SURE 静岡大学学術リポジトリ
Shizuoka University REpository

作図し証明する過程を重視した図形指導：説明の根拠に着目して

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2014-06-05 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 高橋, 達也, 鈴木, 直, 國宗, 進 メールアドレス: 所属:
URL	https://doi.org/10.14945/00007794

〈論文〉

作図し証明する過程を重視した図形指導
－説明の根拠に着目して－

高橋達也*，鈴木　直*，國宗　進**

The Teaching of Geometry Fostering Students' Ability of Discovering, Reasoning and Proving in Lower Secondary School; Focussing the Bases of Explaining

Tatsuya TAKAHASHI, Tadashi SUZUKI, and Susumu KUNIMUNE

Abstract

This Study focusses on fostering students' ability of *Discovering, reasoning and proving* in gemetrical lessons of the seventh grade in lower secondary school.

It is important for students to understand reasoning and proving. Though Japanese students have learned proving from the eighth grade, many students don't understand the significance of proof. To dispel these circumstances, we chose geometrical constructions, planned and done lessons particularly in the seventh grade.

By observing practical lessons and analyzing students' writings, we pointed out the geometrical costructions can play a key role in *Discovering, reasoning and proving* in geometry. In these lessons, many students learned mathematics with great interest.

In this paper we will clarify how students use the properties known through the learning in elementary school, by observing five practical cases about *Discovering, reasoning and proving* in geometry.

キーワード：中学校数学，図形，作図，証明，根拠

1　研究のねらい

本研究は，中学校 3 年間の図形に関する学習指導を見通して，その一層の改善の方向を探り，実践に裏打ちされた提言を行うことを目指している。本稿では，「作図の方法を考え，それを証明する過程を重視する学習指導」の一層の改善を目指す。これは，筆者らが重視する「発見し証明する過程を重視する学習指導」の一つとして位置付けられる。

本稿のねらいは，中学校第 1 学年での基本作図に関連する学習指導において，生徒が説明の根拠として使う性質等を明らかにするとともに，その現状をふまえて作図し説明する学習指導改善の方向を明らかにすることである。

*静岡大学教育学部附属島田中学校
**静岡大学教育学部

2. 発見し証明する過程を重視した学習指導の基本的な考え方

(1) 発見し証明する過程の重視

本研究では，「発見し証明する過程」を重視している。それは，図形の論証に関する内容・方法の理解に有用であるとともに，特に生徒の数学学習への関心・意欲の喚起，及び好ましい数学学習観の形成に欠かせないと考えていることによる。できあがった内容が与えられ，決まりきった方法での解法を身に付けるという数学学習観からの脱却を目指したい。

「発見し証明する過程」を重視した授業に関する研究の一環として，本稿では特に第1学年での「作図し証明する過程をとる」ことを中心に検討する。

(2) 発見の対象

「発見し証明する過程」を重視する学習指導においては，生徒が発見する対象として，次のものが考えられる(國宗・熊倉・柗元，2013)。図 1 では，それらの対象を□で囲って示してある。

ア) (図だけ・場面だけから) 命題を見いだす。
イ) (結論が与えられていて) 仮定を見いだす。
ウ) (仮定が与えられていて) 結論を見いだす。
エ) 証明を見いだす。
オ) (命題を一般化する等によって) より発展的な命題を見いだす。

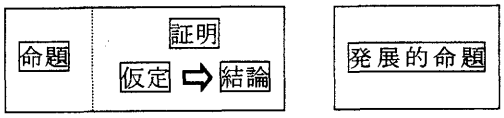


図 1　発見する対象

以下，その意味するところを具体的事例も示して述べることにする。

ア) の「仮定を見いだす」に関しては，価値ある「性質」そのものを生徒が見いだすのは容易でないが，図や場面だけを与えて，そこから何らかの性質を生徒自身が見いだすことをねらう。例えばいくつかの多角形を示してそれらに共通な性質を見いだしたり，カレンダーを示してそこにある数の間の関係を見いだし命題化したりすることがこれに相当する。

イ) の「仮定を見いだす」に関しては，ある条件(結論)を満たす作図の方法をいろいろと考えその方法が正しいことを証明するという，本稿の主題である「作図し証明する過程を重視する」学習指導がこれに相当する(榛葉・園田・國宗,2003,ほか)。例えば「角の二等分線をいろいろな方法で作図しよう」という問題に対して，生徒達は多様な作図方法を考え，そしてその方法が正しいかどうかを検討する。生徒が考えた作図方法は，結論「角の二等分線になっている」ことの十分条件である仮定を見いだしていることになる。

この「作図し証明する過程を重視する」学習指導は，初等幾何で行われる作図題での「解析」の方法，すなわち，求める作図ができたとしてその図形を観察・考察して結論を得るという方法に関連する。この方法は，中学校においても例えば「円外の 1 点からひいた接線の作図」の指導で明示的に扱われているであろう。本研究では，作図題での「解析」ほど論理的に作図の方法を検討することは意図していない。その方法を強調することよりも，生徒の試行錯誤によって現れたいろいろな作図の方法について，求められている図がかけているかどうかを検討することを意味している。もっとも，生徒によっては「解析」の方法によって思考を進めることができる場合があり，その状況にある時にはそれを積極的に推奨するのが自然な展開である。その方法が全体の場で発表され共有されて，作図の方法をいろいろと考える過程がより論理的に展開することもありえよう。

また，問題の発展的な指導(竹内・沢田，1984)において，例えば「A ⇒ B」が成り立つとき，仮定 A とは若干異なる A'を考えて「A' ⇒ B」が成り立つかどうかを追究する学習も，ここでいう仮定を見いだす思考行動として位置づけられる。

