

静的ねじりせん断負荷を受ける円板状き裂群の相互干渉問題

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2015-05-01 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 上田, 整 メールアドレス: 所属:
URL	https://doi.org/10.14945/00008376

静的ねじりせん断負荷を受ける円板状き裂群の相互干渉問題

Static Interaction among Penny-Shaped Cracks in an Infinite Solid by Torsional Load

上 田 整

Sei UEDA

(昭和61年10月11日受理)

Abstract

This paper deals with the static interaction among penny-shaped cracks in an infinite solid by torsional load. Hankel transform is used to reduce the mixed boundary value problems to a set of dual integral equations. The solution is expressed in terms of a Fredholm integral equation of the second kind. The static stress intensity factor is determined and its dependence on the geometry parameter is discussed.

1. 緒 言

機械構造物、特に大規模構造物において、接合時における溶接などの不完全部分あるいは材料中に初期欠陥が存在した場合、荷重を支える断面全体が弾性限に達する前の低応力で破壊し、重大な破損事故を誘発する可能性がある。これは、初期欠陥すなわちき裂の先端近傍の応力状態が特異となるためであり、この特異応力場の強さを示すものとして応力拡大係数の概念が提唱された。

以後、種類の形状のき裂に関する応力拡大係数の理論値の解析が活発に行なわれており設計資料上重要な役割を果たしている。また、2個以上のき裂が近接する場合には、き裂相互の干渉効果が各々の応力拡大係数に影響を及ぼすことが予想される。このため、2次元き裂の相互干渉については多くの研究が行なわれている⁽¹⁾。3次元き裂に関する研究としては、渡辺ら⁽²⁾が、円柱中に一列に存在する無限個の円状き裂の引っ張り問題に関して、また田中ら⁽³⁾は、異種材料中の円柱内に平行に存在する無限個の円板状き裂の引っ張り問題を理論解析している。さらに、著者ら⁽⁴⁾は、3層複合材の接合面に存在する2個の円板状き裂の相互干渉問題を理論解析し、応力拡大係数におよぼす物質特性および幾何学的形状の影響を明らかにした。しかしながら、き裂の個数による応力拡大係数への影響を系統的に研究した報告は今までのところ見当たらない。

そこで本報では、応力拡大係数におよぼす3次元き裂の相互干渉効果の研究のため、無限体中に平行に存在する2, 3および無限個の円板状き裂のねじりによる相互干渉問題を取り上げ、理論的に解析を行ない、応力拡大係数におよぼすき裂間隔比およびき裂の個数の影響について

グラフに示し明らかにした。

解法は、平衡方程式にハンケル変換法を施すことによって得られる解を2領域において与えられる境界条件に適用し、混合境界値問題を(連立)双積分方程式に帰着し、得られた(連立)双積分方程式を、第二種フレドホルム型積分方程式に導いて解く方法^[5]によった。このとき、第二種フレドホルム型積分方程式の積分核の半無限区間積分を解析的に評価することにより計算時間を著しく短縮した。第二種フレドホルム型積分方程式をガウスの数値分法^[6]を用いて数値計算した。

2. 問題 の 設 定

無限体中に平行に間隔 $2h$ で並んで存在する N 個の半径を a とする円板状き裂群を考える。図1に示すように、き裂が偶数の場合は各々のき裂が $0 < r < a$, $z = \pm(2n-1)h$ ($n=1, 2, 3, \dots$) の領域に存在するように円柱座標系 (r, θ, z) を設定する。またき裂が奇数の場合は各々のき裂が $0 < r < a$, $z = \pm(2n-1)h$ ($n=1, 2, 3, \dots$) の領域に存在するように円柱座標系 (r', θ', z') を設定する。無限体の剛性率 μ を、密度 ρ とする。各々のき裂面にねじりせん断負荷 $\tau_0(r/a)$ が作用する問題を解析する。このとき無限体の単位位長さ当たりのねじれ角を ω とすれば、 τ_0 は

