「二等辺三角形の二つの底角が等しい」ことの証明

⇒「２組の向かい合う辺が等しい四角形は平行四辺形である」

⇒「平行四辺形の２組の向かい合う辺，向かい合う角は等しい」

①「二等辺三角形の二つの底角は等しい」ことを証明する。



Ｓ１　ＢＣの中点Ｍと点Ａを結ぶ。このとき，△ＡＭＣを切り取って，△ＢＤＡの位置にくっつける。
すると，ＤＡ//ＢＭとなるので，平行線の錯角は等しいので，∠ＤＡＢ＝∠ＡＢＭよって，∠ＡＢＭ＝∠ＡＣＭ

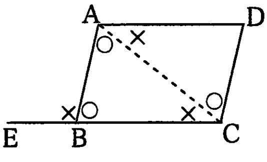
Ｓ２　なぜ，ＤＡ//ＢＭとなるのかわからない。

Ｓ３　ＡＭ＝ＤＢだから，平行になる。

Ｓ４　向かい合う１組の辺が等しい四角形で，平行四辺形にならない四角形はたくさんあるから，それではおかしい。

Ｓ５　ＡＭ＝ＤＢに加えて，ＤＡ＝ＢＭでもあるから，平行になる。

②「２組の向かい合う辺がそれぞれ等しい四角形は平行四辺形である」ことは，みんなが認めた性質の中にないから，証明する必要がある。



Ｓ６　ＡＢ＝ＣＤ，ＢＣ＝ＤＡ，ＡＣ＝ＣＡより三辺が等しいので，△ＡＢＣ≡△ＣＤＡ角が右図のように等しくなるので，∠ＢＡＤ＝∠ＡＢＥ⇒錯角が等しく，ＡＤ//ＢＣ，∠ＤＣＢ＝∠ＡＢＥ⇒同位角が等しく，ＡＢ//ＤＣ

③　この証明で「平行四辺形の２組の向かい合う角はそれぞれ等しい」も言えたことになるのではないか。

Ｓ７　「２組の向かい合う辺がそれぞれ等しい四角形では，２組の向かい合う角はそれぞれ等しい」は言えたが，順番から言って前述のことは言えていない。

S８　でも，次のように証明できる。

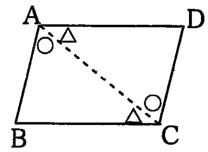
ＡＢ//ＤＣ，ＡＤ//ＢＣより，錯角は等しく

∠ＢＡＣ＝∠ＤＣＡ①，∠ＡＣＢ＝∠ＤＡＣ②，

ＡＣは共通なので，一辺と両端の角が等しく，

△ＡＢＣ≡△ＣＤＡ，よって，∠ＡＢＣ＝∠ＣＤＡ，

また，①②を足すことで∠ＢＡＤ＝∠ＤＣＢ



S９　「平行四辺形の２組の向かい合う角はそれぞれ等しい」が言えた。

S10　また，「平行四辺形の隣り合う角の和は180°である」も言えた。

S11　さっき，△ＡＢＣ≡△ＣＤＡが言えたから，「平行四辺形の２組の向かい合う辺はそれぞれ等しい」も言えたことになる。

【考察】

上に示した流れからわかるように，三角形の学習を終えてから四角形の学習という具合には授業は進まなかった。つまり，教科書のように系統的に整理した形で授業は進まなかった。

また，例えば「平行四辺形になるための条件」が１つあがったからといって，他の「平行四辺形になるための条件」も続けて扱うことになるとは限らない。この２Ａでは，「平行四辺形の２組の向かい合う辺，角はそれぞれ等しい」が証明され，まとめられた後，生徒から「平行四辺形の対角線が互いに他を二等分する」があがり，それを証明し定理にしている。「２組の向かい合う辺がそれぞれ等しい四角形は平行四辺形である」はこの時点で証明されたが，それ以外の条件は，その後，徐々にまとめられていき単元の最終ですべてが出そろった。

