

き裂を有する直交異方性長方形板の定常熱応力\*

須見尚文\*\*  
Naobumi SUMI

**Key Words:** Elasticity, Thermal Stress, Orthotropic, Crack, Complex Function

1. 緒言

熱負荷を受ける材料中に含まれるき裂などの欠陥が、材料の破壊の原因となることはよく知られている。このため、き裂先端近傍に生ずる特異熱応力を解析することは破壊力学の研究上重要な問題であり、等方性材料に関してはすでに多くの報告がなされている<sup>(1)~(4)</sup>。

近年、工業材料の多様化に伴い各種の異方性材料が出現してきたが、異方性材料は等方性材料と比較してその熱弾性的様相を異にすることが多く、き裂を有する異方性材料の特異熱応力の見直しが近年の破壊力学の分野での急務である。しかしながら、弾性定数の数の増加に伴って取扱いが複雑になること等が原因して、き裂を有する異方性材料の特異熱応力の報告はあまり見うけられない。

したがって本報では、定常温度場にあるき裂を有する直交異方性長方形板の特異熱応力を解析し、従来の等方性材料に対する解と比較するとともに、き裂寸法および熱弾性定数が応力拡大係数に与える影響を吟味した。解析においては、等角写像を用いた複素応力関数を使用し、き裂面での境界条件は解析接続の手法を用いて恒等的に満足させ、長方形境界での境界条件は境界点最小二乗法を用いて満足させることにより解を

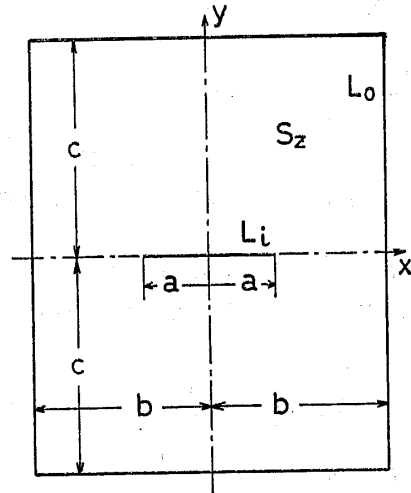


図1 き裂を有する直交異方性形板

得ている。

き裂面に関して対称および逆対称な応力状態に対して数値計算を行い結果を図示している。

2. 基礎式

直交異方性材料に対する二次元定常熱伝導方程式は

$$k_{11} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_{22} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

ただし、 $k_{11}$ ,  $k_{22}$  は熱伝導率である。また平面応力状態でのフックの法則は

$$\epsilon_{xx} = S_{11}\sigma_{xx} + S_{12}\sigma_{yy} + \alpha_{11}T, \quad \epsilon_{yy} = S_{12}\sigma_{xx} + S_{22}\sigma_{yy} + \alpha_{22}T, \quad \epsilon_{xy} = S_{66}\sigma_{xy} \dots\dots\dots (2)$$

ただし、 $S_{11}$ ,  $S_{12}$ ,  $S_{22}$ ,  $S_{66}$  は弾性係数、 $\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{22}$  は線膨張係数である。

さて図1に示す中心き裂を有する直交異方性長方形板を考える。 $z = x + iy$  とするとき、写像関数

$$z + \gamma_j \bar{z} = \frac{a}{2}(1 + \gamma_j)(\zeta_j + \zeta_j^{-1}) = W_j(\zeta_j) \quad (j=1, 2, 3) \dots\dots\dots (3)$$

により、 $z$  面のき裂  $L_i$  は  $\zeta_j$  面の単位円  $|\zeta_j|=1$  に変換され、 $z$  面の領域  $S_2$  は  $\zeta_j$  面の単位円の外部の有限領域  $S_{c_j}$  に変換される。このとき、平板内の温度は複素温度関数  $t(\zeta_3)$  により、また応力成分、変位成分および平板内の任意弧要素 AB に作用する力の合力は複素応力関数  $f(\zeta_1)$ ,  $g(\zeta_2)$ ,  $h(\zeta_3)$  によって、それぞれ次式で与えられる<sup>(5)~(7)</sup>。

$$T = t(\zeta_3) + \bar{t}(\bar{\zeta}_3) \dots\dots\dots (4)$$

\* 昭和56年3月19日 東海支部第30期総会講演会において講演、原稿受付 昭和56年4月23日。  
\*\* 正員、静岡大学教育学部 (〒422 静岡市大谷 836)。

$$\sigma_{xx} + i\sigma_{xy} = 2 \left\{ \gamma_1(1-\gamma_1) \frac{f'(\zeta_1)}{W_1'(\zeta_1)} - (1-\bar{\gamma}_1) \frac{\bar{f}'(\bar{\zeta}_1)}{\bar{W}_1'(\bar{\zeta}_1)} + \gamma_2(1-\gamma_2) \frac{g'(\zeta_2)}{W_2'(\zeta_2)} - (1-\bar{\gamma}_2) \frac{\bar{g}'(\bar{\zeta}_2)}{\bar{W}_2'(\bar{\zeta}_2)} + \gamma_3(1-\gamma_3) \frac{h'(\zeta_3)}{W_3'(\zeta_3)} - (1-\bar{\gamma}_3) \frac{\bar{h}'(\bar{\zeta}_3)}{\bar{W}_3'(\bar{\zeta}_3)} \right\} \dots (5)$$

