SURE 静岡大学学術リポジトリ
Shizuoka University REpository

絶対温度が負となる非粘性2次元点渦系での粒子性に由来する拡散項の理解

メタデータ	言語: ja 出版者: 静岡大学 公開日: 2013-01-09 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 八柳, 祐一 メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/10297/7030

様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２４年　４月　６日現在

機関番号：１３８０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2010～2011
課題番号：22740254
研究課題名（和文）絶対温度が負となる非粘性 2 次元点渦系での粒子性に由来する拡散項の理解
研究課題名（英文）Analytical derivation of diffusion coefficient for two-dimensional inviscid point-vortex system in negative absolute temperature
研究代表者
八柳　祐一（YATSUYANAGI YUICHI）
静岡大学・教育学部・准教授
研究者番号：30287990

研究成果の概要（和文）：
渦の大規模構造形成は,木星の大赤斑や鳴門の渦など,普遍的に見られる現象であるが,そのメカニズムについては不明なことが多い。本研究では，Onsager が提唱した負温度点渦系を対象とし，渦の構造形成について，絶対温度をパラメタとして力学過程を理解することを目標とする。これまでの様々な研究から構造形成には拡散項が大きな鍵を握ることが示唆されているので，本申請では拡散項の定量的評価を試みたところ，久保公式の拡張となる結果が得られた。拡散項は 1/N に比例するため，粒子数無限大の熱力学的極限で，非粘性となる。

研究成果の概要（英文）：
Large-scale structure formation in vortex dynamics is a ubiquitous phenomenon, for example, Jupiter's Great Red Spot and eddies in Naruto Channel. However, the detailed mechanism is still unknown. Our final goal is to understand the dynamical mechanism of the vortex structure formation observed in the two-dimensional point vortex system at negative temperature which is first introduced by Onsager. As many research results predict that a key feature to understand the structure formation may be a diffusion process, the diffusion coefficient for the point vortex system has been investigated quantitatively. Obtained formula is an extension of the well-known Kubo formula. The result indicates that the diffusion coefficient is proportional to 1/N and the value goes to zero in the thermodynamic limit.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２０１０年度	2,600,000	780,000	3,380,000
２０１１年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
年度			
総　計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：物理学・数理物理・物性基礎
キーワード：流体物理

１．研究開始当初の背景

Onsager は，台風などの巨大渦形成メカ

ニズムを説明するために,「負温度」と呼ばれる概念を提唱した[1]。壁により閉じ込められた点渦系の全相空間体積は有限となることから, 系のエネルギー$E\to\infty$の極限で状態数 $W\to 0$ となること，あるエネルギーE_0において状態数 W は極大となることが導かれる。よって，$E>E_0$ となる高エネルギー側では, 逆温度 $\beta=\mathrm{d}(\log W)/\mathrm{d}E<0$ となり，統計力学的に定義される系の絶対温度が負となる状態が現れうる。ただし，エントロピー$S=k_\mathrm{B}\log W$ の関係を用いた。

温度が負となる状態は高エネルギー側に現れ，同符号の点渦同士が凝集し塊を作る傾向がある。図 1 は，長時間に渡る時間発展により得た点渦群の平衡分布を表す。

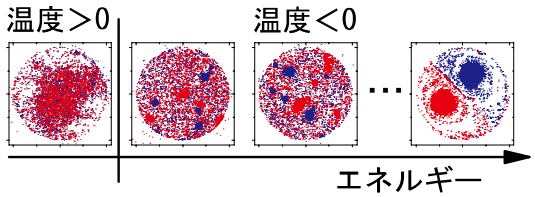


図 1　点渦群の平衡分布

系の温度が負となるようにエネルギーを上げると，分布の中に正は正，負は負で凝集した領域ができはじめ，さらにエネルギーを上げるとだんだん凝集物がはっきり見分けられるようになり, 最終的に正で 1 個, 負で 1 個の塊を作った状態が安定となる。つまり，渦の構造形成における一つのパラメタは温度である。

構造形成の別の例を示す。図 2 は京都大学際本研究室で行われてきた非中性プラズマを用いた渦実験[2]に対応して行ったシミュレーション例であり，磁場に垂直な断面の電子運動を表す。この電子群の運動は式変形により， 2 次元非圧縮性オイラー方程式により記述可能なため，点渦系と見なすこともできる。

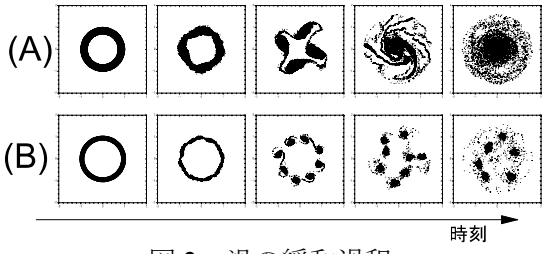


図 2　渦の緩和過程

リング状分布は，時間と共に Kelvin-Helmholtz 不安定性によりいくつかの塊に分解される。初期のモード毎の成長率はリングの厚さにより決まり, (A)の場合は 4，(B)の場合は 8 が最も線形不安定なモードである。(A)の場合は，準安定なモード 4 を経由し純電子系の安定分布である一様分布へと緩和する。(B)の場合もさらに長時間に渡り追跡することにより，一様分布へと緩和すると予想できる。申請者はこれらの数値シミュレーションを通して，系のトータルの循環を一定にして粒子数を変化させた場合，緩和時間や経由するモード数が必ずしも同じにならないことに気がついた。これは，点渦系シミュレーションの Review において Leonard が指摘したこと[3]："*It now appears that using an increased number of point vortices of decreased strength will not yield a converged solution. ... Ironically, best results with the point vortex method often are achieved by using only a few vortices with a diffusive time integration scheme.*"に端的に語られていることに通じるだろう。