なお，得られた定理は，証明できた時点で「図形の性質のまとめプリント」に書き加えていったため，生徒の混乱はほとんど見られなかった。

(イ)「２辺とそのはさむ角であることの理由」

⇒「直角三角形の合同条件（斜辺と他の一辺)」

⇒「鈍角三角形の合同条件」

⇒「２角が等しい三角形は二等辺三角形である」

①　なぜ三角形の合同条件は，「２辺とそのはさむ角」なのか，「２辺と１角」ではいけない理由を考察する。

S１　位置が違う場合には，２辺と１角が等しくて２二つの三角形は合同にならない。

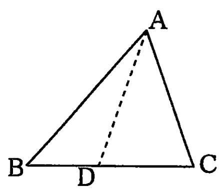
②　では，同じ位置の２辺と１角ならば，２辺とはさまない角が等しい２つの三角形は合同になるのか（一つしかかけないのか）を検討する。

○ＡＢ＞ＡＣの場合

右図の△ＡＢＣと△ＡＢＤのように，

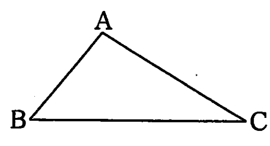
（ＡＢ＝ＡＢ，∠Ｂ＝∠Ｂ，ＡＣ＝ＡＤ）

２つできてしまうので，絶対に合同であるとは言えない。



○ＡＢ＜ＡＣの場合，

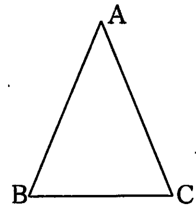
右図のように一つしかかけないので，合同になるのではないか。証明はできないが……。



○ＡＢ＝ＡＣ（二等辺三角形）の場合，

∠ＡＢＣ＝∠ＡＣＢとなり，∠ＢＡＣの角度も決まる。

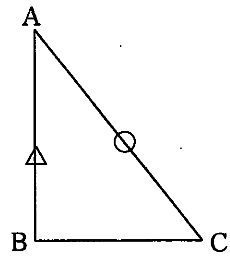
2組の辺とはさむ角がそれぞれ等しくなるので合同になる。
・そのことは，正三角形でも言える。



③　∠ABCが直角の直角三角形ならば合同になるのではないか。

S2　直角三角形は斜辺が1番長いから，AB＜ACとなり，合同になるのではないか。

S3　直角がいえるならば，∠ABCが鈍角の時も合同が言えるのではないか。



S4　∠ABCが直角の場合は，証明できるのではないか。また，直角三角形の場合には斜辺と直角以外の一つの角が等しければ，両端の角でなくても合同になるのではないか。

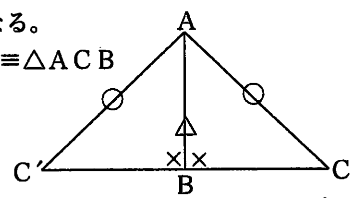
S5　それは，斜辺と1つの角が等しいと，直角も等しいわけだから，残りの1角も等しくなるから，一辺と両端の角が等しくなって合同になる。

④　斜辺と他の一辺がそれぞれ等しい2つの直角三角形は合同であることを証明する。

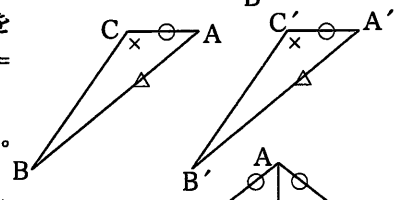
S6　右のように2つの三角形をくっつけると，ABの長さが等しく，直角が2つで一直線となり，△ACC′は二等辺三角形になる。二等辺三角形の頂角の頂点から垂線をひくと，合同な2つの三角形に分けるので合同となる。

S7　後半で使ったことは，認めた性質にないので，きちんと証明する必要がある。

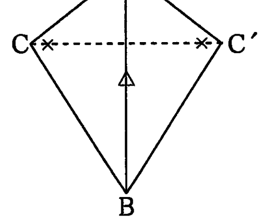
S8　△ACC′は二等辺三角形である。よって，∠AC′B＝∠ACBとなる。
三角形の内角の和は180°なので，∠C′AB＝∠CABになる。
2組の辺とそのはさむ角がそれぞれ等しいので，△AC′B≡△ACB



