フェルミ推定を取り入れた「標本調査」単元の開発と実践

著者	菊野 慎太郎, ?元 新一郎
雑誌名	静岡大学教育実践総合センター紀要
巻	31
ページ	147-158
発行年	2021-03-25
出版者	静岡大学教育学部附属教育実践総合センター
URL	http://doi.org/10.14945/00027913

論文

フェルミ推定を取り入れた「標本調査」単元の開発と実践

菊野　慎太郎　　　　　　　松元　新一郎
静岡大学教育学部附属静岡中学校　　静岡大学教育学部

Development and Practice of a "Sample Survey" Unit Incorporating Fermi Estimation

Kikuno Shintaro , Matsumoto Shinichiro

Abstract

The purpose of this study is to come up with suggestions on how to teach sample surveys by developing a unit and teaching materials which incorporate Fermi estimation into the unit of sample survey, and by practicing and analyzing them. The question used in the unit was: "How much could we harvest if we grew potatoes in every plot of abandoned farmland nationwide?" Based on this study,we have formed the following five suggestions:

1) By placing the Fermi estimation at the beginning of the unit, students can understand the benefits of rough estimation and at the same time better understand the meaning and value of sampling as a more accurate estimation method,
2) When shifting from Fermi estimation to estimation based on a sampling survey, it is necessary for students to shift their focus towards improving accuracy, while at the same time valuing their thinking,
3) It is important to discuss dealing with outliers when teaching about histograms and frequency distribution polygons in grade 7 and boxplots in grade 8,
4) After making a preliminary determination based on an estimation using a sample survey, it is necessary to consider whether to make a final judgment based on census,
5) In the sample survey unit, the final unit of compulsory education, students can learn with a sense of familiarity as well as earnestness through using teaching materials that are connected to the society and linked with other school subjects.

キーワード：　データの活用　標本調査　フェルミ推定　箱ひげ図　ヒストグラム　耕作放棄地　批判的思考

１．研究の背景

平成 29 年告示の中学校学習指導要領・数学科では「資料の活用」の領域が「データの活用」に名称変更され，内容知・方法知とも一層充実している(文部科学省，2018)。第３学年に位置づけられている標本調査は次の点において重要である。

・高校「数学 B」の「統計的な推測」では，確率分布や標本分布の性質に着目し，母集団の傾向を推測し判断したり，標本調査の方法や結果を批判的に考察したりする(文部科学省，2019)。第３学年における標本調査は高校で学ぶ「統計的な推測」の入り口である。

・大学では，データサイエンスを必修科目として位置付ける大学が増加している。静岡大学でも，令和２(2020)年度の入学生からデータサイエンスが必修科目(１単位)となり，指導項目にデータの分布や検定が含まれていて，標本調査の理解が必要である。

・これまでも社会では全数調査を行うことが不可能なことが多く，標本調査が広く行われているが，昨今は，限られたデータをもとにして不確定な未来を予測する必要性が一層増している。

しかしながら，７社の教科書では中学校数学の最後の単元に位置づけられており，入試等の制約から十分な実践研究が行われていない。

中学校における標本調査の指導は，平成 10(1998)年告示学習指導要領でなくなり，平成 20(2008)年告示学習指導要領で復活している。そこで，日本数学教育学会誌，CiNii，j-stage で，2008 年以降の中学校における標本調査に関わる先行実践(日本数学教育学会誌総会特集号，及び，実践していないものは除く)を調べると，表１のように挙げられる。

佐藤(2010)は PPDAC サイクルを取り入れた単元展開の大切さを，塩澤他(2012)は無作為抽出と標本サイズの重要性の実感を伴うためには実験を取り入れる大切さを述べている。また，中西(2012)は「全数調査と標本調査」に関する体験型学習の提案をしている。石綿(2013)は標本調査を体験することの必要性だけでなく，結果の検証の重要性を訴えている。さらに藤原(2014)は，多様な抽出方法を考える学習を単元のはじめに位置づけることや，問題解決の為に標本の抽出方法を自ら考えて標本調査を実施し，レポートを作成する活動を単元の終わりに位置づける大切さを示唆している。中本(2015)は標本調査の結果の確認にとどまらず，概念を生み出すための標本調査にするべきであると課題を述べている。

また，辞典の見出し語の総数の推定に関する実践は数多くあり，鈴木他(2019)は相対度数折れ線を用いて結果を分析しているが，コンピュータ利用と共に，子どもが直接対象に触れあう活動をどのように組み合わせて標本調査を行うかについては課題としている。

表１　中学校数学科における標本調査に関わる先行実践

	題材(教材)	ICT	概要
石井他(2009)	広島市の軽自動車の台数	×	総自動車数・自動二輪・原付自動車の台数を与えて，軽自動車の台数を標本調査によって推定させる。
細矢(2009)	米の収穫量	×	生徒が育てた稲の収穫直前の収穫量について，田んぼを区画に分けて標本調査する方法を考える。
西仲(2009)	環境と消費	○	Excel を活用して習得や活用という目的をもって標本調査をすることで，資料をクリティカルにみる大切さを学んだ。
佐藤(2010)	生徒の睡眠時間	○	附属中学校の生徒の睡眠時間を標本調査によってデータを集め，simplehist で分析し，レポートを作成した。
細矢(2011)	売店のおにぎりの個数	×	校内の売店で売られているおにぎりなどの個数を予想するに際には直感が用いられていることを見いだした。
中西(2012)	国語辞典，体力テスト	×	プリントや文学作品から「の」の字を数え上げることで全数調査と標本調査を理解する。
塩澤他(2012)	視聴率調査	×	視聴率調査の模擬実験を通してランダム性と標本サイズに対する理解を深める。
石綿(2013)	ランドセルの色	○	近隣の小学校のランドセルの色を，現地で標本調査したりして，全数を推定させる。
藤原(2014)	松坂投手の攻略	○	松坂投手の投球データから標本調査を行い，打撃練習を提案する。
中本(2015)	魚の総数	○	池の中の魚をＢＢ弾におきかえて，池の中の魚の総数を標本調査により推定させる。
佐渡他(2018)	選挙の出口調査	○	選挙の出口調査の結果から，無作為抽出の必要性や調査をする上で大切にすべきことを考える。
鈴木他(2019)	英和辞典の見出し語	○	英和辞典の見出し語を標本調査し，その結果を相対度数票や度数折れ線で表し，総見出し語数を推定する。

先行実践の題材は，標本調査の方法に着目した実践が多く，標本調査の方法の理解の促進としては有効だが，標本調査の価値である効率的かつ正確に推定するよさについては，子どもたちが理解していない実態が推測される。また，これからの社会を生き抜く子どもたちにとって切実感をもち，関心をふくらませる課題とは言いづらいのではないかと考える。

そこで，本研究では全数調査ができないとき，概数を求めるために比例を利用して推定する方法であるフェルミ推定(4 章で詳述)に着目した。

本研究でフェルミ推定を取り上げた理由は以下の５点である。

・「正解が無い」ときに用いることが多く，正解の無い問いだからこそ「正解を知っていた」のではなく純粋に「考えた」プロセスが問われる。

・特別な数学の知識を必要とせず，誰にとっても取り組みやすい推定方法であり，現実世界とのつながりを感じることができる。

・モデル分解(因数分解)した一つ一つの要素で，ある程度の数値が予測できる。

・身の回りの事象で何かを予測する際，フェルミ推定のように直感や主観から筋道立てて考え，必要な構成要素を明らかにした上で，標本調査から推定することができれば，より客観的で，正確な推定をすることができる。

