CASを活用した協働的な選択数学の授業実践

CASを活用した協働的な選択数学の授業実践

Collaborative practice about elective mathematics classes maked use of CAS

両角達男*・清澤毅光*・伊藤和弘**・伊藤　藍***・松原康晃***

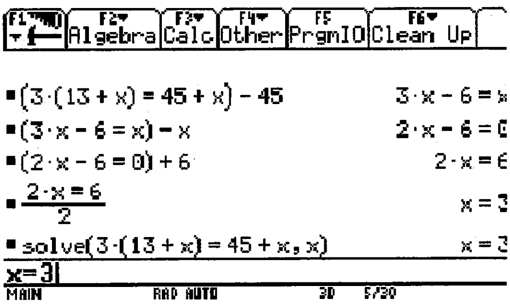
Tatsuo MOROZUI, Takemitsu KIYOSAWA,

Kazuhiro ITO, Ai ITO, Yasuaki MATSUBARA

1．CASの活用により促される学習活動

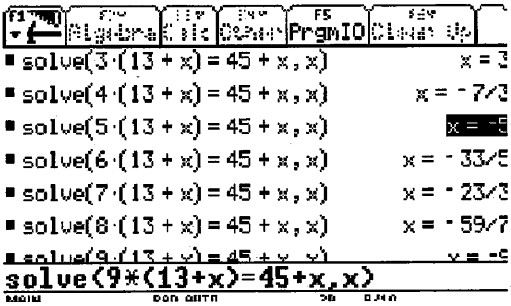
数式処理電卓などのCAS（Computer Algebra System）を活用することにより、学習の深まりや拡がりをもった数学的活動が展開できる。

例えば、1次方程式　$3(13+x)=45+x$　をxについて解く際には、多くの場合、左辺を展開し文字を含む項を左辺に移項し、右辺には数を移行し計算することが行われる。逆算の考えを用いて、方程式で表すことのできる問題を解くことに慣れた生徒にとって、移項に対するハードルはそれほど高くない。しかし、移項という行為が、数学的に正しいと認められた等式の性質に基づき行われるものであり、数学的に正しい行為の積み重ねで解く作業が保証されているという内省の状態に至るのは容易ではない。逆算の考えに類似する移項により、方程式の答えを出すことができるためであり、方程式を解くために行った行為を振り返る必然性に乏しいからである。この状況が、CASを用いて1次方程式　$3(13+x)=45+x$　をxについて解くことにより、変容する。



solveキーを使わずに、1次方程式を解くためには右のようなステップが必要となる。（右の画面はVoyage200，テキサスインスツルメント社によるもの）

1次方程式　$3(13+x)=45+x$　の両辺に同じ操作を施す、という等式の性質が強く意識される。また、solveキーを使わないで1次方程式を解くためには「どの等式の性質を使えばよいのか」という見方や「この等式の性質を用いると、変形された後にどのような式が登場しそうか」という予測が促される。



solveキーを使わずに1次方程式を解く行為を通して、数学的に正しいと認められた等

＊数学教育講座　＊＊静岡大学大学院　＊＊＊静岡大学教育学部4年

式の性質やその役割を、方程式を解く中で改めて意識することができる。この状態は、単に規則に従って方程式を解くよりも、深い思考をしている。

また、CASを用いると、１次方程式の左辺の係数　□(13+x)＝45+x　の□を変えた場合の答えをすぐ表示することが可能となる。solve（□(13+x)＝45+x, x）によって表示された一次方程式の解は、次の年齢算の問題の一般解に求めようとしていることに他ならない。

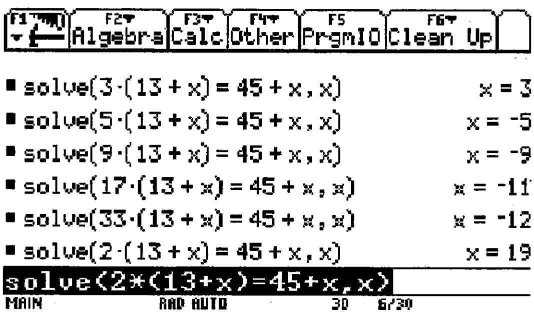
【年齢算の問題】

現在，達也君は13歳，達也君の父親は45歳である。父親の年齢が達也君の年齢の□倍になるのは何年後だろうか。

（１）　□＝３，５，９

それぞれの場合で求めてみよう。

（２）　□が(1)以外の場合ではどうなるだろうか。



この年齢算の問題では、－５年後、すなわち５年前は達也君は８歳、達也君の父親は40歳であるので、父親の年齢は達也君の年齢の５倍となっている。達也君、父親の生年月日までは条件に入っていないため、一次方程式の解として分数値が生じるものの多くは、問題の答えとして不適となる。

問題場面と照らし合わせ、一次方程式の解が整数値であり、かつ実現可能性（父親と達也君が実際に年齢を重ねそうな範囲）を踏まえたものが、右上の画面である。この画面に表示された一次方程式の解や□の値には規則性が存在する。特に、□の値｛２，３，５，９，17，33｝は、32の約数に１を加えたものである。この事実は、１次方程式を次のように変形し、その式の意味を解釈することにつながる。

$$\square\,(13+x)=45+x$$
$$(\square-1)(13+x)=(45+x)-(13+x)$$
$$(\square-1)(13+x)=32$$

（x年後の達也君の年齢13+x）＝(達也君と父親の年齢差32)／(□－１)・・・※

※の値が整数値をとるので、□－１は年齢差32の約数となる

年齢算に関わる１次方程式を解くことを内省し、やや高い立場に立って年齢算の一般解を見いだしていることといえる。分数関数　y＝32／(x－１)をグラフ表示し、グラフが格子点を通る部分をみつけること、と数学的な表現を変え、グラフ表現と式表現を結びつけることもCASを用いると可能になる。また、年齢算の一般解に関わる上記の見方は、年齢差に注目する線分図やテープ図を用いた解法の原理ともなっている。