⑤　右の図のような2つの鈍角三角形があるとき，これらが合同であることを証明する。



S9　右図のように2つをくっつけておき，点CとC′を結ぶ。△ACC′は二等辺三角形なので，∠ACC′＝∠AC′Cとなる。よって，∠BCC′＝∠BC′C
△BCC′は2角が等しいので，二等辺三角形になる。
よって，BC＝BC′
△ACB≡△AC′B（二辺とそのはさむ角が等しい）



S10　2角が等しい三角形が二等辺三角形であることは認めていない。

⑥　「2角が等しい三角形が二等辺三角形である」ことを証明する。

【考察】

上で述べたように，教科書では扱われていない図形の性質の発見や疑問が生徒から生じることが何度かあった。今回の実践では，上記「鈍角三角形の合同条件」の他，三角形の外心の性

質に関して次のことを発見し，２．について証明している。

１．鋭角三角形の場合，外接円の中心が三角形の内部にある。

２．直角三角形の場合，外接円の中心が斜辺上にある。

３．鈍角三角形の場合，外接円の中心が円の外部にある。

この２つの内容については，生徒の実態を考慮して課題として取り上げることにし，最終的に生徒の力で解決することができた。

（4）「図形の基本性質」や定理の整理

先に述べたように，クラスごとに，ある性質が証明できた時点で「図形の性質のまとめプリント」に書き加えていった。また，ある性質を証明していく過程で発見，証明された別の性質について，生徒からまとめプリントに入れたいという要望があった場合には，それも書き加えていった。このようにして，クラスごとの「図形の性質のまとめプリント」ができあがっていった。

筆者らの勤務校では，中２から中３への時点で学級編成替えを行う。そこで，来年度の授業のことを考えて，この単元が終了した時点で，学年としての「図形の性質のまとめプリント」を作成した。これは，本稿末に資料として載せてある。

このときに，他のクラスでは意見として出た性質だが，そのクラスでは出なかった性質を新たに追加してまとめている。それらは次の通りである。以下の①から⑥で，命題や内容の後のクラス名は，それを追加したクラスを表している。

① 三角形の面積は，中線によって二等分される。２Ａ，２Ｃ

② 正多角形の内角はすべて等しい。２Ａ，２Ｂ

③ ひし形の対角線は，内角を二等分する。２Ａ，２Ｃ

④ 三角形の角度についての性質（資料…三角形の内角・外角の③）２Ｂ，２Ｃ

⑤ 二等辺三角形の頂角の二等分線は，底辺を垂直に二等分する。２Ｃ

⑥ 台形の対角線を引いた時の面積に関する性質。２Ｃ

後に追加した性質のうち，その際に生徒が改めて証明の必要性を感じたものは１つもない。どのクラスにおいても，加えた性質のすべてについて納得した。

一連の追究活動において，①は２Ａ，２Ｃでは出なかった性質であるが，中１で学習した内容である。②，⑥も小学校，中１で学習した内容である。

①は，すべてのクラスの授業で既に証明されたが，生徒からは「まとめプリント」に載せようという声があがらなかったものである。

④については，配布したプリントを見ただけで，生徒は理解した。

したがって，以上のような授業を構成しても，生徒の疑問が途切れたときに教師が提示する課題を工夫していくことで，教科書で扱われているものとほぼ同様の図形の性質がまとめられることになる。

（5）まとめ

以上に述べた実際に基づいて，授業展開の妥当性について検討する。

① 意欲的な取り組みが現れ，授業が盛り上がる

前述のように，教師が提示した問題は各クラスとも10個に満たない。その問題は，前時との

関連を図りながら，作図を伴うものを中心に提示したものがほとんどである。生徒の作図方法は多様であり，その証明を考えることで証明の意味をつかんだり，証明の方法を理解することができる。したがって，今回の方針で授業を進めた場合，教師が唐突に必然性のない問題を提示することがほとんどなくなるといえよう。

その結果，授業は１時間完結にはならないことが多く，何時間にもまたがって課題を追究していくことになる。このことは，上で述べた授業の実際からも推察されるように，授業が何日か空いたとしても生徒の課題に対する意欲が減退することはほとんどなかった。むしろ，この単元全体を通して，生徒は実に意欲的に授業に取り組んでいた。