・フェルミ推定に標本調査が加わることで，身の回りの事象を筋道立てて考えたり，データを活用して客観的に考えたりすることができるから，データの必要感が高まる。

なお，フェルミ推定を取り入れた実践は高校生を対象とした数学的モデリングの実践がある(稲葉他,2016)が，中学校における実践は見られない。

これらのことを踏まえて標本調査にフェルミ推定を取り入れ，よりよい標本調査の指導のあり方，課題について明らかにしていきたい。

２．研究の目的

本研究の目的は，フェルミ推定を標本調査の単元に取り入れたときの単元構想，教材を開発し，実践とその考察を行うことを通して，標本調査の指導のあり方の示唆を得ることである。

３．研究の方法

（１）フェルミ推定について調べ，標本調査の単元へ

の位置づけ方を検討する。

（２）（１）をもとにして単元計画をたて，授業実践を行い，考察を行う。これらのことから標本調査の指導のあり方の示唆を得る。

４．フェルミ推定について

（１）フェルミ推定とは

フェルミ推定は，ノーベル物理学賞を受賞したエンリコ・フェルミ(Enrico Fermi,1901-1954)に由来している。「世界中にサッカーボールはいくつあるか？」のように把握することが難しい数量について何らかの推定ロジックによって短時間で概数を求める方法をフェルミ推定という。フェルミ推定では結果よりも考えるプロセスが重視される。その理由として前述のサッカーボールの問題のように正解がなく，つかみ所のない数量・形を短時間で概算・概形を求めるからである。正確な数値を予測するというよりはむしろ，本格的な数値の算出に先立っておおよその桁数を算出するということに重きが置かれている。フェルミ推定の対象となる問題は内容が身近でわかりやすく，「正解が無い」ときに用いることが多い。正解の無い問いだからこそ「正解を知っていた」のではなく純粋に「考えた」プロセスが問われる。つまりそこには，問題解決の縮図が隠れている。以下に示すように各構成要素のすべてを駆使する必要があり，ここにフェルミ推定の神髄がある(細谷，2007)。

フェルミ推定は以下の４つのプロセスで考えることができる(細谷，2007)。それぞれのプロセスを「日本全国に電柱は何本あるか？」という例題で示していく。

ア　アプローチ設定

推定するために大胆な仮定を置くことが重要である。例えば「単位面積当たりの本数を市街地と郊外に分けて総本数を算出する」という切り口を考える。

イ　モデル分解

対象をモデル化して単純な要素に分解する(因数分解する)。考慮すべきポイントは住宅の密集する市街地と山間部を含む郊外では電柱の密度が大きく違うことである。各エリアの「単位面積当たりの本数」と各々の「総面積」がわかればそれらの積により総本数が算出できる。

ウ　計算実行

イで誰でもある程度の数字の推測が可能なところまで分解しておく。「単位面積当たりの本数」から考えてみる。市街地の代表的な電柱配置を「50 ㎡に１本」，郊外を「200 ㎡に１本」と仮定する。そうすれば１㎢当たりの本数は 400 本(市街地)，25 本(郊外)となる。次に必要なのは各々の総面積である。(日本の総面積)×(各々の占有率)となる。まず日本の総面積は約 38 万㎢を使えばよい。

以上の推測から，電柱の総本数は次のように算出できる。

(市街地の総本数)＝(日本の総面積 38 万㎢)×(市街地率 0.2)×(１㎢あたりの本数 400 本)≒3,000(万本),
(郊外の総本数)＝(日本の総面積 38 万㎢)×(郊外率 0.8)×(１㎢あたりの本数 25 本)≒760(万本),
よって，3,000+760＝3,760(万本)
電柱の総本数は 3,760 万本

エ　現実性検証

ウでひとまず結果が出るが，現実のデータが(部分的にも)入手可能な場合にはア～ウで計算した概算結果がどの程度現実に近いものかチェックできる。実際に電力会社と NTT が公表している電柱の本数は，約 3,300 万本であることから，推定結果はかなり正確だったと言える。本来フェルミ推定の誤差について，推定結果が 3,000 万本であれば 1,000 万本以上 10,000 万本未満の範囲にあるように桁数が同じであること(本稿では１桁以内の誤差と呼ぶ）が“合格”ということになる。

（２）単元の位置づけ

単元の位置づけを考えるにあたり，標本調査による推定とフェルミ推定について，それぞれの特徴を次のように捉えている。

・フェルミ推定は個人の知識や経験によって様々なことを仮定しながら比例の考えを用いて推定する。つまり概算するために用いる。効率的であるが，正確性には欠ける。
・個人の仮定が主観や直感によるところが大きいため，概算結果の範囲が大きくなる。
・フェルミ推定の結果をより真の値に近づけるためには確かな知識やデータが必要である。
・データの必要感をもち，大量のデータから平均値などを算出する場合に標本調査の有用性を感じることができる。

つまり，生徒がある事象(数量)を推定する際には，まず既習の比例の考えを用いてフェルミ推定によって概算し，この推定結果の正確性を高める過程において，データが必要であり，そのデータが膨大なため標本調査の必要性を感じ，進んで推定を行っていくだろう。

以上のことから，フェルミ推定を単元の導入部分におくことにした。さらに，標本調査の指導内容を見直すこととして，標本調査の題材内容についても検討の余地がある。身近なものを題材として授業化することはもちろんだが，中学３年の最後の単元であることを鑑み，他教科との関連や社会とのつながり，自分の価値観や生き方について考えることができる題材選定をしていきたい。

５．「標本調査」の教材・単元計画・授業実践

（１）取り上げる教材とその理由

課題　全国の耕作放棄地でじゃがいもを栽培するとどれくらい収穫できるだろうか

中学校第２学年の社会科では，食料自給率について学習する。日本の食料自給率の低さの理由の一つとして，耕作放棄地問題がある。農家の高齢化などが要因の一つであるが，農家や大人だけの問題ではなく，これからの社会を担う子どもたちには切実感のある課題であると考える。そして，そこで栽培された作物の収穫量については，インターネットで検索しても答えが出てこないことから，自分たちで考えて推定する必要がある。作物をじゃがいもにした理由は，次の３点である。

①じゃがいもは全国各地で栽培が可能であり，農林水産省のホームページ掲載の収穫量のデータの個数が多く，標本調査の必要性を感じやすい。

②標本調査を実際に体験することができ，その結果をヒストグラムや箱ひげ図で表すことで，結果や方法をふり返るなど分析することができる。

③クラスの子どもたちと栽培・収穫した経験があるなど身近な作物である。

このように，数学科だけではなく，社会科や家庭科，道徳的な問題まで教科を横断して考えるプロセスを大切にすることを期待して，本教材を取り上げた。

なお，母集団のデータは，全国各都道府県 10a 当たりのじゃがいもの収穫量に関する過去 15 年分のデータ 653 個(e-Stat　政府統計の総合窓口,2020)であり(15 年分データには空白の年や空白の県が数年あるため 47×15＝705 にはならない)，授業ではランダムに配列した表(資料１)を提示した(資料１を大小順に並び替えた表も用意して，必要な生徒に配布した)。

（２）授業の概要

①　単元計画(5 時間扱い)