$$\tau_0 = \mu \omega a \quad (1)$$

である。

$z=0$ 面における変位および応力の対称性を考慮すれば、 $z>0$ の領域のみを解析すれば十分である。ねじり変形問題の場合、変位場は、

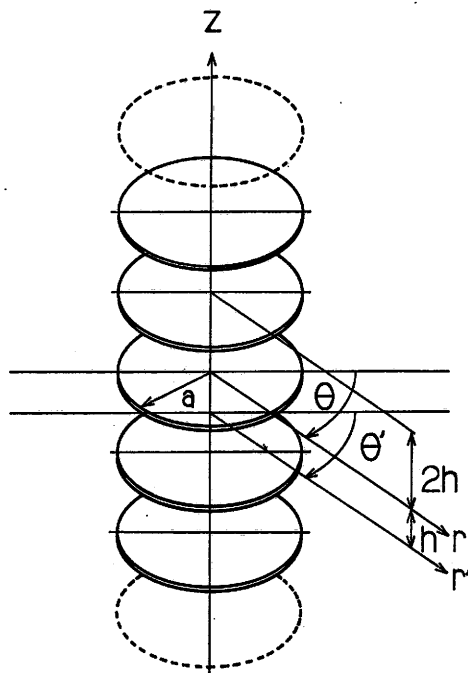


図1 円柱座標系

$$U_{rj} = U_{zj} = 0, \quad U_{\theta j} = U_{\theta j}(r, z) \quad (2)$$

ここに、添字 j は相当する弾性場を示すものとする。応力場は、

$$\left. \begin{aligned} \tau_{r\theta j} &= \mu(\partial U_{\theta j} / \partial r - U_{\theta j} / r) \\ \tau_{z\theta j} &= \mu(\partial U_{\theta j} / \partial z) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

変位 $U_{\theta j}$ に関する支配方程式を求めると、

$$\frac{\partial^2 U_{\theta j}}{\partial r^2} + \frac{\partial U_{\theta j}}{r \partial r} - \frac{U_{\theta j}}{r^2} + \frac{\partial^2 U_{\theta j}}{\partial z^2} = 0 \quad (4)$$

本報では、き裂数 $N=2, 3$ および ∞ 個の3種類について検討する。境界条件はそれぞれについて次式で与えられる。

$N=2$ の場合

$$\left. \begin{aligned} U_{\theta 1}(r, h) &= U_{\theta 2}(r, h) && ; r > a \\ \tau_{z\theta 1}(r, h) &= \tau_{z\theta 2}(r, h) = -\tau_0(r/a) && ; 0 < r < a \\ U_{\theta 1}(r, 0) &= 0 && ; r > 0 \\ \tau_{z\theta 1}(r, h) &= \tau_{z\theta 2}(r, h) && ; r > 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$N=3$ の場合

$$\left. \begin{aligned} U_{\theta 1}(r, 0) &= 0 && ; r > a \\ \tau_{z\theta 1}(r, 0) &= -\tau_0(r/a) && ; 0 < r < a \\ U_{\theta 1}(r, 2h) &= U_{\theta 2}(r, 2h) && ; r < r < a \\ \tau_{z\theta 1}(r, 2h) &= \tau_{z\theta 2}(r, 2h) = -\tau_0(r/a) && ; r > 0 \\ \tau_{z\theta 1}(r, 2h) &= \tau_{z\theta 2}(r, 2h) && ; r > 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$N=\infty$ の場合

$$\left. \begin{aligned} U_{\theta 1}(r, 0) &= 0 && ; r > a \\ \tau_{z\theta 1}(r, 0) &= -\tau_0(r/a) && ; 0 < r < a \\ U_{\theta 1}(r, h) &= 0 && ; r > 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

3. 解 析

ハンケル変換法により式(4)の解は

$$U_{\theta j}(r, z) = \int_0^\infty [A_j(s) \exp(-sz) + B_j(s) \exp(sz)] J_1(rs) ds \quad (8)$$

であり、応力成分は

$$\tau_{z\theta j}(r, z) = -\mu \int_0^\infty s [A_j(s) \exp(-sz) - B_j(s) \exp(sz)] J_1(rs) ds \quad (9)$$