また，２学期終了時の生徒のノートからは，多くの「楽しかった。おもしろかった」という声の他に，「クラスごと課題が違うので，自分たちで授業，数学をつくっているという意識で授業に臨めた」とか，「友達からでた疑問なので，何とか解決しようと燃えた」などという声も聞かれた。

教師が生徒からの疑問の多くを取り上げたことも，臆することのなく疑問を発言する雰囲気を生み出し，意欲的な活動につながったといえよう。

②　授業に新鮮さが生まれる

教科書の順番通りに授業を進めた場合にはほとんどみられない表れもあった。以下，２点について述べる。

まず第１に，ある命題に対する証明方法がこれまで以上に増えたことである。例えば「２角の等しい三角形は二等辺三角形である」ことの証明で，既に証明されていた平行四辺形の性質を利用する生徒があった。このような証明法は，教師にとっても，実に新鮮な発見になる。

第２に，「認められれば」という前提のもとに，まだ証明されていない性質を利用する生徒があり，そこからその性質を証明するという流れで授業が進むことが度々あったことである。例えば，「２角の等しい三角形は二等辺三角形である」ことについては，３つのすべてのクラスにおいて，別の図形の性質の証明でこの性質を利用した生徒がいて，他の生徒の「まだ認められていない」という意見からその証明が課題となり，そこで証明している。これは，証明されていない性質でも，証明すれば利用できるということを理解する上で有効であったといえよう。

また，生徒の疑問からの課題，作図からの課題であるため，教師にとっても次に何が課題となるかの予測が難しい分，新鮮に授業を行うことができた。多くの生徒が塾に通っていることを考えると，生徒にとっても新鮮な授業であったであろう。

③　教科書と同様の図形の性質がまとめられる

このような実践の疑問点として，「教科書に載っている図形の性質がすべて得られるのか」ということがある。それについては，単元終了時までに，教科書とほぼ同様，あるいはそれ以上の図形の性質がまとめられ，問題は起きなかった。

教科書のように整理した形で授業は進まなかったが，クラスごとに「図形の性質のまとめプリント」を作成し，ある性質が証明できた時点でそれらを書き加えていったため，生徒の混乱はほとんど見られなかった。まとめて学習しなくても問題はないと考える。

ただし，混乱を生じさせないためには，教師は次の２点について留意する必要がある。

まず第１に，教師は，生徒からあがった疑問が数学的に価値があるものであるか，中学２年生が取り組むに値する課題であるかという判断をする必要がある。

次に，生徒からの疑問が途切れたときに，極力授業の流れを損なうことなく，まだあがっていない教科書にある図形の性質を取り上げることができるように，的確な問題を用意しておくことも大切であろう。

この点については，まだまだ検討の余地がある。

④　時間数について再検討したい

計画段階では17時間を考えて実践したが，実際には28時間程度かかってしまった。ただし，その中では予定にはなかった「三角形の相似条件」も扱っている。

この学年の進度は比較的はやく，10月の最初には本単元に入ることができた（その時点で1次関数の学習も終えていた）ために時間的にゆとりがあった。

時間数が大幅に増えたのは，この時間的なゆとりがあったこともあるが，次のことが主な理由としてあげられる。

・毎回の生徒の追究の時間を比較的長くとったこと

・教科書では扱われていない図形の性質なども含めて，生徒から出された疑問のほとんどを取り上げたこと

・いろいろな三角形の関係をベン図で表す学習で，鋭角三角形，鈍角三角形も含めて考察したこと

・中１で作図を扱っていなかったため，三角形の外接円，内接円の作図を扱ったこと

なお，時間数の削減については，特に次の点からさらに検討を加えたい。

・生徒の疑問のうちのどのようなものを，どのように取り上げるか

・教師から提示する課題はどのような場面で，どのようなものを提示するか

5　おわりに

今後の課題として，次のことがあげられる。

①　新学習指導要領における２年生の図形の学習をどう計画し，実践するか。特に円周角の取り扱いについて検討する。

②　３年生で相似の学習を行う場合，２年生で扱った場合と比較してどのような違いがあるのかを検討する。

今後も，このような課題を追究して，生徒にとって興味がもてる図形の学習指導のあり方を探っていきたい。

<引用・参考文献>

太田伸也.「図形指導における論証の位置づけ」. 第31回数学教育論文発表会・テーマ別部会 論証研究部会. 1998.