時	学習内容
1	全国の耕作放棄地でじゃがいもを栽培するとどれくらい収穫できるだろうか
2	全国の耕作放棄地とじゃがいもの収穫量をフェルミ推定しよう
3 4	じゃがいもの収穫量を標本調査で推定しよう
5	推定をする上で大切にすることは

なお，フェルミ推定は令和２年９月に「市営バスの中にゴルフボールはいくつ入るか」という事例を使って２時間の授業をトピック的に扱った。したがって，本単元はフェルミ推定を既習として計画した。

②　実施時期：令和２(2020)年 10 月

③　対象生徒：国立大学附属中学校３年生

授業者は，対象の生徒を持ち上がりで数学の授業を担当しており，データの活用の実践については，静岡大学教育学部附属静岡中学校・村山(2019)と菊野・裕元(2020)にまとめている。

④　単元の目標：未知なる数値を算出するために，根拠をもって構成要素を考えてフェルミ推定したり，より正確な推定のために標本調査したりすることを通して，結果や調査方法などを批判的に考え，根拠を明確にしながら筋道立てて説明することができる。

（３）授業展開と生徒の反応

<u>第１時　問題の把握と推定(Problem,Plan,Data)</u>

まず，子どもたちにアニメーション映像「食料自給力ってなあに？」(農林水産省,2015)や耕作放棄地に関連する動画を提示した。

食料自給率と耕作放棄地問題について，関心をもった子どもたちから「耕作放棄地で作物を栽培すれば食料自給率が上がるのではないだろうか」という声があがったところで授業者から「日本の耕作放棄地でじゃがいもを栽培したら，いったいどれくらいできるだろうか」となげかけた。

子どもたちは日本全国の耕作放棄地の面積と，じゃがいもの収穫量についてフェルミ推定していこうと様々な仮定をしていった(図１)。推定するものが２つあるため，まず日本全国の耕作放棄地の面積を推定しようと全体で確認したことで，子どもたちは耕作放棄地に絞って推定していった。「日本全国の面積は 38 万㎢なので，都市部と山間部の割合は 3：7 と仮定すると，それぞれの面積は～」「都市部には耕作放棄地は少なく，山間部に多いと考え，それぞれの割合を仮定しよう」「静岡は山間部の方が多いけど，他県の大都市，地方都市でそれぞれの割合は異なるだろう」などである。各自で考えをもち，グループで共有し，次時に全体で共有することを伝えて授業を終えた。

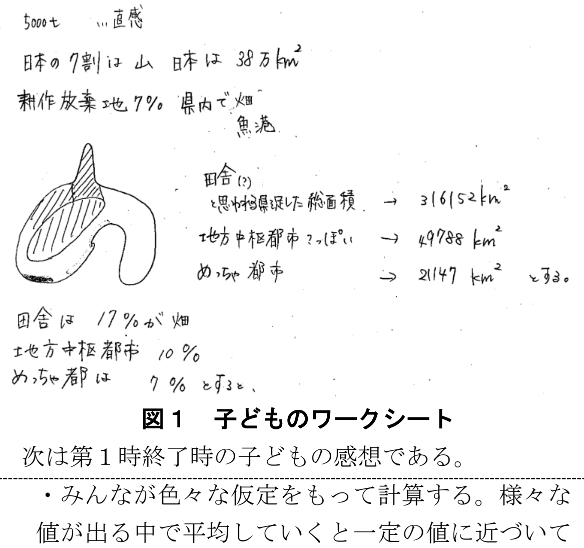

図１　子どものワークシート

次は第１時終了時の子どもの感想である。

・みんなが色々な仮定をもって計算する。様々な値が出る中で平均していくと一定の値に近づいて

いくと思う。まずは各自でフェルミ推定をして正確な推定をするために細かくわけて推定していきたい。
・たくさんの過程をふむことで本物の値に近づいていくと思った。でも過程を増やしすぎてどこかで計算間違いしたら大きな差になってしまう。
・フェルミ推定は情報量や経験量が鍵となるだろう。

第２時　フェルミ推定の共有とデータの必要性(Analysis,Conclusion,Problem)

前時までに子どもたちが推定した結果と根拠について全体で共有した。

まずは結果を共有すると異なる仮定や，同じ仮定で考えていたとしても，それぞれ異なる数値が出されたことから子どもたちから「どうやって考えたの？」と根拠や過程に目が向いていった。

・市街地 20%，森林 80%として，市街地 6 分の 1 を農地で，その中の５%を放棄地と仮定すると 633 ㎢と推定した。
・日本の国土が 38 万㎢なので，市街地：農地＝６：４と仮定し，さらに農地のうち 20 分の 1 が放棄地だと仮定すると，放棄地は 7600 ㎢と推定した。

それぞれの過程を共有していく中で，「なるほど」と納得したり「その仮定は納得できないよ，だって～」と自分の知識や経験から批判的に考えたりする子どもたちもいた。子どもたちの対話で様々な仮定の中から最も納得する仮定を考えていくことで，自分たちなりの妥当な推定をつくりあげていった。

授業者が「最も納得した推定はどれか」となげかけると，次の２つの推定に絞られた。

・平地が３割でそのうち畑が２割，耕作放棄地はそのうち 1 / 6 程度であると仮定すると
38 万㎢× 3 /10× 1 / 5 × 1 / 6 ＝38 万 ha
・(全国の面積)－(川＋湖＋町＋森の面積)＝(畑の面積)と式をつくり，川が 23,800 ㎢，湖が 2680 ㎢，町が 94,000 ㎢，森が 200,000 ㎢と仮定し
38 万㎢－(23,800＋2,680＋94,000＋200,000)＝59,520 ㎢　＝　595.2 万 ha

２つの推定に納得した理由を尋ねると子どもたちは「細かく分けて仮定していたり，多くの情報が入っていたりすること」「日本の国土が 38 万㎢など，確かな情報やデータが入っていること」などを理由にした。

次に，授業者はフェルミ推定における現実性検証を行うために，全国の耕作放棄地の値の面積 42.3 万 ha(農林水産省 2015)を子どもたちに知らせると「自分の推定が近い」「かなり推定値が遠かった，何が原因だろうか」などと仮定をふり返っていた。

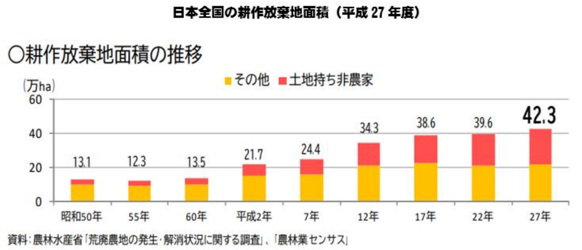

図２　全国の耕作放棄地面積(農林水産省,2015)

子どもたちから「じゃがいもの収穫量はどれくらいなのだろうか」「私は１㎡あたり３個収穫できると仮定した」「僕は 50 ㎝ごと植えると仮定して推定したよ」などとフェルミ推定の考えを表現した。それらの意見を受け止めながら，授業者は全国各都道府県 10a 当たりのじゃがいもの収穫量に関する過去 15 年分のデータ 653 個の表を提示した(資料１参照)。子どもたちからは「こんなにたくさんのデータを計算するのは大変そうだ」「一部を取り出せばいいのではないだろうか」などと声があがった。「このデータからじゃがいもの収穫量を求めたい，どのように求めればよいだろうか」を感想用紙に記入するように促し，授業を終えた。