ウ) の「結論を見いだす」に関しては，いわゆる決定問題を取り上げることがこれにあたり，(いくつかの)図を的確にかくことが結論の発見につながることが多い。また，前項イ) で述べた問題の発展的な指導においても，A という前提のもとで結論を見いだす活動がよく行われる。

エ) の「証明を見いだす」ことは，図形の論証の学習において何度となく現れる。生徒が自力で証明方法を見いだすことができる場合には，多様な証明方法を取り上げてそれを楽しむ。その際には，補助線の引き方への着眼も有用である(高橋・鈴木・國宗，2013)。

一方，例えば直角三角形の斜辺と他の一辺の合同条件や，ピタゴラスの定理の逆の証明など，生徒自らが証明の方法を考えつくのが困難と考えられる定理については，教師と生徒との問答を中心としながらも，適宜生徒の手にゆだねるような展開を工夫する。

本研究でも，結論を推測するのに観察や実験・実測による方法をおおいに奨励するが，その方法は証明に結び付くものとそうではないものとが混在していることには留意したい。

オ) の「発展的命題を見いだす」に関しては，清宮(1967, 1968), 竹内・沢田(1984)ほかに詳しい。

なお，ア)〜オ)いずれの場合についても，証明のための図が与えられているかどうかは，生徒の学習行動に大きな影響を与える (Jones, K. et al, 2012)。

3. 作図し証明する過程を重視する学習指導

本稿は，「発見し証明する過程」を重視する学習指導の一つとして位置づけられる，「作図し証明する過程」を重視する学習指導について検討する。それは，前項(2)のイ)で述べたように，仮定を見いだすことになっている。

(1) 作図し証明する過程を重視する意義

「... のような図をいろいろな方法で作図してみよう」という問いかけに対して，生徒達は，典型的な作図の方法のみならず，さまざまな方法を考え出す。その中には，本当にそうなるかどうかがはっきりしないものも含まれている。生徒達には，自らが行った作図や友達が行った作図について「この方法で本当に問われている図がかけるのだろうか」という疑問が生じて，「この方法でかけるのか，理由を考えてみよう」と証明の追究へと自然に進んでいく。

すなわち，作図の問題を授業に積極的に取り入れることによって，まず「作図する」という身体を使った実際的，能動的な活動が促され，作図の方法が正しいかどうかを考え証明するという思考活動へとつながっ

て，それが仮定・結論の理解や証明による方法の理解を深めることになる。そして何よりも，数学学習に関する関心・意欲の向上につながる。これが，「作図し証明する過程を重視する」ことの意義である。

なお，作図では用具を定規とコンパスに限定することに関して，幾何学者である佐々木(1955)は，「このように手段を限定してみると個々の問題についてその解法の発見に高い思考を働かせねばならないしそこに考えることの楽しみや解法発見の喜びも生まれる」と述べている。

(2) 中1での作図し証明する学習指導の位置づけ

中学校数学科での図形指導は，第1学年は直観幾何，第2学年以降は論証幾何として，その扱いの違いを大きく分けることができる。

中2以降の図形の論証の学習指導においては，平行線と同位角・錯角の性質と条件，三角形の合同条件・相似条件をいわゆる「公理的」な命題として位置付け，演繹的推論を繰り返していくことによって，図形の性質を理解するとともに，証明の方法を理解し身に付けていく。そこでの「作図し証明する」学習は，例えば「角の二等分線の（中1教科書に載っている）作図の方法」を再確認し，それが正しいことを三角形の合同条件を根拠にして証明するというかたちで進められるのがふつうであろう。つまり，生徒にとっても授業者にとっても，証明の根拠は明確である。

一方，その前段階である中1での基本作図の指導においては，作図の方法が正しいことを説明するのに，その根拠として何を位置づけるかは以前から多々議論が行われている。中学校数学科の現行教科書の記述を見ると，事前にひし形の対角線の性質を確認したり，2つの円の中心線と共通弦との関係を扱ったりして，それらを説明の根拠として使うようにしようとしている意図を読み取ることができる。例えば「角の二等分線の作図」では，ひし形やたこ形の対角線は角を二等分することを使ったり，作図して現れた2つの三角形は線対称である，あるいは合同であると直観的に認めたりして，引いた直線が確かに角を二等分していると結論付けることになる。

このような教科書や，実際の学習指導案等の記述からすると，授業を構想する側の考え方はある程度明確であるものの，生徒の実態はどうなのか，一人ひとりはどんな性質等に根拠をおいて説明しているのかについては，それほど明示的に語られてはいない。授業で実際に何が起きているかに関する議論であるだけに，やむをえないことなのかもしれない。このような現状をふまえて，本稿では，具体的な授業での発言に基づいて，生徒が説明の根拠とする性質等を明らかにする。

4. 課題追究における生徒の説明とその根拠

中1での平面図形の授業を，「作図の方法が正しいことを，根拠を持って説明する」ことに重点を置いて，以下のように計画し実施した。

第1～3時【線対称・点対称，距離】
- 線対称な図形や点対称な図形を理解し，図形を対称性の観点から見る力を養う。
- 2点間，点と直線，平行な2直線間の距離について理解する。

第4～6時【平行線の作図・円の接線】
- 作図の意味を理解し，定規とコンパスを利用して直線の平行線の作図方法を考え，作図し説明する。

第7，8時【垂線の作図】
- 直線の垂線の作図方法を考え，作図し説明する。

第9，10時【角の二等分線の作図】
- 角の二等分線の意味を理解し，角の二等分線の作図方法を考え，作図し説明する。

第11，12時【線分の垂直二等分線の作図】
- 線分の垂直二等分線の意味を理解し，線分の垂直二等分線の作図方法を考え，作図し説明する。

第13時【角の作図】
- これまで学習してきた作図方法を利用して，様々な角を作図する。

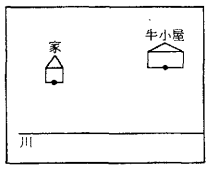
第14，15時【図形の移動と作図】
- 図形の移動の意味を理解し，3種類の移動の作図方法を理解する。