$$\sigma_{yy} - i\sigma_{xy} = 2 \left\{ \gamma_1(1+\gamma_1) \frac{f'(\zeta_1)}{W_1'(\zeta_1)} + (1+\bar{\gamma}_1) \frac{\bar{f}'(\bar{\zeta}_1)}{\bar{W}_1'(\bar{\zeta}_1)} + \gamma_2(1+\gamma_2) \frac{g'(\zeta_2)}{W_2'(\zeta_2)} + (1+\bar{\gamma}_2) \frac{\bar{g}'(\bar{\zeta}_2)}{\bar{W}_2'(\bar{\zeta}_2)} + \gamma_3(1+\gamma_3) \frac{h'(\zeta_3)}{W_3'(\zeta_3)} + (1+\bar{\gamma}_3) \frac{\bar{h}'(\bar{\zeta}_3)}{\bar{W}_3'(\bar{\zeta}_3)} \right\} \dots (6)$$

$$u + iv = \delta_1 f(\zeta_1) + \rho_1 \bar{f}(\bar{\zeta}_1) + \delta_2 g(\zeta_2) + \rho_2 \bar{g}(\bar{\zeta}_2) + \delta_3 h(\zeta_3) + \rho_3 \bar{h}(\bar{\zeta}_3) \dots (7)$$

$$X + iY = 2i[\gamma_1 f(\zeta_1) + \bar{f}(\bar{\zeta}_1) + \gamma_2 g(\zeta_2) + \bar{g}(\bar{\zeta}_2) + \gamma_3 h(\zeta_3) + \bar{h}(\bar{\zeta}_3)] A^B \dots (8)$$

ただし、上式中の定数  $\gamma_1, \gamma_2$  は弾性係数に関する四次方程式

$$R(\gamma) = (s_{11} + s_{22} - 2s_{12} - s_{66})\gamma^4 + 4(s_{22} - s_{11})\gamma^3 + 2(3s_{22} + 3s_{11} + 2s_{12} + s_{66})\gamma^2 + 4(s_{22} - s_{11})\gamma + (s_{11} + s_{22} - 2s_{12} - s_{66}) \dots (9)$$

の  $R(\gamma) = 0$  を満足する  $|\gamma_j| < 1, \gamma_j \bar{\gamma}_j = 1$  なる 2 根であり、定数  $\gamma_3$  は熱伝導率により

$$\gamma_3 = (1 - \sqrt{k_{11}/k_{22}}) / (1 + \sqrt{k_{11}/k_{22}}) \dots (10)$$

また、式 (7) に含まれる定数  $\delta_j, \rho_j$  は

$$\delta_j = \left\{ -\frac{1}{2}(s_{11} + s_{22} - 2s_{12} + s_{66})\gamma_j^2 + (s_{11} - s_{22})\gamma_j - \frac{1}{2}(s_{11} + s_{22} - 2s_{12} - s_{66}) \right\} / \left\{ \gamma_j - \frac{1}{2} \frac{R(\gamma_j)}{\gamma_j S(\gamma_j)} (\alpha_{11} - \alpha_{22}) \right\} \dots (11)$$

$$\rho_j = -\frac{1}{2}(s_{11} + s_{22} - 2s_{12} + s_{66}) + (s_{11} - s_{22})\bar{\gamma}_j - \frac{1}{2}(s_{11} + s_{22} - 2s_{12} - s_{66})\bar{\gamma}_j^2 - \frac{1}{2} \frac{\bar{R}(\bar{\gamma}_j)}{\bar{S}(\bar{\gamma}_j)} (\alpha_{11} - \alpha_{22}) \dots (12)$$

で定義される。ただし

$$S(\gamma) = (\alpha_{22} - \alpha_{11})\gamma^2 + 2(\alpha_{11} + \alpha_{22})\gamma + (\alpha_{22} - \alpha_{11}) \dots (13)$$

なお、 $\gamma_1, \gamma_2$  は  $R(\gamma) = 0$  の根であるので、 $j = 1, 2$  に対して式 (11), (12) の右辺最後の項は零となる。

式 (5)~(8) は Green と Zerna<sup>(9)</sup> による等温問題の基礎式に熱による特解項  $h(\zeta_3)$  を付加して誘導されており、複素応力関数  $h(\zeta_3)$  は複素温度関数  $t(\zeta_3)$  と次式によって関係づけられる。

$$h'(\zeta_3) = -\frac{S(\gamma_3)}{R(\gamma_3)} W_3'(\zeta_3) t(\zeta_3) \dots (14)$$

直交異方性材料に対するき裂先端での応力の特異性は  $r^{-1/2}$  ( $r$  はき裂先端よりの距離) で表され<sup>(9)</sup>、応力拡大係数は次式で定義される。

$$K_I - iK_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} [\sqrt{2\pi r} (\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})_{y=0}] \dots (15)$$

これを複素変数を使って表示すれば

$$K_I - iK_{II} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \lim_{z \rightarrow a} [(z^2 - a^2)^{1/2} (\sigma_{yy} - i\sigma_{xy})] = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \lim_{\zeta_j \rightarrow 1} \left[ \frac{\zeta_j W_j'(\zeta_j)}{1 + \gamma_j} (\sigma_{yy} - i\sigma_{xy}) \right] \dots (16)$$