S. Kunimune and E. Nagasaki, Curriculum Changes on Lower Secondary School Mathematics of Japan- Focused on Geometry, in Curriculum Changes in the secondary school, Freudenthal institute. 1996.

国宗進.「図形の論証指導 改善の視点」. 第31回数学教育論文発表会・テーマ別部会 論証研究部会. 1998.

国宗進・羽田明夫・榛葉伸吾.「中学校での図形指導の改善」. 第32回数学教育論文発表会論文集. 1999, pp. 221-226.

国宗進.「中学校での図形指導の改善－日本中等教育数学会雑誌での論考に基づいて－」. 静岡大学教育学部研究報告（教科教育学篇）第31号. 2000, pp. 27-53.

国本景亀（研究代表）.「空間直観力と論理的思考力を育成するための教材開発と指導法の改善」平成６～７年度科学研究費補助金研究報告書. 1996.

小関熙純編著.「図形の論証指導」. 明治図書. 1987.

中原忠男.「21世紀型の算数教育の方向と研究課題」. 日数教学会誌算数教育. 1998, pp. 16-23.

羽田明夫・榛葉伸吾・国宗進.「中学校での図形の学習指導の改善－中１での授業実践に基づいて－」. 静岡大学教育実践研究指導センター紀要No. 7. 2001, pp. 23-41.

藤森章弘・羽田明夫・榛葉伸吾.「より豊かな数学学習をめざして」. 日本数学教育学会誌数学教育第81巻第５号. 1999, pp. 39-42.

村上一三.「形式的証明を回避しようとする図形教育への危惧」. 第31回数学教育論文発表会論文集. 1998, pp. 305-310.

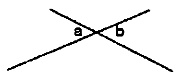
２年生「図形の基本性質」＆「定義」＆「定理」のまとめ

NO, 1

◇ 直線は１８０度である

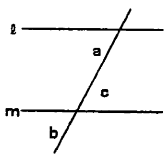
◇ 対頂角の性質

２直線が交わってできる対頂角は等しい　∠a＝∠b



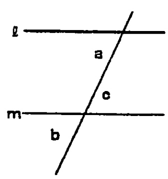
◇ 平行線の同位角・錯角

①平行線に１直線が交わってできる同位角は等しい。
ℓ//m　→　∠a＝∠b
②平行線に１直線が交わってできる錯角は等しい。
ℓ//m　→　∠a＝∠c



◇ 平行線になるための条件
次の①②のとき、２直線は平行である

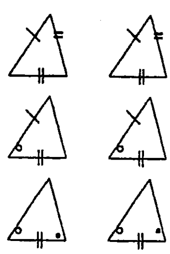
①２直線に１直線が交わってできる同位角が等しいとき
∠a＝∠b　→　ℓ//m
②２直線に１直線が交わってできる錯角が等しいとき
∠a＝∠c　→　ℓ//m



◇ 三角形の合同条件
２つの三角形は、次の①②③の条件のいずれかにあてはまれば合同である。
①３組の辺がそれぞれ等しい

②２組の辺とそのはさむ角がそれぞれ等しい

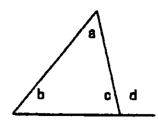
③１組の辺とその両端の角がそれぞれ等しい



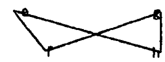
◇ 合同な図形の性質

①対応する線分の長さは、それぞれ等しい。
②対応する角の大きさは、それぞれ等しい。

◇ 三角形の内角・外角
①三角形の内角の和は１８０度である。
∠a＋∠b＋∠c＝１８０°
②三角形の外角は、これと隣り合わない２つの内角の和に等しい。
∠d＝∠a＋∠b

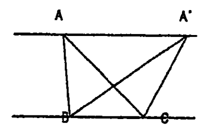


③右図で，∠e＋∠f＝∠g＋∠h

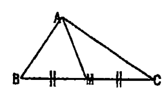


◇ 多角形の内角・外角
①n角形の内角の和は、１８０×(n－2)度である。
②多角形の外角の和は、３６０度である。
③正多角形の内角は全て等しい。

◇ 平行線と面積
線分ＢＣを共通の底辺とする
△ＡＢＣと△Ａ'ＢＣにおいて、
ＡＡ'//ＢＣならば、
△ＡＢＣ＝△Ａ'ＢＣである。



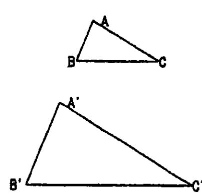
◇ 三角形と中線
三角形は，中線によって面積が二等分される。
BM＝CMならば，△ABM＝△ACM