第16～18時【作図の利用】(以下のいずれかを扱う)
- 3点を通る正方形を，垂直二等分線を利用して作図し，説明する。
- 円周上に頂点がある正三角形を作図し，説明する。

この項では，以下いくつかの授業の実際を示して，生徒の説明において根拠として使われた性質等を明らかにする。なお、~~~は、使われた性質に関連する発言等の部分を示している。

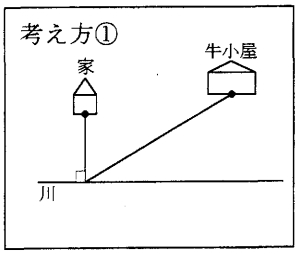
(1) 最短距離の作図（第1～3時）

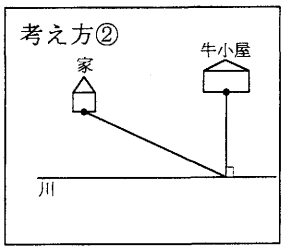
［課題］
右図のように家，牛小屋，川がある。家を出て川で水をくんでから牛小屋へ行きたい。最短距離で行くには，川のどの位置で水をくめばいいでしょうか。



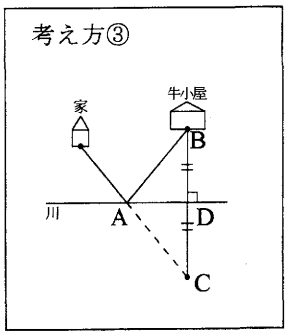
生徒の考えの中で最も多かったのは，下図①②のような考え方であった。距離とは最短コースの長さと学習した直後であったからであろう。そこで，本当にこの道が最短なのか考えるように促した。

（以下，T：教師，S：生徒とする）





考えが進まない生徒が多かったので，「家から川，川から牛小屋まで直線で結べるといいね」となげかけたが，生徒は「そんなこと無理でしょ。川の中に牛小屋がないといけない」とつぶやいた。しかし，そこから何人かが牛小屋や家を動かし始めることとなった。



この作図が正しいことの説明として，次のような議論がなされた。

S1：牛小屋から川に対して垂直に線をかき，BD＝CD になるような点 C，D をとる。家と点 C を結び川との交点を A とする。家から A，A から牛小屋を結んだ線が最短距離になると思う。

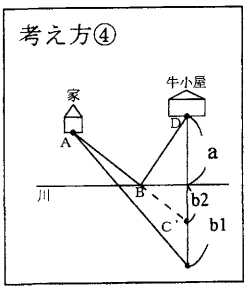
T：なぜ，ここが最短距離になるのでしょうか。

S2：家から川によって牛小屋までいく最短距離は，直線になるので，図のようになるね。

S3：△ABD と△ACD は線対称な図形になるので，AC＝AB になるから，最短距離になるのか。

S4：でもね，「牛小屋を a=b1 になるような場所に移動させることは理解できるけど，b2 のような場所に動かすことはよくないの。（考え方④）

S2：牛小屋からまっすぐおろした線上ならどこでもいいのかな。



S6：そう言われると，家から b2 までのほうが短いよね。

S4：それじゃ，結局川ギリギリのところが一番短くなるから，前の考え（考え方②）であってるじゃん。

S3：それはおかしいよね。何かおかしいところがあると思う。

S7：ちょっと考えたんだけど，もし AC が最短だとしたら，BC’ と BD の長さが違ってくると思うんだけど。BC’ が最短なんだから，それより長い BD を使えば最短ではなくなると思う。

S8：なるほどね。BC’ を折り曲げても，牛小屋まで届かないね。

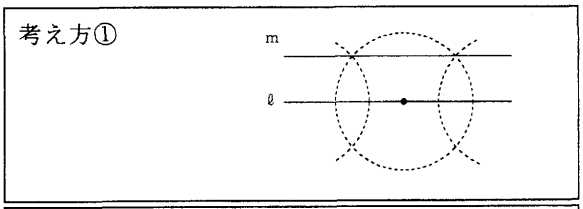
S9：BC’ と BD の長さが等しくならないと，最短とは言えないね。

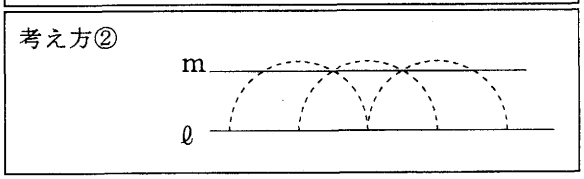
(2) 平行な直線の作図（第4～6時）

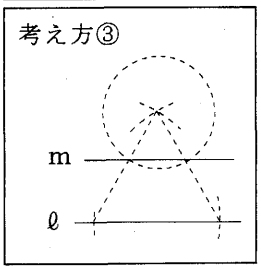
始めに「図をかく」ことと「作図する」ことの違いや，作図におけるコンパスや定規の使い方を説明した後，次の課題を提示した。