### 3. 解 析

2章の基礎式の応用として、本論では (1) 応力状態がき裂面に関して対称な場合、および (2) 応力状態がき裂面に関して逆対称な場合の特異熱応力を考える。

**3.1 応力状態がき裂面に関して対称な場合** 温度の境界条件として、き裂面および長方形境界がそれぞれ一定温度  $T_i$  および  $T_0$  に保たれている場合を考える。すなわち

(a) き裂面 ( $z \in L_i$ ) で  $T = T_i \dots (17)$

(b) 長方形境界 ( $z \in L_0$ ) で

$$T = T_0 \dots (18)$$

このとき、領域の対称性により温度分布は  $z$  面、したがって  $\zeta_j$  面の実軸および虚軸に関して対称となる。このとき、境界条件、式 (17) および対称性を満足する温度関数は次式で与えられる。

$$T = T_i + t_0 (\log \zeta_3 + \log \bar{\zeta}_3) + \sum_{n=1}^{\infty} t_{2n} (\zeta_3^{2n} + \bar{\zeta}_3^{2n} - \zeta_3^{-2n} - \bar{\zeta}_3^{-2n}) \dots (19)$$

ただし、 $t_0, t_{2n}$  は実数である。式 (19) の  $\sum_{n=1}^{\infty}$  を有限項の  $\sum_{n=1}^N$  で近似し、 $(N+1)$  個の未定係数  $t_0, t_{2n}$  を境界条件式 (18) より境界点最小二乗法を用いて決

定すれば問題の温度関数が定まる。

このとき、式 (14) から導かれる複素応力関数  $h(\zeta_3)$  は本問題に対して次式となる。

$$h(\zeta_3) = -\frac{S(\gamma_3)}{R(\gamma_3)} \frac{a}{2} (1+\gamma_3) \left[ \frac{T_i}{2} (\zeta_3 + \zeta_3^{-1}) - t_0 (\zeta_3 - \zeta_3^{-1}) + t_0 (\zeta_3 + \zeta_3^{-1}) \log \zeta_3 \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^N t_{2n} \left\{ \frac{\zeta_3^{2n+1}}{2n+1} + \frac{\zeta_3^{-2n+1}}{2n-1} - \frac{\zeta_3^{2n-1}}{2n-1} - \frac{\zeta_3^{-2n+1}}{2n+1} \right\} \right] \dots\dots\dots (20)$$

次に、応力の境界条件として、き裂面および長方形境界で応力自由な場合を考える。式 (8) より境界条件は

(a) き裂面 ( $z \in L_i$ ) で

$$\gamma_1 f(\zeta_1) + \bar{f}(\bar{\zeta}_1) + \gamma_2 g(\zeta_2) + \bar{g}(\bar{\zeta}_2) = -\gamma_3 h(\zeta_3) - \bar{h}(\bar{\zeta}_3) \dots\dots\dots (21)$$

(b) 長方形境界 ( $z \in L_0$ ) で

$$\gamma_1 f(\zeta_1) + \bar{f}(\bar{\zeta}_1) + \gamma_2 g(\zeta_2) + \bar{g}(\bar{\zeta}_2) = -\gamma_3 h(\zeta_3) - \bar{h}(\bar{\zeta}_3) \dots\dots\dots (22)$$

式 (21), (22) を満足する複素応力関数  $f(\zeta_1)$ ,  $g(\zeta_2)$  を求めるにあたり、解析接続の手法を導入する。いま  $\zeta_2$  面の領域  $S_{\zeta_2}$  の、単位円  $|\zeta_2|=1$  に関する反転領域を  $S_{\zeta_2}^*$  として、 $f(\zeta_2)$  の  $S_{\zeta_2}$  から  $S_{\zeta_2}^*$  への解析接続を次式で定義する。

$$(\gamma_2 - \gamma_1) f(\zeta_2) = -(\bar{\gamma}_1 \gamma_2 - 1) \bar{f}\left(\frac{1}{\zeta_2}\right) - (\gamma_2 \bar{\gamma}_2 - 1) \bar{g}\left(\frac{1}{\zeta_2}\right) \\ - (\gamma_2 - \gamma_3) h(\zeta_2) - (\gamma_2 \bar{\gamma}_3 - 1) \bar{h}\left(\frac{1}{\zeta_2}\right) \quad (\zeta_2 \in S_{\zeta_2})^* \dots\dots\dots (23)$$

反転の定義により、 $\zeta_2$  を  $1/\bar{\zeta}_2$  で置きかえ、共役形をとれば、次式を得る。

$$g(\zeta_2) = \frac{1}{1 - \gamma_2 \bar{\gamma}_2} \left[ (\gamma_1 \bar{\gamma}_2 - 1) f(\zeta_2) + (\bar{\gamma}_2 - \bar{\gamma}_1) \bar{f}\left(\frac{1}{\zeta_2}\right) \right. \\ \left. + (\bar{\gamma}_2 - \bar{\gamma}_3) \bar{h}\left(\frac{1}{\zeta_2}\right) + (\bar{\gamma}_2 \gamma_3 - 1) h(\zeta_2) \right] \quad (\zeta_2 \in S_{\zeta_2}) \dots\dots\dots (24)$$