ここに、 A_j, B_j は境界条件より決定される未知数であり、 $J_1(\)$ は一次のベッセル関数である。

3.1 き裂数 $N=2$ の場合

$N=2$ の場合には境界条件の式(5)より、次の未知関数 $C_2(s, h)$ に関する双積分方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty s [1 + K_2(s, h)] C_2(s, h) J_1(rs) ds &= \tau_0(r/a) && ; 0 < r < a \\ \int_0^\infty C_2(s, h) J_1(rs) ds &= 0 && ; r > a \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ここに, $K_2(s, h) = \exp(-2sh)$

$$C_2(s, h) = \mu \exp(sh) A_1$$

式(10)を満足する $C_2(s, h)$ は次のように決まる⁽⁵⁾。

$$C_2(s, h) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \tau_0 a^{\frac{5}{2}} s^{\frac{1}{2}} \int_0^1 \sqrt{u} \phi_2(u, h_0) J_{\frac{3}{2}}(sau) du \quad (11)$$

ここで, $h_0 = h/a$, $J_{3/2}(\)$ は $3/2$ 次のベッセル関数である。また, $\phi_2(u, h_0)$ は次の第二種フレドホルム型積分方程式の解である。

$$\phi_2(u, h_0) + \int_0^1 \phi_2(v, h_0) M_2(u, v, h_0) dv = u^2 \quad (12)$$

ここに, $M_2(u, v, h_0)$ は積分核であり次式で与えられる。

$$M_2(u, v, h_0) = \sqrt{uv} \int_0^\infty \xi K_2(\xi/a, h/a) J_{\frac{3}{2}}(\xi u) J_{\frac{3}{2}}(\xi v) d\xi \quad (13)$$

式(13)の半無限区間積分は公式⁽⁷⁾を用いれば解析的に評価することができ, 結局次のように求められる。

$$M(u, v, h) = \frac{2}{\pi} \left[\frac{2h_0}{4uv} \log \left\{ \frac{(2h_0)^2 + (v-v)^2}{(2h_0)^2 + (u+v)^2} \right\} + \frac{(2h_0)\{(2h_0)^2 + u^2 - v^2\}}{\{(2h_0)^2 + (u+v)^2\}\{(2h_0)^2 + (u-v)^2\}} \right] \quad (14)$$

応力拡大係数 $K_{32}(h_0)$ は次のように定義される。

$$k_{32}(h_0) = \lim_{r \rightarrow a} \sqrt{2(r-a)} \tau_{\alpha\theta 1}(r, h) \quad (15)$$

従って, 式(11)を式(15)に代入すれば応力拡大係数 $K_{32}(h_0)$ が次のように求まる。

$$k_{32}(h_0) = 4\tau_0 \sqrt{a} \phi_2(1, h_0) / 3\pi \quad (16)$$

3.2 き裂数 $N = 3$ の場合

$N = 3$ の場合には, 境界条件の式(6)より, 次の未知関数間の関係式が求まる。

$$A_1 \exp(-2sh) - B_1 \exp(2sh) = A_2 \exp(-2sh) \quad (17)$$

式(17)を考慮し, さらに他の境界条件から二つの未知関数 $C_{3a}(s, h)$, $C_{3b}(s, h)$ に関する連立双積分方程式が得られる。添字 a は中央のき裂に対する弾性場を示し, 添字 b は外側のき裂に対する弾性場を示すものとする。

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty s \{ [1 + K_{11}(s, h)] C_{3a}(s, h) + K_{12}(s, h) C_{3b}(s, h) \} J_1(rs) ds &= \tau_0(r/a) & ; 0 < r < a \\ \int_0^\infty C_{3a}(s, h) J_1(rs) ds &= 0 & ; r > a \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty s [K_{21}(s, h) C_{3a}(s, h) + \{1 + K_{22}(s, h)\} C_{3b}(s, h)] J_1(rs) ds &= \tau_0(r/a) & ; 0 < r < a \\ \int_0^\infty C_{3b}(s, h) J_1(rs) ds &= 0 & ; r > a \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

ここに

$$\begin{aligned} K_{11}(s, h) &= 0, & K_{12}(s, h) &= 2\exp(-2sh) \\ K_{21}(s, h) &= 2\exp(-2sh), & K_{22}(s, h) &= \exp(-4sh) \\ C_{3a}(s, h) &= \mu(A_1 + B_1) \\ C_{3b}(s, h) &= -\mu B_1 \exp(2sh) \end{aligned}$$