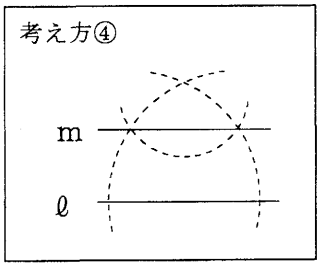
［課題］
直線ℓに平行な直線mを
作図してみよう。　　ℓ ——————

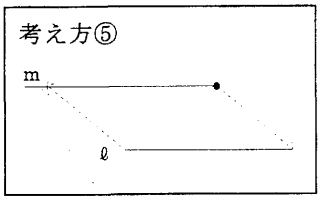
この課題に対して，生徒が考えた作図の方法は，以下の①～⑦である。

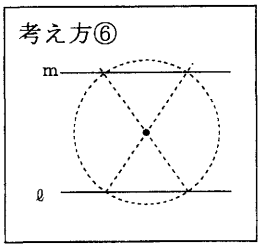


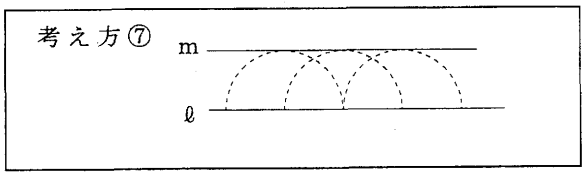












これらの作図が正しいことの説明は，次のように行われた。

S1：①は直線上に針を置き，半径が同じ円を３つかき，その交点を結ぶと平行な線が作図できます。

T：①が平行になる理由は何でしょうか。

S1：交わった点と，直径の両端と線で結ぶと，合同な三角形ができます。合同な三角形の高さが同じ

なので平行になるといえます。

S2：合同な三角形ができているんだ。

S3：②も同じような考え方ではないですか。

S4：僕は同じ半径の円をかいて交わったところを結んだだけで，理由はわかりませんでしたが，S1さんのように考えると，正三角形ができています。正三角形の高さが同じなので平行になるといえます。

S6：③は，正三角形をつくった後に，交わったところを中心に円をかき，正三角形と交わったところを結び，台形をつくりました。

S7：台形じゃなくて，等脚台形だよ。

S6：正三角形から，等脚台形ができあがるんだ。この作図で台形がつくれるから，平行が説明できると思います。

S7：④は，S6 君のように正三角形を作らないでかきました。でも，交わったところを結ぶと正三角形ができます。だから，同じ考え方です。

T：⑤はどうやって作図したの。

S8：適当に点をとって，コンパスで同じ長さになるように印をつけます。そうすると，平行四辺形が出来上がるので，平行になります。

S9：平行四辺形を作図したのか。だったら，絶対に平行になるね。

T：平行を作図するのには，合同な三角形や台形，平行四辺形を使えば作図できますね。

S3：⑥は，直線ℓと交わるような円をかき，ℓと交わったところと中心を通る直線をひき，円と交わったところを結ぶと平行な線がひけます。でも，理由がわかりません。

S6：これって，円と交わったところを結ぶと，長方形ができています。長方形なら，平行だと説明できます。

S3：本当だ。長方形ができている。これで納得いきました。

ここまで，生徒の作図方法や平行になる理由を全体で確認し，様々な方法で作図できることを理解している様子であった。

次に，考え方⑦を全体の場で紹介し，意見を求めた。

T：④と似ている⑦は，平行な線がひけるでしょうか。

S2：円にくっつくように直線をひいているから，大丈夫だと思います。

S4：僕も同じ考え方をしたけど，小集団でおかしいという話になりました。

S1：円にくっつくようにひいたのでは，どこの点を使っているのかはっきりしないよ。

S5：①から⑥までは，平行線は必ずコンパスの線が交わったところにできています。

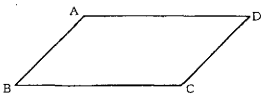
S2：作図では，2 点が一直線を決定するので，⑦はちょっとおかしいと思います。

S4：やっぱり，何となくではだめなんだね。

この考え方⑦の検討を通して，「線分は 2 点で決定する」ことに反しているのでこの考え方は正しくないという，成り立たないことを主張する方法についても確認することができた。

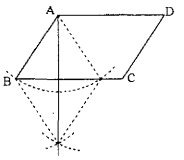
(3)平行四辺形の高さの作図（第7，8時）

［課題］
底辺を BC にしたときの点 A を通る高さを作図しなさい。

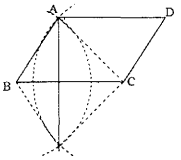


平行四辺形の高さの作図を通して，垂線の作図の確認も目的にしている。底辺に対して 90 ° になる線を作図するため，ひし形の対角線を意識する生徒が多かった。生徒が考えた作図は以下の①～⑥である。

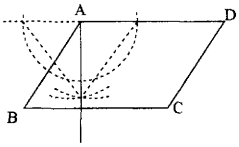
考え方①



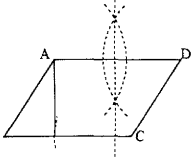
考え方②



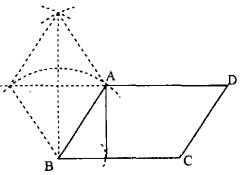
考え方③



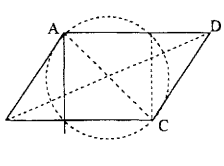
考え方④



考え方⑤



考え方⑥



これらの作図が正しいことは，以下のように説明された。

S1：①の作図は，コンパスの同じ長さを使って，二等辺三角形を 2 回つくりました。2 つの二等辺三角形は線対称になっているので，対称の軸で垂直に交わるため，垂直になります。

S2：二等辺三角形と考えるより，ひし形と考えればいいと思います。ひし形の対角線は垂直に交わります。だから，①の作図は高さが作図できていると思います。

S1：本当だ。ひし形と考えれば，理由がはっきりするよ。

S3：②は，点 B に針をおいて AB を半径とする半円をかきます。次に点 C に針をおいて AC を半径とする半円をかきます。そして下にできた交点を結ぶと高さになりました。でも，理由がよくわかりません。