・全部足して平均値を求めればよいだろう。
・平均値だけだと正確な分布がわからない，ヒストグラムをみたい。最頻値や中央値も知りたい。
・大小順に並べて度数分布表をつくれば地域や気候などもわかるかもしれない。年ごとに収穫量は変化するから細かなデータも必要だろう。
・すべてを計算するのは大変だから一部から推定すればよいだろう。

第３時　標本調査で 10a 当たりのじゃがいもの収穫量を推定しよう(Plan,Data,Analysis)

提示されたデータから「じゃがいもの収穫量の何を推定すればよいだろうか」に対する子どもたちの考えを共有すると，「平均値を知りたい」という声があがった。他にも「中央値」「最頻値」などの声もあがったが，授業者から「平均値」の推定に絞って考えようとなげかけた。「全部足して割ればよい」「一部を取り出して推定すればよい」「最大値と最小値の平均でよい」などが子どもたちから出された。授業者は「全数調査」と「標本調査」という用語を用いて子どもたちの考えを価値づけ，全数調査は時間や労力がかかり実際に行うことは難しいことなどから，対話を通して標本調査の必要性とその方法について子どもたちと確認した。

そこで「このデータから標本調査によって母集団の平均値を推定しよう」と問いを共有した。標本調査をする上で「標本の大きさ」と「抽出方法」について話題があがったため，それらを取り上げ，標本の大きさ

と抽出方法が同じにならないように割り振ると，子どもたちは自ら数人のグループをつくり，思い思いに標本調査を行った。標本の大きさは「５，10，20，40，100，200 など」「抽出方法は乱数表，乱数さい，くじ引き，乱数アプリなど」である。時間の許す限り子どもたちは標本調査を行い，授業者は結果を集約した。標本の大きさがグループごと異なるため，標本回数もグループによって異なる。

標本調査をしている子どもたちからは「大小順に並べると中央値は○○である」「度数分布表にすると･･･」などと，自ら平均値以外の代表値や表・グラフにしようという声があがっていた。

次時に標本調査の結果から 10a 当たりのじゃがいもの収穫量の平均値を推定し，「全国の耕作放棄地でじゃがいもを栽培するとどれくらい収穫できるだろうか」という題材を貫く問いを追究することを共有し，次時につなげた。

第４時　耕作放棄地でどれだけ栽培できるのだろうか(Analysis)

授業者は各グループの標本調査の結果(図３)と，それもとに統計ソフト statlook(裕元・青木,2017)を利用して作成した５数要約と箱ひげ図(図４，５)を子どもたちに提示した。

標本の大きさ	２～１０	１４～４０	50~65	80	100～120	200
推定した平均値	1565	1355	1540	1662.93	1638	1705.01
	1645	1570	1578.4	1697.23	1727	1711
	1670	1692	1630	1704.09	1727	1725
	1723	1717.5	1671	1709.11	1728.9	1745.14
	1850	1729.28	1682	1710	1756.77	1757.29
	1905	1744	1695.19	1760	1766.43	1766.1
	2025	1751	1750	1789.15	1767	
	2482.5	1765	1750	1789.15	1775	
	2925	1813.5	1751		1775.5	
			1767.84		1785.21	
			1769		1806.3	
					1886.68	

図３　各グループの標本調査結果(kg)

５数要約

	2~10	14~40	50~65	80	100~120	200
最小値	1565	1355	1540	1662.925	1638	1705.01
Q_1	1657.5	1631	1630	1700.6563	1727.95	1711
中央値	1850	1729.28	1695.19	1709.5563	1766.7125	1735.0675
Q_3	2253.75	1758	1751	1774.575	1780.355	1757.285
最大値	2925	1813.5	1769	1789.15	1886.68	1766.1
四分位範囲	596.25	127	121	73.9188	52.405	46.285

図４　図３の標本平均の５数要約

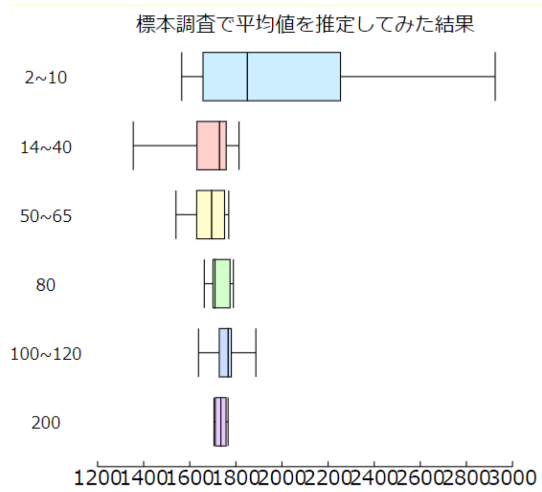

図５　図３の箱ひげ図

標本調査の結果を観察した子どもたちは次のように議論していった。「標本の大きさが大きいほど四分位範囲が狭くなり安定している」「だいたい標本の大きさが 80 から安定しているように思う」「抽出方法によってもばらつきがあるのかもしれない」「標本の大きさが大きければ大きいほど正確には近づくが，それでは効率性が失われてしまう。いったいどれくらいの大きさにすればよいのだろうか」「データの個数 653 の場合，何割抽出して標本調査すれば正確になるのだろう」などと新たな疑問も出てきた。

表や箱ひげ図から平均値が推定できるため，「平均値を用いてじゃがいもの収穫量を推定しよう」「でもどの平均値を使えばよいのかわからない」「A：標本の大きさ 200 の平均値と B：100～120 の平均値の平均では，B の方がデータ数が多いから正確だろう」などと，標本の大きい調査を少なくやるよりも，標本が小さくても複数回調査した方がより正確になるだろう，というアイデアも出された。

平均値以外の代表値や全体の分布について知りたいという子どもの発言を受け，授業者は，全数のデータをもとに作成した度数分布表(図６)とヒストグラム(図７)を提示した。

範囲　845 ～ 4111　階級幅　400　階級数　9

度数分布表

階級 (以上～未満)	1			
	度数	累積度数	相対度数	累積相対度数
845～1245	128	128	0.196	0.196
1245～1645	198	326	0.303	0.499
1645～2045	164	490	0.251	0.75
2045～2445	114	604	0.175	0.925
2445～2845	28	632	0.043	0.968
2845～3245	7	639	0.011	0.979
3245～3645	7	646	0.011	0.989
3645～4045	6	652	0.009	0.998
4045～4445	1	653	0.002	1
計	653		1	