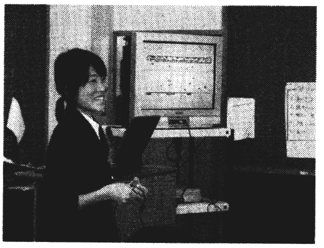
１次方程式　3(13+x)＝45+x　から拡がる数理のように、CASを活用すると学習の深まりや拡がりのある数学的活動の展開が期待できる。

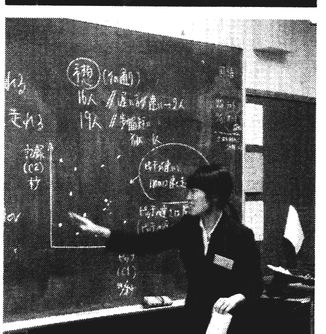
2．CASを活用した協働的な選択数学の授業実践に向けて

数式処理電卓Voyage200の中には、数式処理を始めてとして、画面上に図形をかくことができるCabri Geometryの機能、統計に関わる活動ができる機能など、様々な用途に応じた機能がある。これらの機能を必要に応じて使い分けることにより、中学校数学の学習を深めていくことを意図した授業実践を計画した。一連の授業は、次の４つの要素を含むものであり、静岡大学教育学部附属静岡中学校の３年生対象の選択数学の中で行われている。

（１）データの傾向と特性を知り、適応判断能力を伸ばすことを意図した統計に関わる学習
（２）コンピュータの画面上で与えられた条件を満たす図形をかいたり、条件を満たすように図形を動かすことにより問題解決を行う、図形に関わる学習
（３）方程式をCASを用いて解き、解いた過程を振り返り、やや高い立場から問題を見直して、問題に潜む数理やからくりを読み解く学習
（４）整数に秘められた規則性を発見したり、現象をグラフ化してグラフの形状から規則性を発見する学習

（１）～（４）の要素を含む数学授業は、次のメンバーが主たる担当として実践すると共に、他のメンバーはティームティーチングを行う形で行われている。現在のところ、（１）と（２）については授業が実施され、（３）と（４）は１月より順次行われる。また、それぞれの授業に関しては、附属中学校数学科の先生方を含めた形で、折々に授業研究会が行われている。





（１）統計の学習：伊藤藍
（２）図形の学習：松原康晃
（３）方程式の学習：伊藤和弘
（４）規則性を発見する学習：両角達男・清澤毅光
（注：（４）の授業実践は両角，中高大のつながりに関わる教材研究は清澤が担当)

右の画像は、統計に関わる授業（伊藤藍）の中でみられたものである。この授業は、「100m走を速く走るためにはどうすればよいか」という問題意識を解決するために、３時間かけて行われたものである。

「ピッチを速くすれば100m走を速く走ることができるか」
「ストライドを広くとると100m走を速く走ることができるか」
などの仮説を、著名な選手の100m走のタイム、ピッチ、ストライドの値をもとに調べている。

授業者自身が100mを走っている様子を画像を通してみて、その解説を聞きながら、生徒は自分自身の経験との対比を行う。その対比を踏まえ、「100m走を速く走るにはどうすればよいか」について様々な考えを導く。また、データの傾向と特性を、散布図を通してみることにより、予想とは異なる意外な結果に驚く。

本稿では、（１）～（３）の営みに焦点をあて、それぞれの

授業で大切にしたいこと、授業での特徴的な生徒の動きなどを述べていく。この授業実践の試みには、附属学校と大学との連携と共に、附属学校での授業実践を通して、数学教育研究を学生と教員が共に深めていくという２つの意味が込められている。　〈両角達男・清澤毅光〉

３．適応判断力を伸ばす統計学習の実践　ー短距離走に焦点をあててー

３－１．授業実践に向けた題材観

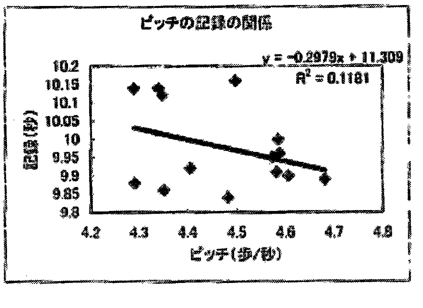
近年、社会のあらゆる場面で表やグラフが使われている。表やグラフに示された情報を読み、適切な判断をすることが一層必要とされている。

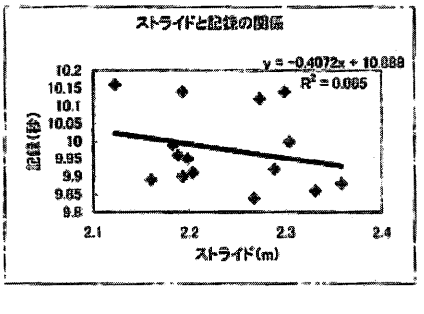
一方、諸外国では統計教育、実際のデータを扱う教育に非常に力をいれているものの、日本ではここ数年、統計教育が軽視されている。現在の日本の算数・数学カリキュラムでは、小学校中学年で棒グラフや折れ線グラフが導入され、小学校高学年では百分率や割合の観点からみた円グラフや棒グラフを扱っている。中学校数学では資料の整理などの、統計に関わる学習は削除され、高校１年で数学基礎を履修するか、高校２年数学Ｂで統計とコンピュータを履修しない限り、小学校高学年段階で学んだ知識のみで社会に出ることとなる。現実的には、ほとんどの生徒は小学校高学年段階の統計の知識のみといえよう。さまざまな情報があふれる現代社会において、規則性のないと思われる社会現象や、自然現象の中から、規則性や傾向性を見つけ出し、生活に生かしていくことは極めて重要である。しかし、現在のカリキュラムにおいて、統計学習に関しては改善の余地が多い。