き裂面に対応する点では  $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = 1/\bar{\zeta}_2$  であり、 $f(\zeta_1) = f(\zeta_2) = f(1/\bar{\zeta}_2)$ ,  $h(\zeta_2) = h(\zeta_3) = h(1/\bar{\zeta}_2)$  であるので、式 (24) を式 (21) に代入すれば、き裂面での境界条件式 (21) は恒等的に満足されていることがわかる。また、式 (24) より、 $g(\zeta_2)$  は  $f(\zeta_2)$  と  $h(\zeta_2)$  で表されるので、応力成分、変位成分も  $f(\zeta_j)$  と  $h(\zeta_j)$  の関数形で表示することができ、したがって残る長方形境界での境界条件式 (22) より複素応力関数  $f(\zeta_j)$  を決定すればすべての問題が解決することになる。式 (24) を式 (22) に代入すれば、長方形境界に対応する点で  $f(\zeta_j)$  が満足しなければならない条件式として次式を得る。

$$(1 - \gamma_2 \bar{\gamma}_2) \gamma_1 f(\zeta_1) + (1 - \gamma_2 \bar{\gamma}_2) \bar{f}(\bar{\zeta}_1) + \gamma_2 (\gamma_1 \bar{\gamma}_2 - 1) f(\zeta_2) + (\bar{\gamma}_2 - \bar{\gamma}_1) \gamma_2 \bar{f}\left(\frac{1}{\zeta_2}\right) \\ + (\bar{\gamma}_1 \gamma_2 - 1) \bar{f}(\bar{\zeta}_2) + (\gamma_2 - \gamma_1) f\left(\frac{1}{\bar{\zeta}_2}\right) = - (1 - \gamma_2 \bar{\gamma}_2) \gamma_3 h(\zeta_3) - (1 - \gamma_2 \bar{\gamma}_2) \bar{h}(\bar{\zeta}_3) \\ - (\bar{\gamma}_2 - \bar{\gamma}_3) \gamma_2 \bar{h}\left(\frac{1}{\bar{\zeta}_2}\right) - (\bar{\gamma}_2 \gamma_3 - 1) \gamma_2 h(\zeta_2) - (\gamma_2 - \gamma_3) h\left(\frac{1}{\bar{\zeta}_2}\right) - (\gamma_2 \bar{\gamma}_3 - 1) \bar{h}(\bar{\zeta}_2) \dots\dots\dots (25)$$

領域および温度の対称性により応力分布は  $z$  面したがって  $\zeta_j$  面の実軸および虚軸に関して対称となる。このとき、応力の対称性および一価性を保障する  $f(\zeta_j)$  は本問題に対して次式で与えることができる。

$$f(\zeta_j) = F(\zeta_j + \zeta_j^{-1}) \log \zeta_j + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{2n+1} \zeta_j^{2n+1} \dots\dots\dots (26)$$

ただし、 $F$ ,  $\alpha_{2n+1}$  は実数である。上式中の定数  $F$  は、き裂を囲む任意閉曲線を 1 周する輪道  $\Gamma$  に関して変位が一価となる条件、すなわち式 (7) より  $[u+iv]_{\Gamma} = 0$  なる条件より決定される。

直交異方性材料に対して式 (9) の二根  $\gamma_1, \gamma_2$  は共に実数 ( $\gamma_1 = \bar{\gamma}_1, \gamma_2 = \bar{\gamma}_2$ ) があるいはたがいに複素共役 ( $\gamma_1 = \bar{\gamma}_2, \gamma_2 = \bar{\gamma}_1$ ) のいずれかである<sup>(9)</sup>。また式 (10) で定義される  $\gamma_3$  は実数である。したがって式 (11), (12) で定義される定数  $\delta_j, \rho_j$  ( $j=1, 2$ ) も共に実数かあるいはたがいに複素共役となり、定数  $\delta_3, \rho_3$  は実数となる。このとき定数  $F$  は

$$F = -\frac{a}{2} t_0 \frac{S(\gamma_3)}{R(\gamma_3)} (1+\gamma_3) \frac{\{(1-\gamma_3)(\delta_2 - \bar{\rho}_2) - (1-\gamma_2)(\delta_3 - \bar{\rho}_3)\}}{\{(1-\gamma_2)(\delta_1 - \bar{\rho}_1) - (1-\gamma_1)(\delta_2 - \bar{\rho}_2)\}} \dots\dots\dots (27)$$

したがって、式 (26) の  $\sum_{-\infty}^{\infty}$  を有限項の  $\sum_{-N+1}^N$  で近似し、 $2N$  個の未定係数  $\alpha_{2n+1}$  を境界条件式 (25) より境界点最小二乗法を用いて決定すれば問題の複素応力関数が定まる。

このとき、本問題に対する応力拡大係数は式 (16) より決定され、次式を得る。

$$K_I = 4\sqrt{\frac{\pi}{a}} \frac{\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_2(\bar{\gamma}_1 - \bar{\gamma}_2)}{1 - \gamma_2\bar{\gamma}_2} \left\{ 2F + \sum_{-N+1}^N (2n+1)\alpha_{2n+1} \right\}, \quad K_{II} = 0 \dots\dots\dots(28)$$