図６　全数データをもとにした度数分布表

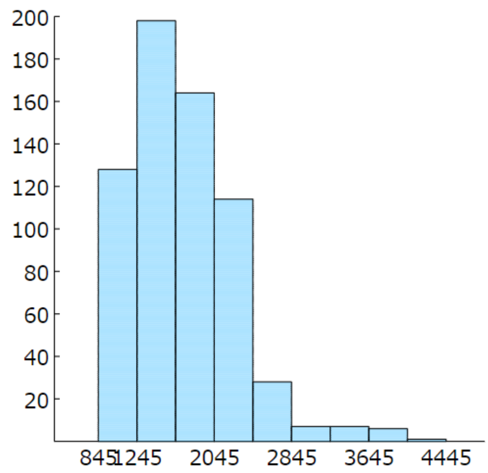

図７　図６のヒストグラム

そして「全国の耕作放棄地でじゃがいもを栽培するとどれだけ収穫できるだろうか」となげかけた。子どもたちは次のように考えていった。

全国の耕作放棄地は 42.3 万 ha として
・それぞれの標本調査の中央値の平均である 1747kg を用いて
42.3 万 ha　× 1747　≒　738 万 t
・最頻値 1445kg を用いて
42.3 万 ha　×　1445　≓　611 万 t
・標本 50 個の中央値 1650kg を用いて
42.3 万 ha ×1650kg　＝690 万 t
・ヒストグラムが左によっているから右端の 2845kg～は外れ値であると仮定し，そのデータを切り捨て，845～2445kg の階級値の平均 1581kg を用いて
42.3 万 ha　×　1581kg　≒668 万 t
・最小値と最大値の平均　2445kg を用いて
42.3 万 ha　×　2445kg　≒　728 万 t
など

子どもたちの推定値である，最小値が 611 万ｔ，最大値が 738 万 t をみても分かるように，第２時で考えたフェルミ推定による推定値と比較して，かなり範囲が限定された。標本調査によってより正確に精度を上げて推定できたことから，子どもたちはある程度の納得感を得ていた。

ここで，ある子どもの「ヒストグラムの右端のデータを外れ値とみなして切り捨てて考える」という意見が出て，「外れ値とは何か」について議論になった。「確かにヒストグラムを見ると，最頻値や平均値から離れているようだが，外れ値とみなすことはできないだろう」，「右端のデータはどの都道府県のデータなのか，収穫年はいつなのかがわかれば，そのデータが外れ値なのか判断できるかもしれないが，現状では外れ値とは判断できないため，データとして入れるべきだ」という対話がなされた。

出された収穫量の推定値の中で，「どの考えが正確なのだろうか」と子どもたちに尋ねると，「(それぞれの標本調査の中央値の平均の考え)が最もデータ数が多いことから一番正確なのではないだろうか」とデータ数が多ければ多いほど正確になることを根拠に判断した(全数調査の 653 よりも，標本の大きさ 200 の標本調査を 6 回やったほうが，200×６＝1200 のデータから判断しているので，より正確だろうという根拠をもった子どもたちがいた)。

「正解はあるのだろうか？」「収穫量も耕作放棄地も推定だから答えはないだろう」「もっと詳細なデータが欲しい」と統計的探究プロセス(PPDAC)の３周目を意識した発言を受け止め，授業者は感想を記入するように促して授業を終えた。次は子どもたちの授業後の感想である。

・標本の大きさが小さいと結果にばらつきがある。統計的確率のように実験を多くすれば値が収束していくようなことが起こっていた。
・正確性を取れば標本の大きさを大きくすればよいが，効率性が悪い。効率性を取ると正確性が失われる。いったいどうすればよいのだろうか。
・箱ひげ図からは標本数 70 くらいで安定した値が得られるので，正確性も効率性もバランスがよいのではないだろうか。
・全体の 1 割くらいを抽出すれば正確になると予想していたが，10 個の 10 分の１と 653 個の 10 分の１では全く違ってくる。２次関数っぽくなっているのではないだろうか。
・どのくらい正確性を求めるのかという目的と，誤差をどこまで許せるかはつながってくる。
・今回のじゃがいもの収穫量の推定において正確とは何なのだろうか。

<u>第５時　推定する上で何を大切にするのだろう(Conclusion)</u>

授業の初めに，コロナウイルスがメディアで多く取り上げられていた本年(2020 年)４月頃に，感染症対策にどのように統計(フェルミ推定や標本調査など)が活用されていたかを新聞記事や映像で紹介した。

フェルミ推定を取り入れて標本調査を行ったことで，子どもたちは何を学んだのか，感想や疑問などを共有する時間をとった。子どもたちは次のように発言していった。

<u>フェルミ推定について</u>
・細かい仮定をすることでより正確な概算をすることができるが，細かすぎると相手に伝わらなくなってしまう。
・仮定するための経験や知識が必要であり，確か

な情報であれば相手を納得させることができる。
・いくつかの仮定や求め方を考えるなど複数の視点で推定し，比較することでより納得するフェルミ推定になるだろう。
・フェルミ推定は結果の幅(範囲)が大きすぎて信用できない。

標本調査による推定について
・データ数が多ければ多いほど正確になる。
・全数調査が最も正確だが，データ数が多いほど時間や労力がかかるのでそのバランスが難しい。
・抽出する場合は偏りのない選び方をする無作為抽出が大切なことがわかった。
・普段身の回りにあるアンケート結果について考えたけれど，東京の４万人と静岡の４万人では意味が違う。また，市街地や田舎，年齢や性別など偏りなく抽出することは難しいけど，大切だと思った。

２つの推定を通して
・どれだけ少ない労力で，正確な推定が出せるかが重要だった。一部を考えて全体に広げていくことや，全体から範囲を絞っていくように推定できることがわかった。現実でも使えると思う。
・これだけの情報では判断できない，さらに都道府県別や年別のデータを分析することで，より正確にできるのではないだろうか。
・「推定」と言っても，データなど根拠が乏しいまま推定してしまっているフェルミ推定や標本調査による推定があるのではないかと感じた。どのような時に推定が使われ，どのような推定が使われているのか疑問に思った。
・情報の発信者や受け手として，データをどのように使うか，難しさを感じた。

子どもの中には，じゃがいもの収穫量の推定結果である 700 万ｔを日本の人口１億２千万で割ると，一人当たり約 60 kgのじゃがいもを収穫することができると考え，発表した。また，耕作放棄地でじゃがいもを栽培するほかにも太陽光パネルを設置したり，体験農園にしてみんなでつくっていく場所づくりにしたりしてみたいなど，数学科の枠を越えて，社会に目が向く対話がなされていた。

６．実践からの示唆

（１）標本調査の単元にフェルミ推定を位置づける意義について

フェルミ推定をすることで子どもたちから「結果にばらつきがある」「より正確にするためにはデータが必要である」という発言を引き出すことができた。推定するためには「どのようなデータが必要か」，「どのくらい必要であるか」という PPDAC サイクルの Problem(問題)Plan(計画)の部分に焦点があたった。「より正確にしたい」という思いを大切にして標本調査することで，標本調査の概念や方法についてより理解が深まることを子どもたちの姿から見いだすことができた。第４時の標本調査による推定値を出した後では，標本調査の推定値の正確さについて「全数の１割程度の標本でかなり正確な推定ができるのではないだろうか」と実感していた。また，「標本の大きさを大きくすればするほど正確になるが，それでは標本調査の意味が無い。適切な標本の大きさはどれくらいだろうか」という正確さと効率的な標本調査について，新たな疑問をもつことができた。

以上のことから，フェルミ推定を単元の最初に位置付けることによって，子どもたちは大まかに推定できるよさを理解すると同時に，より正確に推定する方法としての標本調査の意味や価値を一層理解することができる。

（２）フェルミ推定と標本調査による推定の違いによる指導の困難さ

同じ「推定」を用いるが，フェルミ推定と標本調査による推定には隔たりがある。導入時にフェルミ推定をしてきた子どもたちは「こんなに大雑把な推定でいいのだろうか」「これは数学とは言えないのではないか」のように発言した。仮定の根拠は個人の知識や経験によるため，仮定はもちろん，推定結果も人によって様々であることから，桁数が１桁以内の誤差であれば合格としてきた。しかし，標本調査では正確さを求めるため大幅な誤差をよしとしない。