私は、陸上競技短距離走に10年間力を注いできた。私自身の経験を踏まえると、データ解析から導かれた知識をトレーニングに活かしていく重要性を強く感じている。

こうした背景より、表・グラフの傾向を知り、その特性をつかみ、これを利用すること、いわゆる適応判断の力を子どもたちが伸ばす授業を提案したい。

100m走を速く走るためにはどうすればよいだろうか。この問いに対して、たいていの人は、100mを速く走るには、ピッチを速くし、ストライドを長くすればよいと考える。本当にその通りなのだろうか。また、ピッチを速くすることとストライドを長くすることは同時に行うことは、可能なのだろうか。経験的、感覚的に判断する状態から、いくつかのデータに基づく判断を行えること、さらにデータに基づく適切な判断を踏まえ、実際に100mを走る場面に活かそうという姿勢を育むことが、この授業で培いたいことがらである。

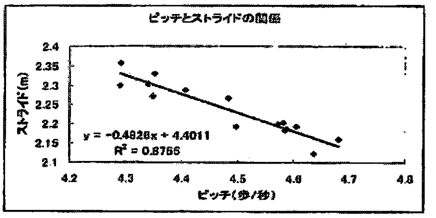




ピッチと100走のタイム、ストライドと100m走のタイムは相関係数の値が思った以上に低い。右の散布図と相関係数は、男子100m走のものである。

「あれっ？」「どういうこと？」というデータからの読み取りとの出会いや驚きが、生徒の学習意欲を高める。100mを速く走るために、ピッチとストライドをこうしたら速くなるということはいえない。なぜなら、どのくらいの速さで走ることができる人か、また、脚の長さなど身体的特徴により、自分に合う

ピッチとストライドを決め、100mの各区間で変化させるのが最も理想的なためである。実際、ピッチとストライドの散布図と相関係数（男子100m走）は右のようになる。



相関係数は0.8755であり、ピッチとストライドにはかなりの相関がみられる。データの傾向と特性を読むことより、ピッチとストライドのバランスが重要であることに気づかせたい。

3－2：授業のねらい

・データおよびそのグラフから、意図に応じた傾向や特性の読み取りができる。
・100mを速く走るためにはどうしたらよいかについて、ピッチとストライドのバランスの大切さを洞察できる。また、ピッチと100走のタイム、ストライドと100mのタイム、ピッチとストライドとの関係の類似性、相違点を分類できる。
・線形回帰直線、相関係数を知り、相関関係を（コンピュータを介して）調べることができる。
・データを解析することや統計の考えが、日常生活に関係していることを知る。

3－3：授業展開の概要

Ⅰ：「100m走を速く走る」とはどういうことかの意識を高める
身体のある部分に焦点をあてた動作分析を知ることにより、「100mを速く走る」ことを考える

○スーパー陸上男子100mの映像を見せる。
○「100mを速く走る」にはどうしたらよいかについて、各自が考える。
その考えを発表し、議論しあう。
○授業者　伊藤の100m走の様子（秋季大会,10/16,100m走の映像）から、「100m走を速く走る」ことを考える。
動作解析の説明と共に、次の観点に基づいた分析を行う。
・スタートの角度
・膝の角度変化
・速度と右膝角度変化との関連

Ⅱ：Voyage200を用いた散布図の作成とその散布図を読む
ピッチと100m走のタイム，ストライドと100m走のタイムとの関連をより正確に読み込む

○100m走におけるピッチやストライドに注目させる。
○ピッチと記録の相関関係をvoyage200を使って調べる。散布図より読み取れる傾向をまとめる。

Ⅲ：エクセルを用いて散布図、回帰直線、相関係数を作成する
　ピッチとストライドの確実な関係性に、相関係数の値などから迫る

○Voyage200で行った散布図や相関係数を表示することが、一般的な表計算ソフト・エクセルでできることを知らせる。また、ピッチとストライドの散布図、線形回帰曲線、相関係数を生徒と一緒にエクセルで求める。
○相関係数の値と「相関の有無」との関係について、具体例を通した話題提供をする。
○相関係数を確認し、相関関係を判断させる。
○結局、ピッチとストライドをどうすれば100mが速く走れるのか考えさせる。

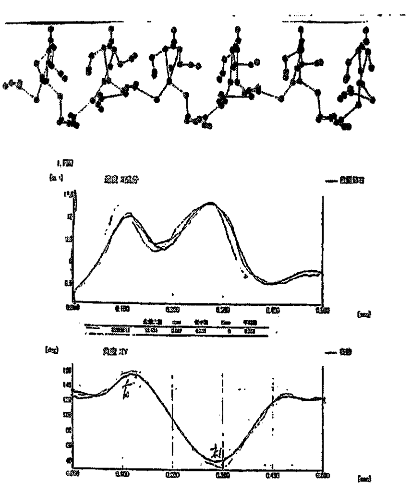
3－4：授業の実際　－特徴的な生徒の動きから－

「100mを速く走るにはどうすればよいか」という問いかけに対して、生徒は当初、次のような考えを挙げていた。

〈生徒A〉
- 大股で足をはやく動かす
- 無駄な動きをなくす
- 自分より速い人と一緒に走る
- 地面をしっかりとらえられるような靴（スパイクなど）を履く
- 空気抵抗をなくす（人が走ると背後に空気の渦が発生し妨げになるので、何かはわからないがそれをなくす服を着るとか）

〈生徒B〉
- 足を速く動かすよりも一歩一歩の幅を大きくする
- 前半から後半までのペースを保つようにする
- スタート時は体を前に傾けて、しだいにおこしていく。