**3.2 応力状態がき裂面に関して逆対称な場合** ここでは、図1の中心き裂を有する直交異方性長方形板において、虚軸方向の一樣熱流がき裂面でこう乱される場合の特異熱応力を考える。温度の境界条件は

(a) き裂面で

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots(29)$$

(b) 長方形境界で

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad x = \pm b, \quad |y| < c, \quad T = \pm T_0, \quad |x| < b, \quad y = \pm c \dots\dots\dots(30)$$

この場合、温度分布は実軸に関して逆対称、虚軸に関して対称となる。このとき、境界条件式 (29) および対称性を満足する温度関数は次式で与えられる。

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} t_{2n-1} (\zeta_3^{2n-1} - \bar{\zeta}_3^{2n-1} - \zeta_3^{-2n+1} + \bar{\zeta}_3^{-2n+1}) \dots\dots\dots(31)$$

ただし、 $t_{2n-1}$  は純虚数である。前節と同様に式 (31) の  $\sum_{n=1}^{\infty}$  を有限項の  $\sum_{n=1}^N$  で近似して、 $N$  個の未定係数  $t_{2n}$  を境界条件式 (30) より境界点最小二乗法を用いて決定すれば温度関数が定まる。このとき、式 (14) より

$$h(\zeta_3) = -\frac{S(\gamma_3)}{R(\gamma_3)} \frac{a}{2} (1 + \gamma_3) \left[ -2t_1 \log \zeta_3 + t_1 \left( \frac{\zeta_3^2}{2} - \frac{\zeta_3^{-2}}{2} \right) + \sum_{n=2}^N t_{2n-1} \left\{ \frac{\zeta_3^{2n}}{2n} + \frac{\zeta_3^{-2n+2}}{2n-2} - \frac{\zeta_3^{2n-2}}{2n-2} - \frac{\zeta_3^{-2n}}{2n} \right\} \right] \dots\dots\dots(32)$$

応力の境界条件として、前節と同じく、き裂面および長方形境界で応力自由とすれば、境界条件は式 (21), (22) で与えられる。このとき、解析接続の手法を用いれば式 (24) が成立し、き裂面での境界条件は恒等的に満足され、残る長方形境界での境界条件式は (25) となる。領域および温度の対称性より、本問題では応力分布は実軸に関して逆対称、虚軸に関して対称となるので、応力の対称性および一価性を保障する  $f(\zeta_j)$  は次式で与えることができる。

$$f(\zeta_j) = G \log \zeta_j + \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_{2n} \zeta_j^{2n} \dots\dots\dots(33)$$

ただし、 $G, \alpha_{2n}$  は純虚数である。定数  $G$  は変位の一価性より決定され次式となる。

$$G = \frac{a}{2} 2t_1 \frac{S(\gamma_3)}{R(\gamma_3)} (1 + \gamma_3) \frac{\{(1 + \gamma_3)(\delta_2 + \bar{\rho}_2) - (1 + \gamma_2)(\delta_3 + \bar{\rho}_3)\}}{\{(1 + \gamma_2)(\delta_1 + \bar{\rho}_1) - (1 + \gamma_1)(\delta_2 + \bar{\rho}_2)\}} \dots\dots\dots(34)$$

前節と同様に、式 (33) の  $\sum_{-\infty}^{\infty}$  を有限項の  $\sum_{-N+1}^N$  で近似し、 $2N$  個の未定係数  $\alpha_{2n}$  を境界条件式 (25) より境界点最小二乗法により決定すれば複素応力関数が定まる。

また応力拡大係数は式 (16) より次式となる。

$$K_I = 0, \quad K_{II} = i4\sqrt{\frac{\pi}{a}} \frac{\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_2(\bar{\gamma}_1 - \bar{\gamma}_2)}{1 - \gamma_2\bar{\gamma}_2} \left\{ G + \sum_{-N+1}^N 2n\alpha_{2n} \right\} \dots\dots\dots(35)$$

**4. 数値計算および考察**

通常用いられる直交異方性材料の縦弾性係数 ( $E_x, E_y$ ), ポアソン比 ( $\nu_x, \nu_y$ ), 横弾性係数  $G_{xy}$ , 線膨張係数 ( $\alpha_x, \alpha_y$ ) および熱伝導率 ( $k_x, k_y$ ) と本報での材料定数は次式の関係にある。

$$\left. \begin{aligned} s_{11} &= 1/E_x, & s_{12} &= -\nu_x/E_x = -\nu_y/E_y, & s_{22} &= 1/E_y, & s_{66} &= 1/G_{xy} \\ \alpha_{11} &= \alpha_x, & \alpha_{22} &= \alpha_y, & k_{11} &= k_x, & k_{22} &= k_y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(36)$$

これらの材料定数が応力拡大係数に与える影響を吟味するために、弾性係数は  $s_{11}$  を、線膨張係数は  $\alpha_{11}$  を、熱伝導率は  $k_{11}$  を基準にとって、すなわち

$$\left. \begin{aligned} s_{11}^* &= s_{11}/s_{11}, & s_{12}^* &= s_{12}/s_{11}, & s_{22}^* &= s_{22}/s_{11}, & s_{66}^* &= s_{66}/s_{11} \\ \alpha_{11}^* &= \alpha_{11}/\alpha_{11}, & \alpha_{22}^* &= \alpha_{22}/\alpha_{11}, & k_{11}^* &= k_{11}/k_{11}, & k_{22}^* &= k_{22}/k_{11} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(37)$$