以上のことから，フェルミ推定から標本調査による推定に移行した際には，子どもたちの思考を大切にしながら正確さを高めようという意識の切り替えが必要である。

（３）外れ値の扱いについて

１，２年ともに，Analysis(分析)のプロセスでデータを分析する際に，あるデータを外れ値とみなして除外するか，データの一部として分析に含めるかどうかは全体で共有しながらも，基準は決めずに各自の判断で考察するように促してきた。本実践でも図８のようにヒストグラムから中央値や最頻値を求め，その値から外れている値を外れ値とみなして除外して分析しようとする子どもがいた。

図８を記述した子どもの，「この外れているデータはどこの都道府県のデータなのか，もしくはある年だけじゃがいもが豊作で異常に収穫できたのかもしれない」などと発言したように、データをより詳しく知りたいという面では大切な視点だが，安易に外れ値とみなして分析の際に外してしまうべきではない。

以上のことから，1 年のヒストグラムや度数分布多角形，2 年の箱ひげ図を指導する際に，外れ値の基準について検討する場を設けることが重要である。

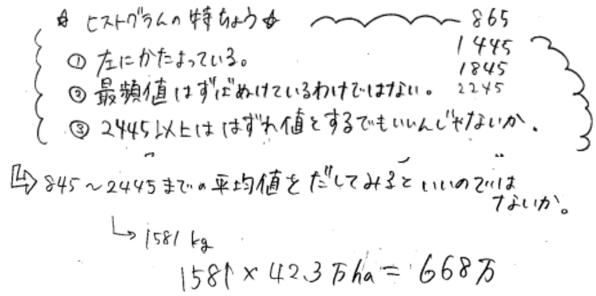

図８　ヒストグラムから外れ値とみなす考え

（４）全数調査による判断と標本調査の推定による判断の区別の難しさ

授業では，箱ひげ図から母集団の平均値を推定した。しかし，母集団の平均値が推定できた(仮に正確にわかった)としても各都道府県のじゃがいもの収穫量を求めるために，いったいどの代表値を用いれば，正確な収穫量が算出できるのかどうかは正解がない。この理由は，日本でじゃがいもを生産しているそれぞれの畑の 10a 当たりのじゃがいもの収穫量を母集団とすると，今回の実践の「じゃがいもの収穫量に関する過去 15 年分のデータ 653 個」は標本になるために起こることである。さらに，各都道府県のじゃがいもの耕作面積が異なることから，全国のじゃがいもの正確な収穫量(総和)を求めるためには、(ある都道府県の単位当たりのじゃがいもの収穫量)×(その都道府県のじゃがいもの耕作面積)を各都道府県で算出し，47 都道府県の和を求める必要もあるからである。

このように，収穫量や耕作放棄地の面積は都道府県ごと異なり，年ごとにも異なる。そのため，全数調査をもとにしたヒストグラムや度数分布表から求められる真の平均値や中央値，最頻値と，標本調査をもとにした推定した平均値や中央値のどちらの正確性が高いかは判断がしづらいということである。

第４時において，標本調査によって推定された平均値を表した箱ひげ図(図５)と，全数を用いた度数分布表(図６)やヒストグラム(図７)を続けて提示した。正確性を求めるのであれば全数を用いたヒストグラム(図７)や度数分布表(図６)を用いてじゃがいもの収穫量を算出するところだが，子どもたちの中には標本調査による箱ひげ図の推定(図５)を根拠として，じゃがいもの収穫量を算出している子どももいた。つまり，箱ひげ図を用いた標本調査による平均値の推定と，全数を用いたヒストグラムや度数分布表を同時に提示すると，全数調査と標本調査のどちらが正確であるか混同してしまうことがわかり，単元構想の難しさを痛感した。

以上のことから，標本調査による推定による判断のあとに，全数調査に基づく判断をするかどうか検討していく必要がある。

（５）子どもに身近で切実感のある教材について

中学３年の最後の単元は，中学数学最後の単元であるということを考慮し，高校数学とのつながりはもちろん，社会とつながり，自分自身の生き方に少しでもつながるような教材をつくりたいと考え，本実践を行った。本稿では紹介しきれないが，導入時には地域で耕作放棄地を活用して起業している方の動画を流し，授業後には，その方に来校していただき，「生き方」について，子どもたちと一緒に考えるなど交流する時間を設けた(道徳との関連)。中学３年という自分の進路を考える子どもたちにとって切実感のある豊かな時間となった。

以上のことから，義務教育最後となる標本調査の指導では，社会とつながり，他教科連携を図った教材を取り上げることで、子どもにとって身近であり，切実感をもって学ぶことができる。

７．まとめと今後の課題

（１）３年間のデータ活用領域のつながりについて

本実践の対象である子どもたちと授業者は，１年で「データの活用～体育祭の競技時間を考えよう」，２年で「ディズニーランドの待ち時間を考える」(菊野・裕元 2020)の実践を経験しており，３年間にわたってデータの活用の実践を積み重ねてきた。ここから３年間のデータの活用領域の学びには何がつながっているのかを考察したい。

１年の授業づくりで大切にしたことは，批判的な見方・考え方である。山が２つ以上の多峰性になるヒストグラムを，層別にわけて男女別，学年別で考えることで多面的に考えるよさや，平均値だけでなく中央値，最頻値などの必要性やそれぞれの意味について考える実践を行った。

２年では，５つ以上のデータ群を比較する際にはヒストグラムでは比較しづらいため箱ひげ図の四分位数や四分位範囲が有効で，そこからヒストグラムや度数分布表に戻って細かく考察することもできることを学んだ。中学１年の学習を踏まえて，様々なグラフや代表値で批判的に考え，テーマパークのアトラクションの待ち時間を判断し，効率的なテーマパークのまわり方を判断する実践を行った。

３年ではこれらの学びが包括されているような題材が望ましい。

度数分布表やヒストグラム，箱ひげ図を実際に子どもが書くと時間がかかってしまう。統計ソフト statlook(裕元・青木,2017)を用いれば，グラフを作成することは容易で，今回の実践でも授業者が作成したものを子どもたちに提示して，子どもたちはグラフを

観察して分析することに時間を割くことができた。

自分たちの課題意識からアンケートを作成し，データを収集・整理分析し，考察するという PPDAC サイクルをまわすことは大切だが，時数が限られている。本実践で大切にしたことは「①判断するための表やグラフ，代表値の選択」「②標本調査で標本の大きさと正確性を検討するために箱ひげ図で分析すること」の２点に絞った。本実践では相対度数などは扱わなかったため，比較する際の１つの材料として相対度数が必要で，標本調査によって推定した値を比較するような題材構想をつくることも考えられる。

どの学年でも共通して大切にしていることは，不確定な事象を推測したり，問題を解決したりするために統計的探究プロセス(PPDAC)をまわしながら，効率性や正確性を大切にし，表やグラフ，代表値を用いて多面的に吟味するとともに，適切な判断は何だろうかと考えたことである。