〈生徒A〉と〈生徒B〉に代表されるように、ピッチを速くすること、ストライドを大きくとることについて、かなりの生徒が「100mを速く走る」ための要素として掲げていた。また、「自分より速い人と一緒に走る」やスタート時の前傾の姿勢の持ち方などを言及する生徒も多かった。ピッチ、ストライド、スタート時の前傾の姿勢、その他の要因（他者や物など）について、それぞれ予想を議論させたのち、授業者の100走の映像やスーパー陸上男子100m走の映像を何回か視聴してもらい、動作解析の話題提供を行った。



動作解析については、静岡大学　伊藤宏先生の指導のもと、作成して頂いた授業者自身の100m走のデータを用いた。私自身の100m走における糸人間、ある時間帯の速度、さらに右膝の角度をグラフ化したものは右の通りである。糸人間とは、全身のうち21箇所に

印をつけ、コンピュータ上でその点の位置を２次元の座標で次々と表していくものである。画像の変化と共に動く、座標の移動を通して、ある時間帯の速度や右膝の角度などをグラフ化することができる。

右の糸人間やグラフは、生徒が活用したものであるが、糸人間にみられる動きとグラフ上で特徴のある地点とを対比しようとする動きが強くみられる。

糸人間、速度そして右膝の角度のグラフをもとに、生徒たちは次のような意見を掲げる。

〈生徒C〉

・左足と右足でいれかわるときに速度が遅くなっている。
・ひざの角度が小さくなるほど、スピードがあがる。

〈生徒D〉

・次への第一歩が勢いがついているため、速度があがっている。
・ひざの角度が小さくなる程スピードが上昇

〈生徒C〉と〈生徒D〉とも、膝の角度と速度との関連性を指摘している。
また、授業者の予想を超えた意見としては、次のものがあった。

ア．右足が地面についたとき、離れるときに、膝の角度は一番大きくなる
イ．膝の角度は180度になることはない
ウ．右足の角度が大きくなっているときに減速している。これは、右足が地面に着いてブレーキになっているから。

男子100m走で様々な記録を打ち立てたカール・ルイスの走りでは、膝を完全に伸ばした動作を行うことがなく、軽く膝を曲げた状態で地面を蹴っていく行為が行われるという。カール・ルイスと同じように、著名な男子100m走の選手においても、100mを疾走するときに、完全に膝が伸びることがなく、軽く膝が曲がった状態で進行していく。こうした著名な選手の動きを洞察させるようなア〜ウの意見が挙がり、授業者として大変驚きがあった。改めて、生徒の発想の柔軟さを意識した瞬間でもあった。

Voyage200やエクセルを用いて、ピッチと100m走のタイム、ストライドと100m走のタイム、ピッチとストライドとの関係を表す散布図の作成とその散布図を読む段階では、次のような生徒の意見が出された。

〈生徒D〉

高い相関があることはわかったが論理が未だによくわからない。

ピッチやストライドが速さに関係あるわけじゃなくて、ピッチとストライドが関係しているってことは、まあ、自分にあった走り方をしろってことかな。

〈生徒E〉

ストライドが長いほど、ピッチは遅くなり
ストライドが短いほど、ピッチは早くなる。
↓
足の長い人は足を戻すのに時間がかかるため、ピッチが遅く、足の短い人は足の長さをカバーするためピッチが早い。
結論：ストライドが長く、ピッチが早ければ速く走れる

〈生徒F〉

ピッチとストライドには大きな相関があることはわかったが、結局タイムは関係ないんだと思った。コンピュータの中でどんな計算をしているのだろうか。でも、先生の授業はとても走るのに参考になりました。数学を通して、ストライドを小さくして走っているなら、ピッチを

早めれば速く走れるし、ストライドが大きいなら、できるだけ早くすればいいんだなと思いました。

〈生徒D〉の「自分にあった走り方をしろってことかな」や〈生徒F〉の「数学を通して、ストライドを小さくして走っているなら、ピッチを早めれば速く走れるし」などの意見に代表されるように、ピッチとストライドとの関係、さらに速く走るためにはどうすればよいのかの考えが徐々に形成されていった。一方、データの傾向をつかむことが蓋然的であるゆえの難しさを感じていた生徒もみられた。

3－5：今後に向けて

体育と数学を結びつけた統計教育の提案であったが、あまりにも専門的なデータ解析を、陸上を専門としていない生徒に噛み砕いて教えることに難しさはあった。しかし、日常生活が数学に関係していることや、グラフからデータの傾向とその特性を読み、それを判断に活かしていく学習の愉しさは強く見いだされた。今回の授業実践のような具体例をできる限り多く蓄積していきたい。 〈伊藤藍〉

4．Cabriを用いて図形をかく，Cabriを用いて図形の問題解決を行う学習の実践

4－1．授業実践に向けた題材観

動的幾何ソフトCabri Geometry II Plusを用いると、描いた図形を自由に動かしたり、回転させたり、拡大縮小させたりすることができる。また、図形を移動させた軌跡を描いたり、線分で囲んだ図形の面積などの値を瞬時に計算させることができる。紙と鉛筆では瞬時にできない操作を、動的幾何ソフトは可能にする。それゆえ、紙と鉛筆での図形学習では得られなかった探求活動が行うことができる。

その一方、授業者として実際にコンピュータを活用することは、予想以上に乗り越えるべき課題がある。コンピュータを効果的に活用している熟練の先生方は、様々な技を駆使した授業を展開している。例えば、コンピュータ上での生徒の探求活動の折々に、何らかの形で教師が働きかけている。その働きかけの場所が絶妙なところにみられる。様々な機能をもち、自由度が高い図形ソフトを扱うようになればなるほど、生徒の活動は拡散しがちである。いかに制限を与え、焦点化した議論を行うかなど、乗り越えるべき課題がある。これらの解明に向けて、次の２種類の学習場面を設定した。