点渦系の基礎方程式は非粘性であるのに，点渦数が増えることにより緩和時間が変化するということは,「点渦」という離散化により衝突現象に由来するなんらかの拡散項がオイラー方程式に導入されたことを示唆する。この点に関しては類似の研究が多数あり，中心極限定理を使って現象論として導いたもの[4]や，BBGKY 階層を使ったもの[5]，久保公式を軸対称流で評価したもの[6]などがあるが，粒子性に起因する粘性の本質的由来について深い知見は未だ得られていない。よって，離散的計算手法である点渦法における拡散効果を明らかにすべく，本研究を開始するに至った。

[1] L. Onsager, Nuovo Cimento Suppl. **6**, 279 (1949)
[2] 際本泰士，日本物理学会誌，**56** (2001) 253.
[3] A. Leonard, J. Comput. Phys. **37** (1980) 289.
[4] 例えば：P. H. Chavanis, Phys. Rev. E **64** (2001) 026309.
[5] 例えば：M. M. Sano, Phys. Rev. E **76** (2007) 046312.
[6] D. H. E. Dubin, Phys. Plasmas **10** (2003) 1338.

２．研究の目的

先に述べたように，渦の大規模構造形成は，木星の大赤斑や鳴門の渦など，普遍的に見られる現象であるが，そのメカニズムについては不明なことが多い。本研究では，Onsager が提唱した負温度点渦系[1]を対象とし，渦の構造形成について，絶対温度を

パラメタとして力学過程を理解することを目標とする。これまでの様々な研究から構造形成には拡散項が大きな鍵を握ることが示唆されているので，本研究では拡散項の評価に焦点をあてた。

３．研究の方法

点渦系とは, Dirac のデルタ関数の集合体として定義された離散渦群である。

$$w_z(\boldsymbol{r},t)=\sum_i \Omega_i \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i(t))$$

$\omega_z(\boldsymbol{r},t)$は渦度，$\Omega_i$，$\boldsymbol{r}_i(t)$は i 番目の点渦の強さ(循環)と位置ベクトルである。この点渦は，2 次元非圧縮性 Euler 方程式(渦度方程式の形式で記載)

$$\frac{\partial w_z}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla w_z=0$$

の形式的な解となり，点渦群の時間発展を追跡することにより時刻 t での渦度分布を知ることができる。しかし，Euler 方程式はマクロな 2 次元流体現象を記述するマクロな方程式であり，本来，解は滑らかであるべきである。すなわち，点渦解のような singular な解はマクロな方程式の解としては違和感が残る。では，初期時刻 $t=0$ において設定した点渦分布を渦度方程式を用いて時刻 T_0 まで時間発展させて得た分布と，初期時刻 $t=0$ での点渦分布を平均化して得たマクロで滑らかな渦度分布を渦度方程式を用いて時刻 T_0 まで時間発展させて得た分布は同じ分布になるだろうか？我々は，この分布は異なるものになると予想した。なぜならば，マクロな渦度方程式は非粘性だが，点渦には粒子性に由来する粘性が含まれていると考えたからだ。

この問題に取り組むに当たり，プラズマ系で用いられる Klimontovich 方程式での手法を用いる。Klimontovich 方程式は相空間でのプラズマのダイナミクスを記述する運動論的方程式で，デルタ関数で離散化された粒子解を厳密解としてもつ。このミクロな方程式の解は，マクロな量と揺らぎから成ると考え，平均化すると右辺に拡散項を導くことができる。この手法は，Fokker-Planck 型の拡散項を導くさいに威力を発揮する。この手法を今回，点渦系に適用した。

出発点はミクロな渦度方程式である。

$$\frac{\partial w_z}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla w_z=0$$

マクロな Euler 方程式と区別するために，今後ミクロな量には^を付す。ここで，ミクロな量は，自分自身を平均化したマクロな量と揺らぎの和で表現されると仮定する。

$$\begin{aligned}\hat{w}_z(\boldsymbol{r},t)&=\langle w_z(\boldsymbol{r},t)\rangle_{S,E}+\delta w_z(\boldsymbol{r},t)\\&=w_z(\boldsymbol{r},t)+\delta w_z(\boldsymbol{r},t)\\\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{r},t)&=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)+\delta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)\end{aligned}$$