として、表1に示すような材料定数の比をもつ直交異方性材料について数値計算を行った。表中の材料 I はポ

アソシエイト0.3の等方性材料に対応し、材料Ⅱは  $s_{66}$  のみが等方性材料のそれの2倍となった材料に対応している。本論文での基礎式は、すべての弾性係数が等方性材料のそれに一致する場合（材料Ⅰ、Ⅳ、Ⅴ）には式(9)より  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$  となり、また熱伝導率が等方性材料のそれに一致する場合（材料Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ）には式(10)より  $\gamma_3 = 0$  となり、式(4)~(8)の形の解が用いられなくなるので、これらの場合には弾性係数は  $s_{66}$  を0.05%、熱伝導率は  $k_{22}$  を0.5%等方性材料のそれより大きくとって解を得ている。このことは、本報での材料Ⅰに対する解が文献(4)による等方性材料の解とほぼ一致することより妥当と考えられた。

表1 材料定数

材料	弾性係数				線膨張係数		熱伝導率	
	$s_{11}^*$	$s_{12}^*$	$s_{22}^*$	$s_{66}^*$	$\alpha_{11}^*$	$\alpha_{22}^*$	$k_{11}^*$	$k_{22}^*$
Ⅰ	1	-0.3	1	2.6	1	1	1	1
Ⅱ	1	-0.3	1	5.2	1	1	1	1
Ⅲ	1	-0.3	0.5	2.6	1	1	1	1
Ⅳ	1	-0.3	1	2.6	1	0.5	1	1
Ⅴ	1	-0.3	1	2.6	1	1	1	0.5

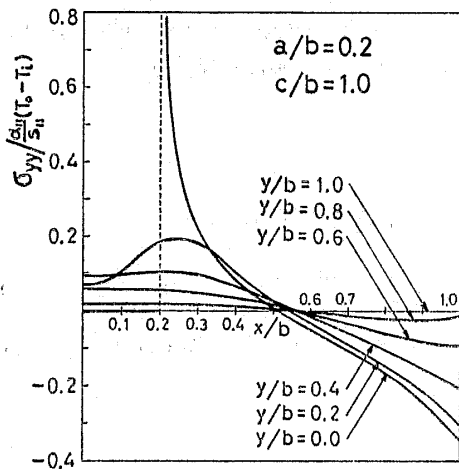


図2 材料Ⅰに対する  $\sigma_{yy}$  の分布

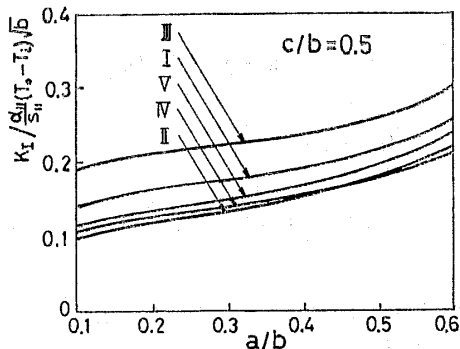


図3 応力拡大係数  $K_I$  ( $c/b=0.5$ )

応力状態がき裂面に関して対称な場合の数値結果を図2~5に示す。  $T_0 > T_i$  として、  $T^* = (T - T_i) / (T_0 - T_i)$ 、すなわち、き裂面で  $T^* = 0$ 、長方形境界で  $T^* = 1$  なる無次元温度場に対して数値計算を行い、熱応力は  $\alpha_{11} / s_{11} (T_0 - T_i)$  で、応力拡大係数は  $\alpha_{11} / s_{11} (T_0 - T_i) \sqrt{b}$  でそれぞれ無次元化している。図2は  $[a/b = 0.2, c/b = 1.0]$  の材料Ⅰに対する  $\sigma_{yy}$  の分布を示す。他の材料に対する  $\sigma_{yy}$  の分布も図2と同様の傾向を示す。図3, 4, 5はそれぞれ  $c/b = 0.5, 1.0, 2.0$  に対する各材料の応力拡大係数  $K_I$  をき裂寸法  $a/b$  に対して示す。  $s_{22}$  と  $\alpha_{22}$  が  $K_I$  に対して大きな影響を与えることがわかる。

応力状態がき裂面に関して逆対称な場合の数値結果を図6~9に示す。  $T^* = T / T_0$  なる無次元温度場に対して数値計算を行い、熱応力は  $(\alpha_{11} / s_{11}) T_0$  で、応力拡大係数は  $(\alpha_{11} / s_{11}) T_0 \sqrt{b}$  でそれぞれ無次元化して