式(18)(19)を満足する $C_{3a}(s, h)$, $C_{3b}(s, h)$ は次のように求まる。

$$C_{3a}(s, h) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \tau_0 a^{\frac{5}{2}} s^{\frac{1}{2}} \int_0^1 \sqrt{u} \phi_{3a}(u, h_0) J_{\frac{3}{2}}(sau) du \quad (20)$$

$$C_{3b}(s, h) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \tau_0 a^{\frac{5}{2}} s^{\frac{1}{2}} \int_0^1 \sqrt{u} \phi_{3b}(u, h_0) J_{\frac{3}{2}}(sau) du \quad (21)$$

式(20)(21)中の $\phi_{3a}(u, h_0)$, $\phi_{3b}(u, h_0)$ は次の連立第二種フレドホルム型積分方程式の解である。

$$\phi_{3a}(u, h_0) + \int_0^1 \phi_{3a}(v, h_0) M_{11}(u, v, h_0) dv + \int_0^1 \phi_{3b}(v, h_0) M_{12}(u, v, h_0) dv = u^2 \quad (22)$$

$$\phi_{3b}(u, h_0) + \int_0^1 \phi_{3a}(v, h_0) M_{21}(u, v, h_0) dv + \int_0^1 \phi_{3b}(v, h_0) M_{22}(u, v, h_0) dv = u^2 \quad (23)$$

ここに, $M_{mn}(u, v, h_0)$ は積分核であり次式で与えられる。

$$M_{mn}(u, v, h_0) = \sqrt{uv} \int_0^\infty \xi K_{mn}(\xi/a, h/a) J_{\frac{3}{2}}(\xi u) J_{\frac{3}{2}}(\xi v) d\xi \quad m, n=1, 2 \quad (24)$$

式(24)の半無限区間積分は式(14)の結果を用いて, 結局次のように求まる。

$$\begin{aligned} M_{11}(u, v, h_0) &= 0 \\ M_{12}(u, v, h_0) &= 2M_2(u, v, h_0) \\ M_{21}(u, v, h_0) &= M_2(u, v, h_0) \\ M_{22}(u, v, h_0) &= M_2(u, v, 2h_0) \end{aligned}$$

以下 3.1 節と同様にして応力拡大係数 $K_{33a}(h_0)$, $K_{33b}(h_0)$ が求められる。

3.3 き裂数 $N=\infty$ の場合

$N=\infty$ の場合は境界条件の式(7)より, 次の未知関数間の関係式が求まる。

$$B_1 = -A_1 \exp(-2sh) \quad (26)$$

次の未知関数 $C_\infty(s, h)$ に関する双積分方程式が得られる。 : $0 < r < a$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty s [1 + K_\infty(s, h)] C_\infty(s, h) J_1(rs) ds &= \tau_0(r/a) & ; 0 < r < a \\ \int_0^\infty C_\infty(s, h) J_1(rs) ds &= 0 & ; 0 > a \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