S4：さっきと同じひし形ができているからでしょ。

S3：2 回の半円の半径の長さが違うから，ひし形ではないよ。ひし形ならよかったのに。

S5：2 つずつ辺の長さが同じだから，二等辺三角形ができているよね。線対称と考えればいいかも。

S6：もっと別の方法がないのかな。

T：実はこの形は，たこ形といいます。ひし形の 2 つの辺の長さを変えた形で，対角線が垂直に交わる性質をもっています。

S3：では，たこ形ができているから，高さが作図できましたという理由で説明できました。

T：たこ形も作図の説明では有効に使えますね。

S7：③は，AD を延長して，A を中心に半円をかきます。交わったところから違う長さで線をつけると，高さがかけます。理由は，合同な直角三角形が 2 つかけているからです。

S5：直角三角形も理由になるのですね。

S4：私も同じ考え方をしました。コンパスで印をつけたものを反対側にもつくれば，ひし形ができる。

S7：ひし形を考えた方がわかりやすい。でも，この説明でも間違いはないね。

T：④と⑤は，考え方が似ていますね。

S1：どちらも A から直接高さを作図するのではなく，別の場所に作図して，同じ長さをとる，平行な線の作図方法を使っています。

S2：前にやった作図も使っていてすごい。

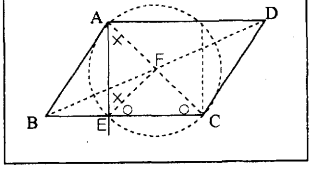
S8：平行な線の作図でもあったけど，コンパスを 1 回だけ使って作図する方法を見つけました。⑥は対角線の交わったところに針を置き，A を通る円をかき，BC と交わったところを結ぶと高さができます。理由は長方形ができるからです。

長方形がかけているので高さが作図できるというこの説明で，多くの生徒が納得していた。

しかし，ある生徒が長方形を使わなくてもできると，次のように説明した。

S2：⑦のように，対角線の交点を F とすると，AF，EF，CF がすべて同じ長さになるよね。二等辺三角形が 2 つできるから，○どうし，×どうしは同じ角度になります。三角形の角の和は 180° なので，○＋○＋×＋×＝ 180° になります。○と×は 2 つずつあるので，2 で割って，○＋×＝ 90° になります。図の中で○＋×になるのは，ちょうど線が交わったところです。だから，この方法で高さが作図できると思います。

考え方⑦



S3：すごいな。わかりやすいね。

S4：僕は長方形ができるからと考えていたけど，S3 君の説明を聞いて，長方形になる理由がよりはっきりしたよ。

S6：高さを作図するには，ひし形やたこ形，線対称を使えばできるね。

S7：作図って，理由を考えていくと，図形の性質を使うことが多い。

なお，この授業の考え方⑦の検討では，「平行四辺形の対角線はおのおのの中点で交わる」ことを生徒はそれほど意識せずに使っていることに留意したい。

(4) 角の二等分線・垂直二等分線の作図（第9～12時）

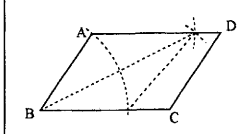
まず，角の二等分線の作図に関する次の課題を取り上げた。

［課題］（図，略）
平行四辺形 ABCD の辺 AB と辺 BC が重なるように折り曲げた時の，折り目の線を作図しなさい。

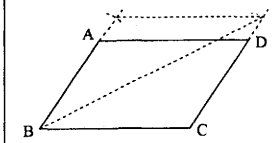
個人で追究する前に，すぐに折るのではなく，どんな折り目になるかを想像させている。

4 つの作図①～④を板書し，全体で確認した。

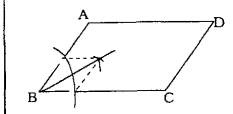
考え方①



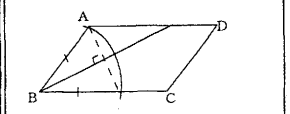
考え方②



考え方③



考え方④



考え方①～③はひし形を，考え方④は二等辺三角形を利用して説明できることを確認した。そして，解決のためのポイントとして，生徒の発言から次の 2 点が確認された。

ア：∠ ABC（∠ B）を 2 等分する線であること

イ：対応する頂点どうしを結んだ線と折り目の線は垂直に交わること

また，垂線のときと同じように，線対称な図形であることも生徒から出たので，ひし形以外にも作図できるのではないかと問いかけ，たこ形でもできると全体

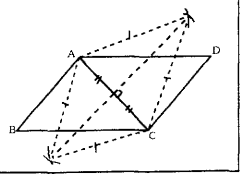
でまとめることができた。

しかし，考え方④の説明に関しては，二等辺三角形の底辺の垂直二等分線をどう引くのか，その垂線が頂点 B と本当に交わるのかという 2 点で，根拠が曖昧であるとして，全体では認められなかった。

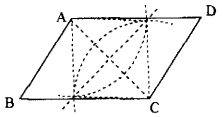
次に，線分の垂直二等分線の作図に関する次の課題を取り上げた。

［課題］（図，略）
平行四辺形 ABCD の点 A と点 C が重なるように折った時の折り目の線を作図しなさい。

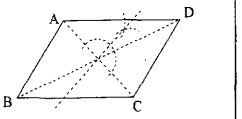
考え方①



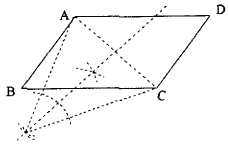
考え方②



考え方③



考え方④



考え方①のように，対角線 AC をひき，点 A と点 C から同じ半径の円をかいて，交点を結んでひし形を作る方法や，考え方②のように，同様な方法で正方形を作る方法を黒板で発表させた。作図できる根拠として，対角線が垂直に交わり長さが等しいと正方形になるという小学校で学習した性質を使って説明がなされた。

解決するためのポイントとして，生徒の発言から次の 2 点が確認された。

ア：対角線 AC を 2 等分する線であること

イ：対角線 AC の中点を通り，垂直に交わる線が必要であること

また，考え方③のように対角線を 2 本ひき，その交点を中心にして，対角線 AC に垂線をひく方法も発表され，条件さえ合っていれば，考え方②のように図をかく必要はないことも確認された。