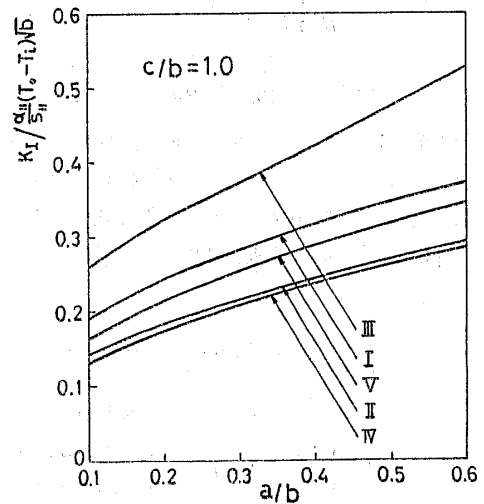


図4 応力拡大係数  $K_I$  ( $c/b=1.0$ )

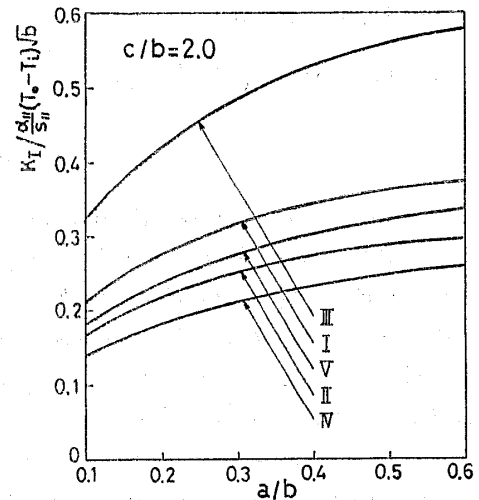


図5 応力拡大係数  $K_I$  ( $c/b=2.0$ )

いる。図6は  $[a/b=0.2, c/b=1.0]$  の材料 I に対する  $\sigma_{xy}$  の分布を示す。図7, 8, 9はそれぞれ  $c/b=0.5, 1.0, 2.0$  に対する各材料の応力拡大係数  $K_{II}$  を  $a/b$  に対して示す。 $s_{22}$  と  $k_{22}$  が  $K_{II}$  に対して大きな影響を与えることがわかる。

本報での解法は、き裂面での境界条件を解析接続の手法を用いて恒等的に満足させ、長方形境界での境界条件は、方程式の数が未定係数の数の1.5倍程度となる適合辺点を選んだ境界点最小二乗法<sup>(10)</sup>を用いて近

似的に満足させている。この近似計算の精度は、長方形境界での境界条件が適合辺点以外でも十分満足されているかどうかということと、温度関数、式(19)、(31)、複素応力関数、式(26)、(33)における近似項数  $N$  の増加による応力拡大係数の収束の様子でチェックしている。表2は応力状態がき裂面に関して対称な場合(3.1節)の項数  $N$  の増加による応力拡大係数を示している。 $a/b, c/b$  の極端に大きなあるいは小さな場合については精度の低下が見られるが、本報に示す数値計算の範囲内では、 $N=10$  項程度とれば実用上満足できる精度の解が得られる。

本報での数値計算は定数  $\gamma_1, \gamma_2$  が実数である表1に示す材料に対する解のみを得たが、その他の直交異方性材料、さらに一般的異方性材料に対しても、本報での解法はそのまま適用でき、本報での解析で応力拡大係数が負となる材料に対しては  $T_0 < T_i$  なる表面温度を規定するものとする。

最後に、本論文の作成に適切なる助言をいた

表2 近似項数  $N$  と応力拡大係数  $K_I \frac{\alpha_{11}}{s_{11}} (T_0 - T_i) \sqrt{b}$

材 料	$a/b=0.2, c/b=1.0$			$a/b=0.5, c/b=1.0$		
	10	15	20	10	15	20
I	0.245 12	0.245 12	0.245 12	0.346 96	0.347 06	0.347 07
II	0.184 07	0.184 11	0.184 11	0.268 94	0.268 93	0.268 93
III	0.324 75	0.324 73	0.324 73	0.474 40	0.474 75	0.474 76
IV	0.175 18	0.175 18	0.175 18	0.263 86	0.263 95	0.263 95
V	0.216 02	0.216 03	0.216 03	0.319 24	0.319 35	0.319 36