（１） Cabriの画面上で、与えられた条件を満たす図形をかき、今まで学んだ基本図形の作図との対比を行う学習

（２） Cabriを用いて図形のもつ性質を検証すると共に、図形のもつ性質の一般化に向けた探求を行う学習

（１）は作図とは何かを改めて問い直す学習活動であり、内省することである。（２）は図形のもつ性質を拡げたり、深めたりするために、Cabriを道具として活用することである。Voyage200の中にCabri Geometryの機能はあるが、これよりも視覚、操作双方に富むCabri Geometry II Plusが附属静岡中学校のコンピュータに搭載できたため、授業実践は教室でのシミュレーションとコンピュータ室での操作活動の併用により実施した。

4－2：2種類の授業のねらいと授業の概要

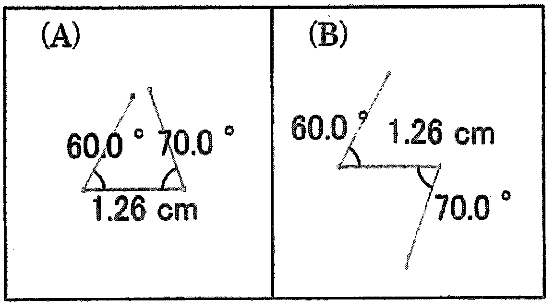
（1）与えられた条件を満たす図形をかき、今まで学んだ基本図形の作図との対比を行うこと

【授業のねらい】

手で行う基本図形の作図と、Cabriを用いた基本図形の作図との共通点，相違点を知ることを通し、「作図する」とはいかなることかを振り返り、「作図する」ことの意味をより確かなものにする。

また、作図技法の大切さを改めて味わうことができる。

小学校で三角定規、分度器、コンパスなどを使って図形をかくことを行っている。中学1年では作図の公法に基づく、垂直二等分線や角の二等分線の作図を行う。さらに、中学2年で作図の妥当性を、それまで正しいと認めた図形の性質の組み合わせ、すなわち推論を通して追求している。既に正しいと認めた規則を意識して図をかいているか否かという点に大きな違いがある。Cabriを用いてコンピュータ画面上に図をかくことを通し、何が使える規則なのか、何が正しいと認めた規則なのかを強く意識づけることができる。



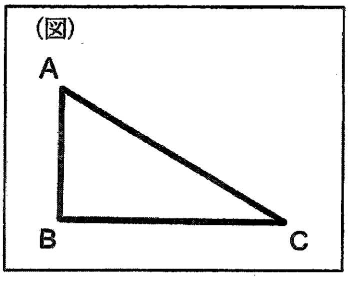
例えば、辺を回転させて三角形を作図しようとすると、(A) や (B) のような失敗が起こることが予想される。コンピュータでは、人が意図したものを予測して図形をかくことがなく、人からの指示の順序を踏まえ、指令したとおりに図形をえがく。その過程の中で、「どうすればうまくいくのか」と「何を、どのような順序で使えばよいのか」という対話が、コンピュータと生徒、生徒間、生徒と教師の間で生まれることが期待できる。

【授業展開の概要】

① 事前に右図の、定規、コンパス、分度器を用いた手でかく作図法を3パターン以上考え、実際に紙に作図してもらう。

(AB＝2㎝，AC＝4㎝，∠A＝60° になっている)

② Cabri GeometryⅡPlusで①で考えた作図法と同様な作図を行う。ただし分度器を使った図をかく操作は、辺を分度器で測った角度の分だけ回転させることとする。



③ うまく作図できた場合は、紙に描いたときに使った道具の代わりに、Cabri GeometryⅡPlusのどの機能を使ったかワークシートに記入し、うまく作図できなかったもしくは途中で何か困ったことが起きた場合は、そのことを記入する。

⑤ 図の三角形を2枚使うときどのような図形ができるか考える。

例：二等辺三角形、正三角形、長方形、平行四辺形

⑥ 以後3枚使った場合、4枚使った場合と拡張していく。

（2）図形のもつ性質の一般化に向けた探求活動を，Cabriを活用して行うこと

【授業のねらい】

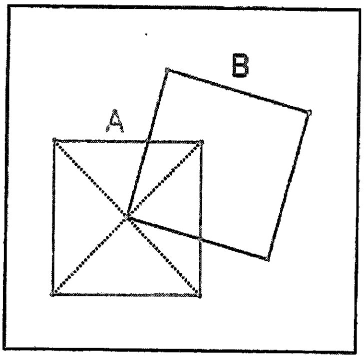
条件を満たすように、折り紙やコンピュータを操作し、図形を動的にとらえることを促しながら、動的にとらえた過程に中に潜む図形の性質を発見すると共に、その性質の一般化を洞察していく。

図形のもつ性質の一般化に向けて、Cabriを有効に活用しようとする姿勢を高める。

【授業展開の概要】

〔1時間目〕

① 合同な正方形A、Bがあり、正方形Aの対角線の交点と、正方形Bの1つの頂点をあわせ（右図）、そこを中心として正方形Bを回転させたときに、2つの正方形が重なっている部分についてどんなことがいえるだろうか？ 折り紙で実際に動かしながら予想する。



② 予想したことを発表する。

③ クラスで挙がった予想について、それぞれが正しいかどうか考える。

④ わかったことを発表する。

⑤ ワークシートにまとめる。

〔2時間目〕

① 前時にでてきた予想の正否をCabri Geometry II Plusを使って確かめる。

② Cabri Geometry II Plusを操作していて何か気付いたことがあったら発表する。

③ ②で挙がったことに対して考える。

④ 今日の問題を発展させる。（例：正五角形・正六角形だったらどうなるか？）

⑤ わかったこと・予想されることをワークシートにまとめる。

4－3：授業の実際と今後に向けて

（1）与えられた条件を満たす図形をかき、今まで学んだ基本図形の作図との対比を行うこと

紙の上での直角三角形の基本作図については、二辺夾角，一般両端角などの三角形の決定条件を用いて行うものが多かった。等角の作図については、作図の公法を踏まえたものと、そうではなく図をかくことで代替えしているものの双方がいた。