そのような中で，ある生徒の考え方④を取り上げた。

S1：①のように，点 A と点 C から適当な長さを取って，二等辺三角形を作ります。そのできた角の二等分線をひくと，折り目の線がかけます。

S2：すごいねえ。でもどうして角の二等分線を引くとかけるのかな。

S3：二等辺三角形は，頂角の二等分線によって，合同な三角形 2 つに分けることができる。つまり線対称な図形ができます。だから，角の二等分線を引けば，折り目の線が作図できると思います。

このやり取りの後，ある生徒が次のように発言した。

S4：二等辺三角形の大きさは変えることができるから，幾つも作図できるよね。

T：皆さん，この意見についてどう考えますか。

S5：点 A と点 C から引く，コンパスの幅は変えることができるので，二等辺三角形がいくつもかけそうだ。（実際に追究用紙にかかせている。）

T：このことから，この折り目の線はどういう線だと分かりますか。

S6：点 A と点 C から等しい距離にある点の集まりということだ。

S7：この折り目の線は，対角線 AC を二等分し垂直に交わるだけでなく，別の意味もあったんだ。角の二等分線と似ている気がする。

考え方④は，前時の角の二等分線の学習で出された二等辺三角形の性質が使われている。「二等辺三角形の頂角の二等分線が底辺を垂直に 2 等分する」ことは中 2 で証明されるが，上記のように「垂直二等分線が 2 点から等しい距離にある点の集まり」であることが確認できた。

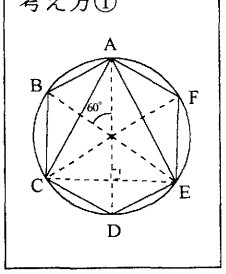
(5) 作図の利用（第16～18時）

本稿で示した授業計画では，平面図形の発展的な課題追究として「作図の利用」を 3 時間ほど設定している。以下，(ア)(イ)の 2 つについて検討するが，(ア)は 2013 年の実践に，(イ)は 2011 年の実践に基づいていて一部は坂本・高橋・國宗(2012)で報告している。

(ア) 円周上に頂点のある正三角形の作図

作図の利用として，「円周上に頂点のある正三角形を作図しよう」という課題を提示した。今までに学習した作図方法を利用することと，正三角形の特徴を全体でおさえてから，個人で追究を開始させた。等しい辺をつくるか，60° の角度をつくるかのどちらかで，考えている様子であった。

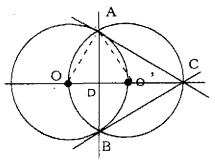
考え方①



（説明）
正六角形の作図から 3 点 A, C, E を結ぶ。△ ACE は，AC ＝ CE ＝ EA の正三角形となる。

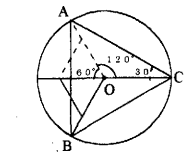
この作図方法は，確かに正三角形をつくることができる。生徒の説明では，合同なひし形が 3 つできて，それぞれの対角線が AC, CE, EA となるため長さが等しくなるということが正三角形になるための根拠であった。

考え方②



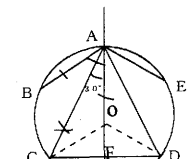
（説明）
△ AOO'は正三角形である。∠ O'CA ＝∠ O'AC ＝ 30°，∠ AOO'＝ 60°，∠ ADO'＝ 90°より∠ DAO'＝ 30°∠ O'AC ＝ 30°から∠ DAC ＝ 60°。同様に∠ DBC ＝ 60°。よって，3 つの角の大きさが等しくなり，AB ＝ BC ＝ CA の正三角形になる。

考え方③



（説明）
直径を引き，中心 O を 60°，120° に分ける。∠ OAC ＝∠ OCA ＝∠ OAB ＝ 30°。同様に，∠ OBC ＝∠ OCB ＝∠ OBA ＝ 30°より，∠ A ＝∠ B ＝∠ C ＝ 60°。よって AB ＝ BC ＝ CA の正三角形になる。

考え方④



（説明）
直径と円との交点を A とする。直径に∠ A が 60° になるように作図し，円との交点を B とする。∠ A の二等分線を引き，円との交点を C とする。同様に点 D をとり，3 点 A，C，D を結ぶ。∠ ACO ＝∠ OCF ＝∠ ADO ＝∠ ODF ＝ 30°より，∠ ACD ＝∠ ADC ＝ 60° になる。また，∠ CAD も 60° になるので，△ ACD は正三角形になる

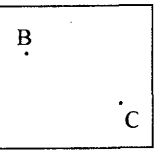
②③④の作図方法では，正三角形は 3 つの角度が 60° になるという性質を利用している。3 つの角度が等しければ，二等辺三角形の性質を利用し，辺の長さが等しくなることがわかるので，結局 3 つの辺の長さが等しいことが説明できた。

授業では，正三角形の定義である 3 つの辺が等しく，3 つの角が等しいということを説明の中に入れることが必要であることを意識させている。そのため，辺の長さを等しくするための方法と，角度を等しくするための方法（60° をつくる）という，小学校で学習した図形の性質を根拠にして作図や説明を考えていた。