ここに, $K_\infty(s, h) = 2\exp(-2sh) / \{1 - \exp(-2sh)\}$

$$C_\infty(s, h) = -\mu [1 - \exp(-2sh)] A_1$$

以下同様にして第二種フレドホルム型積分方程式に導いて, 応力拡大係数 $K_{33\infty}(h_0)$ が求められる。

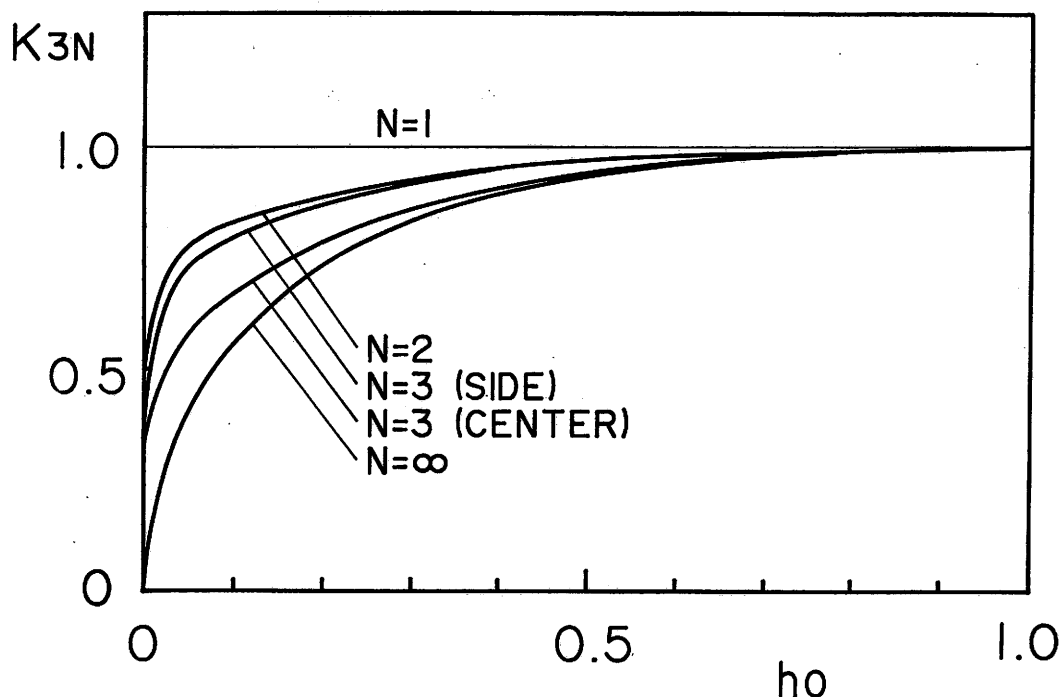


図2 静的応力拡大係数

4. 数値結果および考察

図2は無限体中に存在する1個の円板状き裂の静的ねじり負荷に対する $4\tau_0\sqrt{a/3\pi}$ で無次元化した各々の応力拡大係数におよぼすき裂間隔比 $h_0 = h/a$ の影響をき裂の個数をパラメータとして示したものである。き裂数の増大に伴い応力拡大係数は減少する傾向を示している。き裂間隔比の増大に伴い応力拡大係数は増大し、 $h_0 = 1.0$ でほぼ $K_{3N} \approx 1.0$ となり、 $h_0 \rightarrow \infty$ の時完全に $K_{3N} = 1.0$ となる。また、 $h_0 \rightarrow 0.0$ の時全てのき裂が同等であるとすれば、式(10)(18)(19)(27)などにおいて $h = 0.0$ を代入することにより、 $h_0 \rightarrow 0.0$ の時 $\tau_0 \rightarrow \tau_0/N$ の場合と考えられるので、 $K_{3N} \rightarrow 1.0/N$ になる事が推測される。従って、 $N=2$ の場合は $h_0 = 0.5$ 付近から急激に減少し $h_0 = 0.0$ で $K_{32} = 0.5$ になる。 $N=3$ の場合は、中央のき裂と外側のき裂では相互干渉効果の影響が異なっており、中央のき裂のほうは両側から干渉されるため干渉効果の影響が外側より著しい。 $h_0 = 0.0$ では $K_{33b} = 0.33$ になる。 $N=\infty$ の場合は、全てのき裂の両側に無限個のき裂が存在するため、相互干渉効果は最も著しく、 $h_0 = 0.0$ では $K_{3\infty} = 0.0$ になる。

終わりに、本研究にあたり懇切なご教示とご指導を賜った東北大学渥美光名誉教授に心より感謝いたします。また適切なご助言を頂きました静岡大学教育学部畑俊明教授、須見尚文教授ならびに東北大学工学部進藤裕英助教授に深く感謝いたします。

参 考 文 献

- [1] 石田, き裂の弾性解析と応力拡大係数, (昭51), 1, 培風館
- [2] K. Watanabe and A. Atsumi, Int. J. Engng Sci., Vol. 10, 159—171, (1972)
- [3] T. Tanaka and A. Atsumi, Letters in Applied and Engineering Sciences, Vol. 3, 279—294, (1975)
- [4] 上田, 他2名, 日本機械学論文集(A編), 50—453, 863—868, (昭59—5)
- [5] 渥美, 固体力学概論, (昭53), 214, コロナ社
- [6] 山内, 他2名, 電子計算機のための数値計算法 3, (昭47), 279, 培風館
- [7] H. Bateman, Tables of Integral Transforms Vol. 1, (1954), 159, McGRAW-HILL BOOK COMPANY, INC.