３年間を通して，子どもたちは身の回りの統計に興味をもち，答えが一つでは無い数学を楽しんでいた。答えが一つでは無いからこそ，どの子どもたちも考えをもち，発表することができ，様々な仮定や根拠から，より適切な過程は何だろうかと議論することができた。「もやもやするけど楽しい」は統計ならではの学びとなっていると感じた。これからの社会を生き抜く子どもたちには，答えの無い課題に向かって，様々な人と議論を重ねながら客観的に，かつ論理的に問題を解決できる人になってほしいと願っている。

（２）今後の課題

３年間を通して，「データの活用」について指導のあり方を追究し今後の課題として，次の２点を挙げることができる。

①領域間のつながりを意識した取り組み

統計的確率において，コインの表裏やサイコロを多数回投げる実験から，統計的確率は一定の値に収束するということを理解した子どもたちは，標本調査の標本の大きさによって真の平均に近づくということとつなげ，「標本調査は統計的確率と似ている」「いったいどのくらい標本調査の実験をすれば正確と言えるのだろうか」という問いをもつことができた。

また，フェルミ推定では，問題を解決するために事象を構成要素に分解(モデル分解)することが必要になってくる。これは因数分解の思考と似ていて，単に数式を因数分解するのではなく，ある事象を数値化し，細かく仮定して分解することで，より正確な値を推定することができるため，因数分解を学ぶ価値を実感することができるのではないだろうか。

他にも，ｘ軸を標本数，ｙ軸を標本平均のように座標平面で標本調査の結果を図９のように表すことで，視覚的に分析することができるなど関数領域とのつながりも考えられるだろう。

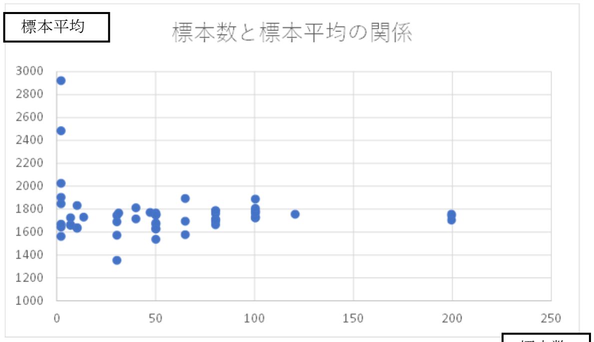

図９　標本数と標本平均の関係

このように，１つの題材を学ぶ意味や価値の広がりや深まりを感じるために，学年や領域間のつながりを意識した題材選定や題材構想について考えていきたい。

②データの活用領域における小中高のつながり

中学校３年間のデータの活用領域で何を学ぶのかについては実践を通してみえてきた。しかし，小学校で何を学び，何が課題であるか，高校での統計領域との接続まで意識して指導ができていない。小学校や高校の統計領域の指導とのつながりについても意識して指導していく必要がある。

［注］本研究は，科学研究費(基盤研究 C)「初等中等教育における批判的思考を志向した統計指導プログラムの開発」(研究代表者：柗元新一郎，17K04765)の助成を受けた。

＜引用・参考文献＞

e-Stat 政府統計の総合窓口(2020).作物統計調査 https://www.e-stat.go.jp/stat-search/files?page=1&toukei=00500215&tstat=000001013427&cycle=7&month=0&tclass1=000001032286

藤原大樹(2014).標本調査の学習における標本の抽出方法を考えさせる指導,日本科学教育学会年会論文集,38,51-54.

細谷功(2007).地頭力を鍛える 問題解決に活かす「フェルミ推定」,東洋経済新報社.

細矢和博(2009).標本調査に関する指導の考察,日本科学教育学会年会論文集,33,155-156.

細矢和博(2011).標本調査に関する指導の考察,日本科学教育学会年会論文集,35,205-206.

稲葉芳成, 河嵜哲嗣, 黄瀬正敏, 柳本哲(2016).高等学校における数学的モデリングに関する実践事例－モデリング・チャレンジプログラムの記録－，科学教育研究,40,186-197.

石井英真,神原一之(2009).「活用する力」を育てる数学授業の創造－パフォーマンス評価を生かした

「標本調査」の単元設計を通してー，数学教育論文発表会論文集,42,25-30.
石綿健一郎(2013).中学校数学科における標本調査の実践事例，日本科学教育学会年会論文集,37,10-13.
菊野慎太郎,柗元新一郎(2020).中学校数学科における「データの活用」の指導－統計的な問題解決のサイクル(PPDAC)に基づいた単元の開発と実践－静岡大学教育学部附属教育実践総合センター研究紀要,30,69-78.
柗元新一郎,青木浩幸(2017).統計的思考力を育成する統計ソフトの開発に関する研究(2)－時代の要請に応じた新ソフトウェアの開発－，日本数学教育学会，秋期研究大会発表収録,50,353-356.
文部科学省(2018).中学校学習指導要領（平成 29 年告示）解説数学編，日本文教出版，54-59.
文部科学省(2019). 高等学校学習指導要領(平成 30 年告示)解説数学編理数編.学校図書,104-110.
中本信子(2015).標本比率の分布の把握を重視した標本調査の指導　日本数学教育学会誌　97(1)，2-9.
中西寛子(2012).全数調査と標本調査」に関する体験型学習の提案，数学教育学会誌,52 (3-4),93-102.
西仲則博(2009).新領域「資料の活用」における ICT の効果的利用による授業の構築,日本科学教育学会年会論文集,33,151-154.
農林水産省(2015).アニメーション映像「食料自給力ってなあに？」
https://www.youtube.com/watch?v=McL8CBmXxrU
佐渡由季子,御園真史(2018).アニメーション教材を利用した中学校数学科第３学年「標本調査」の授業実践，日本科学教育学会研究会研究報告,28(7),133-138.
佐藤寿仁(2010).中学校数学「資料の活用」における指導のあり方,日本科学教育学会年会論文集,34,129-132.
塩澤友樹,須藤雄生(2012).中学校数学科における標本調査の授業実践 ：標本抽出に着目して，本科学教育学会年会論文集,36,51-54.
静岡大学教育学部附属静岡中学校・村山功(2019).対話が深める子どもの学びー「教科ならではの文化」を味わう授業ー,明治図書,68-85.
鈴木康志, 関富美雄, 山本恵悟, 國宗進(2019).標本調査における基本的概念の理解とその授業化，日本科学教育学会年会論文集, 43,333-336.
（URL は 2021.1.1 最終確認）

資料1

全国各都道府県　じゃがいもの10a(1000m²)当たりの収量(kg)
*過去15年分のじゃがいもの収穫量のデータ(番号やその順番に意味はありません)