(イ)　3点を通る正方形の作図

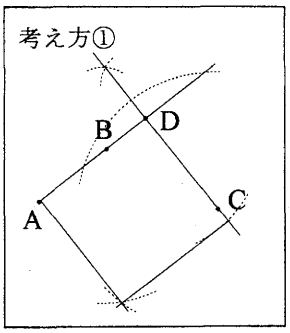
作図の利用として，次の課題を提示した。

［課題］
次の 3 点 A，B，C を通る正方形を作図してみよう。

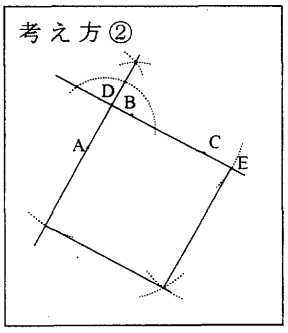


正方形であることを示すのに根拠となるものとして，「4 つの辺の長さが等しく，角が 90°」か，「対角線の長さが等しく，おのおのの中点で垂直に交わる」ことを全体で確認して個人での追究に入ったためか，正方形である理由はあまり議論にはならなかった。つまり，これまでのように，「作図してから理由を考える」方法ではなく，「必要な条件に当てはまるように作図する」方法が，生徒の中で無意識に行われ始めていたと考えることができる。以下に，生徒が考えた作図の方法を示す。

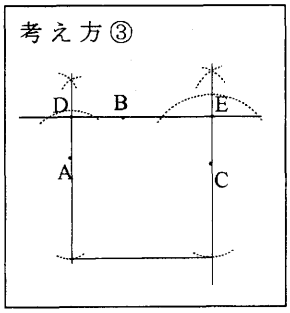
考え方①



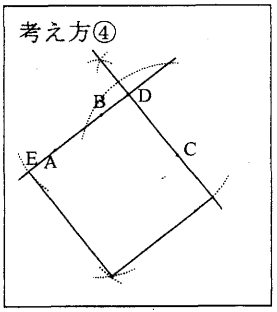
考え方②



考え方③



考え方④



垂直な 2 直線を作図するためには，基準となる直線を決め，その直線に向かってある点からの垂線を作図し，正方形の一辺の長さを決めればよい。これらは，作図したい正方形を想定して考えているからこそ考えられる方法である。つまり，角が 90° で辺の長さがすべて等しい図をかくという結論を導くために，「垂直を作図し，辺の長さを等しく作図する」ことを考えて課題に取り組んでいることになる。

この課題追究は，与えられた条件にあう作図の方法を考えるという活動を，「このように垂線を作図する」ならば「正方形が作図できる」ととらえてみると，作図の方法を考えることは，条件にあう図をかくという結論の仮定にあたる部分を検討していることになる。そこで行われる推論は，中 2 以降での図形の論証における命題や仮定・結論の理解につながっているとともに，説明・証明する能力の育成にも大きく貢献していることになる。

5. 生徒が説明の根拠として使った性質等

(1) 個々の事例における説明に使われた根拠

4.で検討した事例(1)～(5)のそれぞれにおいて，生徒が行った作図の方法が正しいことを説明する際に，その根拠として使った性質を列挙すると，次のように

なる。

1) 最短距離の作図
- 2 点間の最短距離は，その 2 点を結ぶ線分の長さである。
- 線対称な図形の対称の軸は，対応点を結ぶ線分に垂直でその中点を通る。
- 合同な図形の対応する辺の長さは等しい。

2) 平行な直線の作図
- 合同な三角形の高さは等しい。
- 合同な正三角形の高さは等しい。
- 台形（等脚台形）の対辺は平行である。
- 平行四辺形の対辺は平行である。
- 対角線の長さが等しく，おのおのの中点で交わる四角形は長方形である(←無意識によしとした)。
- 長方形の対辺は平行である。

3) 平行四辺形の高さの作図
- 二等辺三角形は線対称なので，その対称の軸は，対応点を結ぶ線分に垂直である。
- ひし形の対角線は垂直に交わる。
- たこ形の対角線は垂直に交わる(←教師が確認)。
- 合同な直角三角形の対応する角は等しい。
- 長方形の 1 つの角は 90° である。
- 二等辺三角形の 2 つの角は等しい。
- 三角形の内角の和は 180° である。
- 平行四辺形の対角線はおのおのの中点で交わる(←無意識によしとした)。

4) 角の二等分線・垂直二等分線の作図
- ひし形の対角線は垂直に交わる。
- たこ形の対角線は垂直に交わる。
- 線対称な図形の対称の軸は，対応点を結ぶ線分に垂直である。
- 二等辺三角形の底辺の垂直二等分線かくこと…全体では認められなかった。
- 対角線の長さが等しく，おのおのの中点で垂直に交わる四角形は正方形である。
- 二等辺三角形の頂角の二等分線は，2 つの合同な三角形をつくる。
- 二等辺三角形は線対称な図形である。

5) 作図の利用

(ア) 円周上に頂点のある正三角形の作図
- 合同なひし形の対角線の長さは等しい。
- 3 辺の長さが等しい三角形は正三角形である。
- 3 角の大きさが等しい三角形は正三角形である。
- 二等辺三角形の 2 つの底角は等しい。

(イ) 3 点を通る正方形の作図
- 4 辺の長さが等しく，角が 90° の四角形は正方形である。
- 対角線の長さが等しく，おのおのの中点で垂直に交わる四角形は正方形である。

(2) 説明に使われた根拠の概括

さらに，(1)で述べた事例ごとの説明の根拠として使われた性質をまとめてみると，その主なものは次のように概括することができる。
- 線対称な図形の対称の軸は，対応点を結ぶ線分に垂直でその中点を通る。
- 二等辺三角形は線対称な図形である。
- 合同な図形の対応する部分の長さは等しい。
- ひし形の対角線は垂直に交わる。
- たこ形の対角線は垂直に交わる。
- 対角線の長さが等しく，おのおのの中点で交わる四角形は長方形である。
- 対角線の長さが等しく，おのおのの中点で垂直に交わる四角形は正方形である。

なお，本授業では単元の終末に「(5)(イ) 3 点を通る正方形の作図」において，「4 辺の長さが等しく，角が 90° 」や「対角線の長さが等しく，おのおのの中点で垂直に交わる」という四角形は正方形になることを，小学校の学習や中 1 のその学級での合意に基づいて根拠として認めている。この(5)の(イ)を授業でとり扱わない場合は，これらやや複雑な性質は説明の根拠としては登場しないことに留意したい。