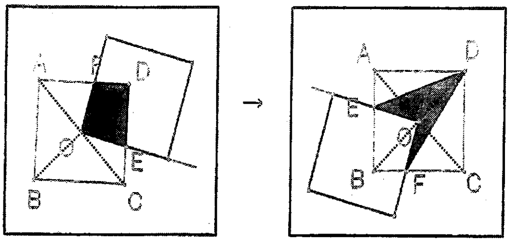
紙の上での直角三角形の基本作図を確認した後、Cabri Geometry II Plusを用いた作図に入ったが、授業者が想定した以上に、Cabriでの作図の作業は生徒にとって難しいものであった。その要因として、次の2点が挙げられる。

・いったん画面上での操作が始まると、授業者からの声がなかなか通らなくなること

・偏角として回転が表示されることにとまどいがみられたこと

一方、直角三角形ABCを複数組み合わせて図形を作成することについては、操作にかなり慣れてきて、長方形、平行四辺形、正三角形など次々に画面上につくっていった。また、座標平面表示にして、次々と図形をえがいていく生徒も現れた。

（2）図形のもつ性質の一般化に向けた探求活動を，Cabriを活用して行うこと



Cabriを用いると、右の図のように一般化を促す学習活動が生じる。右図の場合には、色のついた四角形の面積は共に等しい。例えば、右側の図では、底辺が対角線の半分、高さ共通とみると色のついた四角形の面積は、四角形BEOFと同じになる。折り紙の操作だけでは見抜きにくい「変われど変わらないものがある」という気づきと、その確証に向けた手がかりがCabriを用いたシミュレーションで促されていた。

また、図を動かすことにより、色のついた四角形の周の長さも同じになるか、四角形の周の長さが異なるとすればいつ最大になるか、△OEFはいつも直角三角形になるか、などの問いも生じていた。こうした問いに対して、次のような感想が生徒から挙げられている。

・面積はどの図形でも常に等しいと思っていたが、コンピュータに予想を覆らせられた。
・周囲の長さが異なることの証明は、紙と鉛筆だと大変だけど、コンピュータを使えばすぐわかる。新たな発見だとおもう。
・自分達の証明とコンピュータの証明は全然違った。

プロジェクタを活用した図形を動かすというシミュレーション、折り紙やコンピュータでの操作を通して「動的に図形をみる」ことは促されたといえる。一方、コンピュータ室での授業で顕著に生じたことは２人１組での操作に伴う「コンピュータを使う⇒相手の顔が見えない⇒やりとり（人との会話）が減る」という連鎖である。「議論がなくて少しつまらなかった」や「さっぱりしなかった」という生徒の声に代表される。コンピュータを２人１組で活用する際に、どのように教師が関わるのかという課題が改めて浮き上がってきている。今後の実践を通して解明したい。〈松原康晃〉

５．CASを活用した方程式の学習の実践に向けて

５－１．算術的な解法と代数的な解法との接続を図ること

中学校１年生の数学教科書の中に、次の例題がある。

「画用紙を何人かの生徒に分けるのに、１人に３枚ずつ分けると５枚足りません。
　また、１人に２枚ずつ分けると10枚余ります。
　生徒の人数と画用紙の枚数を求めなさい。」（中学校数学１，学校図書，2003，p.83）

過不足算であり、(人数)＝((不足分)＋(余り分))／(分けた枚数の差)を計算することにより、生徒の人数や画用紙の枚数を求めることができる。

実際、この問題の場合、生徒の人数は(5＋10)／(3－2)＝15（人)．画用紙の枚数は3×15－5＝40（枚）と求めることができる。算術的な解法においては、面積図を用いて鶴亀算を解くように、工夫した図表現を用いて(人数)＝((不足分)＋(余り分))／(分けた枚数の差)を導き、答えを求めることもある。

一方、画用紙の枚数に注目して１次方程式を立てれば、生徒の人数をx人として、
3x－5＝2x＋10．となる。この方程式をxについて解くと、x＝15(人)，画用紙の枚数は、
3×15－5＝40(枚)となる。また、生徒の人数をx人、画用紙の枚数をy枚とおき、連立方程式

を解くことによって答えを得ることもできる。

中学校の方程式の学習指導では、文章題を代数的な解法によって解くことが行われる。代数的な解法とは、数学的に正しいと認めた変形規則に基づき、同値変形によって答えを導くことである。しかし、方程式を学びはじめた生徒たちにとって、算術的な解法から代数的な解法へと切り替えることは容易ではない。算術的な解法とは一見すると異なる思考、すなわち代数的思考が存在するからである。「今までの方法で解けるのに、なぜあたりまえな等式の性質を持ち出すの」という思いを打破する部分にこそ、代数的思考の必要性が浮かび上がる。

また、両角（2005）は「数式処理電卓などのCAS（Computer Algebra System）を活用した代数学習により、学習者にとって促進される学習活動が、先行研究から次々と解明されている」と述べる。学習者に代数的思考の存在を意識づけるために、CASを効果的に活用した学習場面を設定することが重要である。また、CASを活用することで、方程式を解析的にとらえる、方程式を一つの対象とみる、文字式や方程式を変形するための規則を意識する、一般化を促す、文字式や方程式の構造的な特徴を見いだすといった学習活動が期待できる。

本節では、CASを活用した方程式の学習の実践に向けて、代数的思考を促す学習活動とその典型例の考察を行うことを目的とする。その方法として、数学史にみられる代数的思考の言明から、代数的思考の要素を抽出する。さらに、方程式をCASを用いて解いた過程を振り返り、やや高い立場から問題を見直すことができる事例を挙げる。