番号	収量	番号	収量	番号	収量	番号	収量	番号	収量	番号	収量	番号	収量	番号	収量	番号	収量	番号	収量	番号	収量
1	1840	61	1470	121	1770	181	1790	241	1760	301	1020	361	1940	421	1420	481	2070	541	1010	601	1020
2	1970	62	1990	122	1270	182	1450	242	1760	302	1630	362	2010	422	2040	482	1290	542	2700	602	2480
3	2850	63	1850	123	1430	183	1510	243	1680	303	1970	363	995	423	2050	483	1040	543	2220	603	1580
4	1300	64	2280	124	2290	184	2270	244	1600	304	2020	364	1180	424	1400	484	1660	544	2580	604	1890
5	1500	65	1040	125	1290	185	1830	245	1190	305	1300	365	3470	425	2410	485	1920	545	2140	605	2380
6	1440	66	1810	126	1190	186	1720	246	1280	306	2000	366	1740	426	1260	486	3580	546	1180	606	1010
7	1320	67	1130	127	2120	187	2050	247	1440	307	1370	367	1120	427	3940	487	1430	547	1490	607	2320
8	1190	68	1970	128	2150	188	1930	248	1940	308	959	368	1430	428	1220	488	2280	548	977	608	1470
9	1200	69	1180	129	1410	189	1070	249	1230	309	1890	369	1310	429	1230	489	1860	549	1280	609	1770
10	1780	70	1510	130	1600	190	1290	250	2830	310	1070	370	1070	430	1430	490	1630	550	1380	610	1530
11	2110	71	1910	131	2130	191	1660	251	2050	311	1140	371	1180	431	2700	491	2030	551	2350	611	2230
12	2440	72	1410	132	1240	192	1410	252	1530	312	1610	372	1460	432	1070	492	1350	552	1790	612	1890
13	1190	73	1850	133	1470	193	1790	253	1720	313	1920	373	2080	433	1360	493	1190	553	1950	613	1830
14	2080	74	1990	134	1230	194	1800	254	1170	314	1610	374	1340	434	1650	494	1050	554	1970	614	1280
15	1500	75	1170	135	1880	195	1990	255	2190	315	1900	375	1120	435	2330	495	1780	555	2670	615	1650
16	2020	76	1810	136	1340	196	2170	256	2060	316	1390	376	1940	436	1090	496	1970	556	1530	616	1160
17	3350	77	1280	137	1840	197	1230	257	2810	317	1380	377	1200	437	1170	497	1470	557	1030	617	1250
18	1860	78	1420	138	1980	198	1360	258	1340	318	1990	378	1620	438	1620	498	1350	558	1160	618	1660
19	1400	79	1490	139	1220	199	2200	259	2190	319	937	379	2410	439	1860	499	1510	559	1910	619	2320
20	1740	80	1580	140	2100	200	1020	260	1860	320	2020	380	2140	440	1300	500	1940	560	1280	620	2120
21	1370	81	1700	141	1280	201	1180	261	1990	321	2970	381	1300	441	1430	501	1210	561	1400	621	1430
22	1420	82	1790	142	1350	202	2720	262	1250	322	1250	382	1300	442	2370	502	1670	562	1330	622	1430
23	1730	83	2330	143	2180	203	2070	263	2050	323	1350	383	2110	443	1260	503	2030	563	1460	623	2080
24	1550	84	986	144	2350	204	1400	264	2160	324	1710	384	1410	444	2000	504	1260	564	2020	624	1380
25	1580	85	1040	145	1120	205	1990	265	1170	325	1100	385	2140	445	1860	505	1440	565	1040	625	2040
26	2230	86	1130	146	1150	206	1330	266	2050	326	1130	386	1650	446	2260	506	1570	566	2250	626	2170
27	1210	87	1430	147	2200	207	2460	267	2120	327	1890	387	1500	447	1140	507	1410	567	1360	627	1740
28	1420	88	1970	148	957	208	1100	268	1260	328	1390	388	2900	448	2520	508	1770	568	1860	628	1440
29	2080	89	3860	149	2130	209	1480	269	1970	329	2360	389	1150	449	2840	509	1040	569	1610	629	1960
30	1030	90	939	150	1280	210	1170	270	1940	330	1150	390	1360	450	1260	510	1520	570	1640	630	1830
31	1060	91	1940	151	1160	211	2150	271	3670	331	1540	391	2340	451	1410	511	2590	571	2400	631	1790
32	2020	92	1060	152	1220	212	1030	272	1220	332	2330	392	1630	452	1910	512	1990	572	1440	632	1800
33	2170	93	1390	153	1510	213	1870	273	2270	333	2120	393	1680	453	1170	513	1820	573	3630	633	2250
34	2020	94	2290	154	1860	214	2080	274	2060	334	1010	394	1280	454	1900	514	1450	574	2390	634	1730
35	2040	95	1170	155	1340	215	1260	275	1230	335	1040	395	1950	455	1090	515	1840	575	1560	635	2530
36	2310	96	1200	156	1830	216	2150	276	1210	336	2070	396	1990	456	1260	516	1640	576	2350	636	1170
37	1170	97	2210	157	1800	217	1460	277	1260	337	1480	397	2090	457	1270	517	1800	577	1300	637	1240
38	1490	98	1510	158	1840	218	1990	278	1210	338	1760	398	1560	458	2150	518	1240	578	1990	638	2020
39	1340	99	1270	159	1460	219	1710	279	2080	339	2440	399	1380	459	1130	519	1860	579	1430	639	1050
40	1380	100	2090	160	2100	220	1200	280	1270	340	1530	400	1900	460	1320	520	1300	580	2230	640	1450
41	2090	101	1760	161	2140	221	1360	281	1730	341	1890	401	3480	461	1340	521	2080	581	2900	641	2600
42	2130	102	1770	162	1790	222	1240	282	1960	342	1370	402	1220	462	1360	522	2440	582	960	642	1360
43	1120	103	1960	163	1020	223	1430	283	2270	343	1950	403	1440	463	2060	523	2510	583	1410	643	1400
44	2330	104	2680	164	1930	224	1450	284	1310	344	1380	404	1500	464	1270	524	1120	584	1510	644	1200
45	1230	105	2700	165	2170	225	2040	285	1460	345	1100	405	1800	465	1530	525	1210	585	1650	645	1760
46	1430	106	1420	166	1140	226	2090	286	2360	346	1350	406	862	466	2110	526	2180	586	1790	646	1780
47	2100	107	1120	167	1180	227	2600	287	1490	347	1250	407	1490	467	969	527	1790	587	2410	647	2360
48	2020	108	1190	168	2370	228	3080	288	4040	348	1440	408	2390	468	1240	528	1090	588	1980	648	1460
49	1270	109	1390	169	1490	229	1790	289	1270	349	1270	409	1900	469	1950	529	2000	589	2130	649	2500
50	1710	110	1620	170	1680	230	1810	290	2770	350	1230	410	1330	470	1210	530	1480	590	2420	650	1780
51	3630	111	4110	171	1450	231	1350	291	3430	351	1210	411	2560	471	1740	531	1920	591	2510	651	2090
52	986	112	1150	172	1360	232	1870	292	2480	352	2060	412	1190	472	3740	532	1250	592	1540	652	1470
53	1820	113	1410	173	2050	233	1790	293	2750	353	1170	413	2970	473	1250	533	1640	593	2010	653	1300
54	1840	114	1980	174	1120	234	2040	294	1670	354	2570	414	2110	474	1590	534	2050	594	2260		
55	1310	115	2210	175	1730	235	1240	295	1240	355	3240	415	1140	475	2810	535	1380	595	1260		
56	1840	116	1270	176	1840	236	1280	296	1270	356	3720	416	1650	476	1380	536	1790	596	2330		
57	1420	117	1100	177	1730	237	2150	297	1810	357	1080	417	1800	477	1960	537	2190	597	963		
58	2490	118	1920	178	905	238	845	298	1880	358	2290	418	1590	478	1190	538	2210	598	2160		
59	922	119	2250	179	1430	239	1520	299	1750	359	2590	419	1060	479	1270	539	1240	599	2080		
60	1250	120	2260	180	1820	240	1280	300	2220	360	1780	420	1220	480	1450	540	1500	600	1200		