6. 考察

(1) 生徒が説明の根拠に使った性質等

中 1 での作図の学習指導において，作図の方法が正しいことの説明として，前項 5.(2)で示したような性質が根拠に使われることが明らかになった。

これらの性質等のほとんどは，当然のことながら，小学校での既習事項ということができる。

中 1 での基本作図に関する中学校数学科の平成 23 年版教科書の記述を見ると，3.(2)で既に述べたように，事前にひし形の対角線の性質を確認したり，2 つの円の中心線と共通弦との関係を扱ったりして，それらを説明の根拠として使わせようとしている。教師には執筆の意図は伝わるものの，生徒にとっては，なぜ急にひし形の対角線の性質や 2 つの円の中心線と共通弦の関係が登場するのかが読みとりにくい。基本作図に関する学習に先だって，説明の根拠を確認し準備しておくよりも，まず作図の方法を考え，そこで必要になった性質等を確認して授業を進める方が展開として自然であり的確であろう。5.(2)で概括したように，説明の根拠として使われる性質は，生徒が考え出した作図の方法に応じて，いくつか考えられることを銘記したい。

(2) 中2からの論証学習との関連

本稿で具体的に示したように，「いろいろな方法で

作図し，それが正しいことを説明する」中1での学習活動は，生徒の根拠を示して説明する能力の伸長や，数学への興味関心を高めることに貢献する。

ところがこのような中1での「作図し説明する」学習に続いて，中2以降の図形の論証の学習指導においても同一の命題が取り上げられ，平行線の性質・条件や三角形の合同条件を根拠にして証明がなされることになる。例えば「角の二等分線の作図」について，中1では本稿で述べたように，ひし形やたこ形の対角線は角を二等分することを使ったり，作図して現れた2つの三角形は線対称である，あるいは合同であると直観的に認めたりして，その作図の方法は正しいと結論づけている。ところが中2ではそれを合同条件を使って証明し直すことになる。

本稿で提案した「作図し証明する」過程を重視した展開において，中1と中2での性質の調べ方の違いを，生徒に明確に伝えることが重要である。それは，「論証の意義」の理解(國宗,1987, 他)を深めることに大きく関連する。

7. 今後の課題

① 本稿の 4.(4)においても現れているように，線分の垂直二等分線や角の二等分線を「ある条件を満たす点の集合」とみる見方が，作図の方法を発見する際に与える影響を明らかにする。

② 論証幾何に関する学習指導をより発見的に行うには，ふつう，観察や実験・実測による方法が用いられることが多い。しかし，それらの方法によって，例えば三角形の3つの角を分度器で測って和が180°であること，あるいはまた二等辺三角形の2つの角を測ってそれらが等しいことを見いだしたとしても，それは証明の方法に結びつかない。発見の過程が証明の方法を導き出さないことが多いのである。「論証幾何において，発見に論証を用い，それを積極的に応用しているところといえば，作図題の「解析」ぐらいなものであろう。」(石谷,1957)という説もある程である。

論証幾何における「発見し証明する」過程を重視した授業を数多く構想する必要がある。

〈引用・参考文献〉

Hershkowitz, R.(1990). Psychological Aspects of Learning Geometry. In P.Nesher & Kilpatrick (Eds),*Mathematics and Cognition*. Cambridge University Press. pp.70-95.

Jones, K., Fujita, T., & Kunimune, S. (2012). Promoting Productive Reasoning in the Teaching of Geometry in Lower Secondary School: Towards A Future Research Agenda. *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education,* pp.2222-2231. : ICME.

石谷茂(1957),『図形と論証』,啓林館.

國宗進(1987),「「論証の意義」の理解に関する発達の研究」『日本数学教育学会誌数学教育学論究』Vol.47･48, pp.3-23.

國宗進・熊倉啓之・松元新一郎(2013),「図形の論証の理解とその学習指導－図形の相似に関する補助線を引く方法の意識化－」,日本数学教育学会誌第95巻『数学教育学論究 臨時増刊』, 第 46 回秋期研究大会特集号 pp.113-120.

國宗進・羽田明夫・榛葉伸吾(1999),「中学校での図形指導の改善」『第 32 回数学教育論文発表会論文集』, pp.221-226.

栗田稔(1981),『幾何』,共立出版, pp.12-23.

古藤怜編著(1998),『コミュニケーションで創る新しい算数学習－多様な考えの生かし方まとめ方－』, 東洋館出版.

坂本健司・高橋達也・國宗進(2012),「中学校第1学年における数学的推論能力の育成－説明する活動を重視して－」『静岡大学教育学部教育実践総合センター紀要』No.20, pp.1-10.

佐々木重夫(1955),『幾何入門』,岩波書店, p.193.

榛葉伸吾・園田博人・國宗進(2003),「中学校での図形の学習指導の改善－作図し証明する過程を重視して－」『静岡大学教育学部附属教育実践総合センター紀要』, No.9. pp.11-30.

清宮俊雄 (1967),「初等幾何学における発見的研究法について」,日本数学教育学会誌『数学教育学論究』Vol.XIII, pp.16-45.

清宮俊雄 (1968),『幾何学－発見的研究法－』科学新興社.

高橋達也・鈴木直・國宗進(2013),「補助線を引く方法を意識化させる図形指導－説明する活動を重視して－」『静岡大学教育学部教育実践総合センター紀要』No.21, pp.21-30.

竹内芳男・沢田利夫編著(1984),『問題から問題へ 問題の発展的な扱いによる算数・数学科の授業改善』東洋館出版

望月美樹(2009),「線分の垂直二等分線の作図」,國宗進・相馬一彦編著『中学校新数学科数学的活動の実践プラン集第 1 学年編』明治図書, pp.58-61.