５－２：代数的思考の３つの要素
－３つの要素を踏まえた方程式の学習指導場面に向けて－

数学史家であるマホーニィ（1982）の言明より、代数的思考には次の３つの要素が存在する。

① 記号法を使用すること

② 数学的関係を意識し、それを取り扱うこと

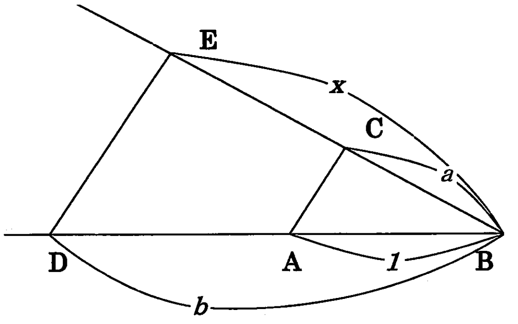
③ 存在論的掛かり合いから自由であること

マホーニィによれば、16および17世紀に数学の世界で活躍したヴィエト、デカルトらの思考やその変遷の中に、①～③の要素が見いだせるという。例えば、「① 記号法を使用すること」では、表現方法の発達だけでなく、数と同じように記号そのものに対しても加減乗除の演算を施せることが最大の利点としてあげられる。方法として扱っていたことがらの対象化であり、略記するだけの状態よりも抽象化がなされている。

「② 数学的関係を意識し、それを取り扱うこと」については、ヴィエトやデカルトが行った記号化により、方程式が一般的に表されるようになる。ある特定な場合の方程式の解を求めるだけでなく、方程式の係数を未知数や変数としてとらえることにより、方程式の解と係数の関係（すなわち、解の公式）を調べることができる。また、方程式の係数と方程式の解の個数との関係を調べることが可能となる。つまり、「方程式の構造の研究である」（マホーニィ, 1982, p.159）という、抽象のはしごを昇った思考が可能となる。「① 記号法を使用すること」を通して、要素そのものから要素間の関係といった、数学的関係を考察できるようになる。

マホーニィ（1982）の言明において特徴的なのは「③ 存在論的掛かり合いから自由であること」である。存在論的掛り合いとは、例えば、式は必ず幾何学的な解釈が与えられること、あるいは数は現実的に解釈可能であることを指す。17世紀以前では、方程式を図形で解釈し、図を用いて解法を示すということが行われる。図に依存した形で方程式を解く際に、問題とな

るのは４次以上の次数をもつ式の解釈である。例えば、線分と線分をかけると面積であり、線分と面積をかけると体積であるという解釈に基づくと、４次以上の解釈は非常に困難になる。長さ、面積、体積という文脈からの自由であること、すなわち存在論的掛かり合いから自由であることが困難である。デカルトによって次のように、三角形の相似をもとにこの問題を解決する。線分はいくら線分をかけても、やはり線分になるという解釈である。



【デカルトによる乗法abの解釈】
AC//DEとなる線分をひき
AB=1、BC=a、BD=bとして、
BE=xとする。
△ABC∽△DBEにより、
1：b=a：x
∴　x=ab

デカルトによる乗法abの解釈を通して、線分は自由に加減乗除が可能な量、すなわちx^4、x^5などの４次以上の式についても自由に考えることが可能になる。５次以上の実係数方程式を代数的に解くことができないことを、ガロアが拡大体の考えから説明したように、方程式を解くことについていくつかの局面で「存在論的掛かり合いが自由であること」が行われる。

５−３．CASを活用した方程式の学習場面とその扱い

（１）「ダイヤモンドの分配の問題」とその題材観

「ダイヤモンドの分配の問題」とは、次の問題である。（平山，1966，p.177）

「むかし、インドのある王様が王子達にダイヤモンドを分けてやるときに、次のように命じた。

『まず、はじめの人は１個とその残りの１／７を取れ。
つぎの人は、２個とその残りの１／７を取れ。
３人目の人は、３個とその残りの１／７を取れ。
このような分配（ｋ人目の人は、ｋ個とその残りの１／７を取る）を以下も同様に続けよ。』

王子達はいわれたままにダイヤモンドを取ったが、あとで調べてみたら、王子達は、同じ個数だけダイヤモンドを取ることができた。
いったい、ダイヤモンドは何個あって、王子は何人いたか。」

「ダイヤモンドの分配の問題」は一次方程式を用いて解くことができる。

〈１次方程式による解法〉ダイヤモンドの個数をx個とし、次の関係に注目して１次方程式を立てて求める。

（はじめの人のダイヤの個数）＝（次の人のダイヤの個数）

$$1+(x-1)/7=2+(x-2-(1+(x-1)/7))/7$$

この他、次のような解法が考えられる。

〈Guess and Checkによる解法１〉

ダイヤモンドの個数を具体的な数字で試してみて、上手くいくまで調べる。

仮に43個として、初めの人は$1+(42/7)=7$, 次の人は$2+(34/7)\neq 7$で不適

36個として、初めの人は$1+(35/7)=6$, 次の人は$2+(28/7)=6$など

〈Guess and Checkによる解法２〉

王子の人数を具体的な数字で試してみて、上手くいくまで調べる。

仮に５人として、５人目は５個で、みな同じだけ持っているので、ダイヤモンドの個数は$5^2=25$. 初めの人は$1+(24/7)\neq 5$で不適　など

〈連立方程式による解法〉

ダイヤモンドの個数をｘ個、王子の人数をｐ人として、題意を満たすような連立方程式を立てて求める。

$x=p^2$　　（ダイヤモンドの個数）＝（王子の人数）×（１人当たりの個数）

$1+(x-1)/7=p$　　(初めの人の個数)＝(１人当たりの個数)