◇ 三角形の相似条件　(＊相似…形が同じ，拡大・縮小)
２つの三角形は，次の①②③の条件のいずれかにあてはまれば相似である。

①２組の角がそれぞれ等しい。
∠B＝∠B'，∠C＝∠C'

②２組の辺の比が等しく，そのはさむ角が等しい。
ＡＢ：Ａ'Ｂ'＝ＡＣ：Ａ'Ｃ'
∠Ａ＝∠Ａ'
③３組の辺の比が等しい。
AB：A'B'＝AC：A'C'＝BC：B'C'



◇ 相似な図形の性質

①対応する線分の長さの比は、すべて等しい。
②対応する角の大きさは、それぞれ等しい。

【三角形】

◇ 二等辺三角形　『定義…２つの辺が等しい三角形』

・２つの底角は等しい
・頂角の二等分線は，底辺を垂直に二等分する。

◇ 正三角形　『定義…３つの辺が等しい三角形』

・３つの角は等しく，１つの角は６０度である。

◇三角形が二等辺三角形になるための条件

・２つの角が等しい三角形は二等辺三角形である。

◇ 直角三角形　『定義…１つの角が直角である三角形』

・２つの直角三角形は、次の①②の条件のいずれかにあてはまれば合同である。
①斜辺と他の一辺がそれぞれ等しい
②斜辺と一鋭角がそれぞれ等しい

◇ 直角二等辺三角形　『定義…１つの角が直角である二等辺三角形』

◇ 鋭角三角形『定義…３つの角が鋭角である三角形』

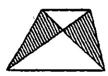
◇ 鈍角三角形『定義…１つの角が鈍角である三角形』

２年生「図形の基本性質」＆「定義」＆「定理」のまとめ

ＮＯ，２

【四角形】

◇ 台形　『定義…１組の向かい合う辺が平行な四角形』



・左図の斜線部分の面積は等しい。

◇ 平行四辺形　『定義…２組の向かい合う辺がそれぞれ平行な四角形』

・２組の向かい合う角は，それぞれ等しい。
・隣り合う２つの内角の和は１８０度である。
・２組の向かい合う辺は，それぞれ等しい。
・対角線は互いに他を二等分する。

◇ ひし形　『定義…４つの辺が等しい四角形』
・２つの対角線は，垂直に交わる。
・対角線は内角を二等分する。

◇ 長方形　『定義…４つの角が等しい四角形』
・２つの対角線の長さは等しい。
・１つの内角は90度である。

◇ 正方形　『定義…４つの辺が等しく，４つの角が等しい四角形』

◇ 四角形が平行四辺形になるための条件
四角形は，次のどれか１つが成り立てば平行四辺形である。

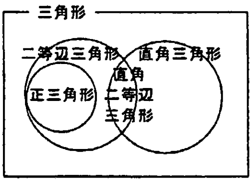
①２組の向かい合う辺が，それぞれ等しい。

②２組の向かい合う角が，それぞれ等しい。

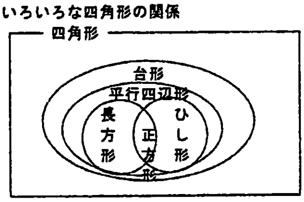
③１組の向かい合う辺が，平行で等しい。

④２つの対角線が互いに他を二等分する。

◇ いろいろな三角形の関係



◇ いろいろな四角形の関係



◇ 角の二等分線の性質

①角の二等分線上の点は，その角の二辺から等距離にある。

②角の二辺から等距離にある点は，その角の二等分線上にある。

◇ 線分の垂直二等分線の性質

①線分の垂直二等分線上の点は，その線分の両端から等距離にある。

②２点から等距離にある点は，その２点を結んだ線分の垂直二等分線上にある。

◇

◇

◇

◇

◇

◇