これを，ミクロな渦度方程式に代入し平均化を行った結果から 1 次の揺らぎの平均をゼロとすると，次式が得られる。

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}w_z(\boldsymbol{r},t)+\nabla\cdot[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)w_z(\boldsymbol{r},t)]\\&=-\nabla\cdot\langle\delta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)\delta w_z(\boldsymbol{r},t)\rangle_{S,E}\qquad\cdots※\end{aligned}$$

左辺はすべてマクロな量である。一方，右辺には揺らぎの積の平均が残る。この項が，粒子性に由来する拡散項である。$\delta\omega_z(\boldsymbol{r},t)$の具体的表式を得るため，ミクロな渦度方程式にミクロな量を代入し，揺らぎに関して 1 次の項を集めた線形化方程式を用いる。

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\delta w_z(\boldsymbol{r},t)+\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)\cdot\nabla\delta w_z(\boldsymbol{r},t)\\&=-\delta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)\cdot\nabla w_z(\boldsymbol{r},t)\end{aligned}$$

この式の左辺第 2 項に現れる $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)$および右辺に現れる$\omega_z(\boldsymbol{r},t)$はマクロな量であることに注意する。マクロな量はミクロなスケールでは変化しない定数と見なすことが出来ると考えると上式は積分可能で，

$$\begin{aligned}&\delta w_z(\boldsymbol{r},t)\\&=-\int_{-\infty}^{t}dt'\,\delta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}-(t-t')\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t),t')\cdot\nabla w_z(\boldsymbol{r},t)\end{aligned}$$

となり，これを(※)に代入すると最終的に，

$$\frac{\partial}{\partial t}w_z(\boldsymbol{r},t)+\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)\cdot\nabla w_z(\boldsymbol{r},t)=\nabla\cdot(\eta\cdot\nabla w_z)$$

$$\eta=\int_{-\infty}^{t}dt'\,\langle\delta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)\,\delta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}-(t-t')\boldsymbol{u},t')\rangle_{S,E}$$

が得られ，拡散係数に対するテンソルでの具体的表式が得られる。これが粒子性に由来する拡散項の表式である。

４．研究成果

我々が導いた結果には　マクロな流れに伴う位置のずれを考慮した相関が含まれているのが特徴で，よく知られる久保公式に時間相関しか含まれていない点と対照的である。

さらに単一符号系の点渦(案内中心近似を行った非中性純電子プラズマ系と同等)についてさらなる評価を行ったところ，当

初，点渦系を記述する運動論的方程式には Fokker-Planck 方程式の右辺に含まれる摩擦項が現れないと予想していたが，摩擦項に対応する効果があること，および渦度 $\omega_z(\boldsymbol{r})$が，

$$\omega_z(\boldsymbol{r}) = \omega_0 \exp[-\beta\Omega_0\,\psi(\boldsymbol{r})]$$

(ただし，$\omega(\boldsymbol{r})$：渦度場，ω_0：渦度の係数，β：逆温度，Ω_0：点渦の循環(定数)，$\psi(\boldsymbol{r})$：流れ関数)の形の分布になるとき，拡散項と摩擦項が釣り合い，Fokker-Planck 方程式の右辺はゼロとなること，点渦数が無限大の連続極限で拡散項と摩擦項の効果は相殺してゼロとなることを明らかにした。また，点渦系は点渦同士の相互作用を決める Green 関数が，長距離力である重力と本質的に同等であるため，点渦系の緩和時間は，重力多体系の緩和時間である N^2 に比例すると考えるのが一般的であったが，上記の結果は，点渦系の緩和時間が N に比例することを示唆している。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 1 件）

① 八柳祐一，羽鳥尹承：「2 次元点渦系での粒子性に基づく散逸効果」，京都大学数理解析研究所講究録，**1749** (2011) 37-45. (査読無し)

〔学会発表〕（計 4 件）

① 八柳祐一，羽鳥尹承：「2 次元点渦系の運動論的取り扱い」，第 61 回理論応用力学講演会，東京大学生産技術研究所，2012 年 3 月 7 日，(招待講演，基調講演)
② 八柳祐一，羽鳥尹承：「2 次元オイラー方程式における点渦解に現れる粘性」，Plasma Conference 2011（日本物理学会(領域 2)2011 年秋季大会），石川県立音楽堂，2011 年 11 月 25 日
③ Yuichi Yatsuyanagi, Tadatsugu Hatori: ″Analytical derivation of diffusion coefficient of two-dimensional point vortex system with Klimontovich formalism″, RIMS Camp-style Seminar ″Modern approach and developments to Onsager's theory on statistical vortices″, Apical Inn Kyoto, 2011 年 8 月 29 日
④ 八柳祐一，羽鳥尹承：「2 次元点渦系の粘性に関する考察～運動論的方程式での連続解と粒子解～」，京都大学数理解析研究所共同研究集会「オイラー方程式の数理：カルマン渦列と非定常渦運動 100 年」，京都大学数理解析研究所，2011 年 7 月 22 日

〔その他〕

ホームページ等

http://www.ipc.shizuoka.ac.jp/~eyyatsu

６．研究組織

(1)研究代表者

八柳　祐一（YATSUYANAGI YUICHI）

静岡大学・教育学部・准教授

研究者番号：30287990