$2+(x-2-p)/7=p$　(次の人の個数)＝(１人当たりの個数)

「ダイヤモンドの分配の問題」は、解法の多様性のみならず、問題自体の一般化が可能なものである。実際、1／7という条件をを1／8、1／9、…としたり、逆に1／6、1／5、…としたりすることで、興味深い現象がみえる。方程式をCASを用いて解き、解いた過程を振り返り、やや高い立場から問題を見直すことであり、問題に潜む数理を読み解く段階である。

一次方程式を用いた解法で、7の部分を３ヶ所とも8、9、…、あるいは6、5、…と変化させる。Voyage200の「solve」の機能を使って方程式を解かせ、その解を比較していく。すると、必ず整数解が得られるのである。１／7を1／ａと考えるとaとxの間には、$x=(a-1)^2$という関係が見出せる。

方程式の学習の中には、マホーニィの指摘する「②　数学的関係を意識し、それを取り扱うこと」や「③　存在論的掛かり合いから自由であること」などの代数的思考が内在する。

「ダイヤモンドの分配の問題」を一般化させる学習活動を通して、学習者に思考過程を振り返るきっかけをつくらせたい。また、学習者がいかに内省の活動を行い、抽象的な思考活動に転移していくのかを、特徴的な生徒の学習活動を通して解明したい。

〈伊藤和弘〉

６．まとめと今後の課題

本稿では、CASとしてのVoyage200に焦点をあて、Voyage200を活用した選択数学の実践から見いだされることを述べてきた。現在までの授業実践を通して、得られたことは次の通りである。

・「100m走を速く走るためにはどうすればよいか」という問いを追求した、適応判断力を高める統計学習では、学習者が当初抱いていた経験や感覚に基づく理由が、ストライド、ピッチ、100走のタイムの相互関係に注目して判断するという理由に移行していった。

その学習活動の中では、100走のVTRを視点を強く意識してみることや、糸人間による動作分析の様子、糸人間の動きと連動した速度や右膝の角度のグラフとの対比、

Voyage200やエクセルを用いた散布図や相関係数をえがき、その意味を考えることが有効にはたらいている。一方、散布図や相関係数の意味をとらえるためには、より多くの事例に基づく学習場が必要である。

・「Cabriの画面上で与えられた条件件を満たす基本図形を作図すること」については、作図の方法やその順序を学習者に強く意識させる上では効果的であったが、Cabriの操作に慣れることの必要さやコンピュータ室での教師の関わり方について課題が生じた。

「Cabriを用いて、図形のもつ性質の一般化に向けた探求を行うこと」については、折り紙を用いた操作とCabriを用いた操作の鑑賞と実際の操作を併用することにより、動的に図形をとらえることが促された。動的に図形を捉えることで、特殊な図形で考えたり、性質の一般化を促す意見が生じた。その一方、通常の数学授業のような議論をいかにおこすか、授業者やアシスタントティーチャーがどのような役割を果たすかという点で課題が生じた。

今回の附属静岡中学校での選択数学の授業実践の試みは、附属学校と大学との連携、数学教育研究を学生と教官が共に深めていくことの２つの意図もある。この意図に関して、今後への課題として次の３点を挙げる。

① 大学院生や学部４年生がどのように、数学教師としての専門的力量を形成していくのか、さらにCASを活用する能力を高めていくのかについて、実証的に明らかにする必要がある。また、数学教師としての専門的力量形成に関わる過程を踏まえた、学部４年段階からの指導が必要となる。

② 熟練の附属学校の先生方、若手の先生、大学院生や学部４年生を交えた効果的な数学の授業研究会のあり方について検討する必要がある。メンターとしての熟練の附属学校の先生方の効果を実証的に明らかにする必要がある。

③ 選択数学での授業実践で培ったことがらを、通常の数学授業で応用する試みを増やすと共に、CASを活用した数学授業の事例をさらに検討する必要がある。

〈両角達男・清澤毅光〉

【附記】本研究は、平成17年度　学部長裁量経費（附属連携）と科学教育研究費補助金「基盤研究（C）CASを活用した代数カリキュラムと教授単元の開発に関する研究」（課題番号　17530656）の交付を受けて行われた研究成果の一部である。

【参考文献】

平山諦（1986）．東西数学物語．恒星社

マイケル・S・マホーニイ著，佐々木力編訳（1982）．歴史における数学．勁草書房

両角達男（2005）．CASを活用した代数的活動に関する基礎的研究．第38回数学教育論文発表会論文集．日本数学教育学会．pp.223-228

両角達男（2006）．学校代数におけるCASを活用した代数的活動　ー代数的活動をとらえる枠組みの構築に向けてー．静岡大学教育学部研究報告（教科教育学篇）第37号．pp.29-47

木村捨雄編（2005）．教育実践力を高める教師のための統計教育と統計基礎講座，進む情報化社会の統計リテラシー．東洋館出版社

小林寛道（2001）．ランニングパフォーマンスを高めるスポーツ動作の創造．杏林書院
国立教育政策研究所翻訳（2003）．PISA2003年調査 評価の枠組み－OECD生徒の学習到達度調査－．ぎょうせい
数学教育学研究会編（2000）．新版　数学教育の理論と実際　〈中学校・高校〉．聖文新社
静岡県教育委員会（2005）．静岡県版カリキュラム算数・数学科
http://www.shizuoka-c.ed.jp/spc/su/index.htm
飯島康之編（1999）．図形が動くと授業が変わる　－平面図形の探求学習事例集－．明治図書
根本博（2004）．数学教育の挑戦．東洋館出版社
公庄庸三（2002）．中高一貫数学テキスト．Geometry Ⅰ ほか．東京書籍
日本カリキュラム学会（2001）．現代カリキュラム事典．ぎょうせい