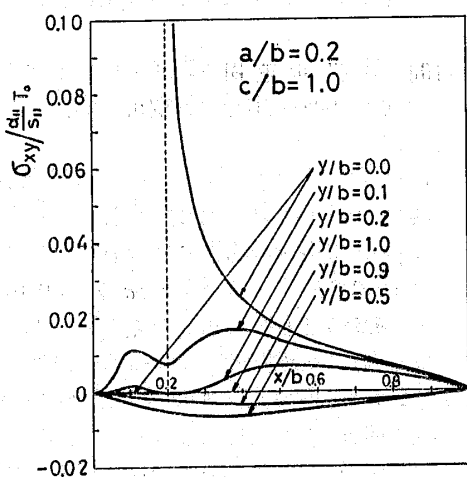


図6 材料 I に対する  $\sigma_{xy}$  の分布

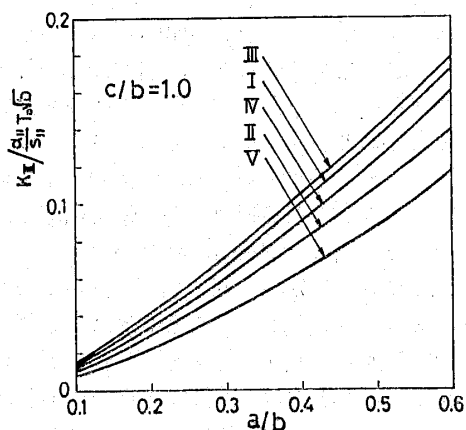


図8 応力拡大係数  $K_{II}(c/b=1.0)$

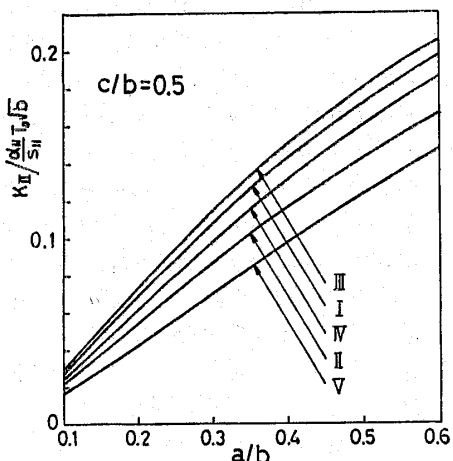


図7 応力拡大係数  $K_{II}(c/b=0.5)$

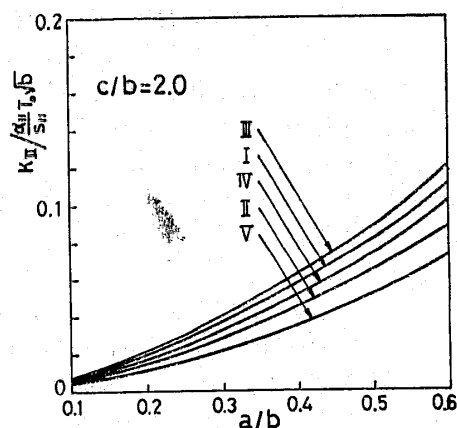


図9 応力拡大係数  $K_{II}(c/b=2.0)$

だいた大阪府立大学, 竹内洋一郎教授ならびに関谷  
壯教授に謝意を表す。

### 文 献

- (1) Sih, G.C., *Trans. ASME, Ser. E*, 29-3 (1962), 587.
- (2) Koizumi, T., ほか3名, *J. Thermal Stresses*, 2-3/4 (1979), 341.
- (3) Sekine, H., *Eng. Fract. Mech.*, 7-2 (1975), 713.
- (4) Sumi, N. and Katayama, T., *Nucl. Eng. Dcs.*, 60-1 (1980), 389.
- (5) Chen, W.T., *Trans. ASME, Ser. E*, 34-1 (1967), 133.
- (6) Chen, W.T., *Q. Appl. Math.*, 21-1 (1969), 115.
- (7) Sumi, N. and Sekiya, T., *Nucl. Eng. Des.*, 41-1 (1977), 19.
- (8) Green, A.E. and Zerna W., *Theoretical Elasticity*, (2nd ed.), (1968), 206, Clarendon Press.
- (9) Sih, G.C., ほか2名, *Int. J. Fract. Mech.*, 1-3 (1965), 189.
- (10) Hulbert, L.E., *Trans. ASME, Ser. B*, 92-2 (1970), 339.

### 討 論

〔質問〕 谷川 義信 (大阪府立大学工学部)

き裂の有る弾性体の熱応力問題を巧みに解析されている内容に対し、敬意を表す。

(1) 応力拡大係数  $K_I$ ,  $K_{II}$  について示された図 (図3~5, 7~9) では,  $a/b$  が 0.1~0.6 の範囲で示されているが, き裂が更に大きくなった場合, その挙動は, 定性的に, どの様な傾向を示すのか. また, 数値計算上, 特に困難な点が有れば, ご教示願いたい。

(2) 909 ページ左欄 4 行めに「… $K_{II}$  に対して  $s_{22}$  と  $k_{22}$  が大きな影響を与える…」とあるが, 図 7~9 を拝見する範囲では,  $s_{22}$  の影響はあまり大きくない様に思われる。どの様に解釈すべきか。

(3) 熱応力問題では, 加熱条件の設定次第では, 加熱初期より定常状態に至るまでの過渡状態において最大熱応力の発生が認められる場合が多くみられると思う。そこで, 本研究とは直接関与しないかもしれないが, き裂の有る弾性体の非定常熱応力問題について, 著者のご見解をご教示願いたい。

〔回答〕 (1)  $a/b$  が 1 に近づくにつれ, き裂先端での肉厚が極端に薄くなる形状の影響で応力拡大係数は急激に増加するものと思われるが,  $a/b$  が更に大きくなった場合の数値計算も今後の検討課題としたいと考えている。本解法は,  $z$  面のき裂を有する長方形板を  $\zeta_j$  面の単位円の外部有限領域に写像し, 解析接続された複素応力関数を写像領域でのローラン級数に展開し, その未定係数を境界点最小二乗法で決定する方法をとっている。この方法で精度よい解を得る限界は写像領域の形状に依存し,  $a/b$  が 1 に近づく程, 写像領域は単位円を有する薄肉長方形あるいは帯板の形状に近くなり, このような領域に対して解を得るにはより多くの項数を取らなければならない, それだけ多元連立一次方程式の条件が悪くなり数値計算上の困難さが増加する。

(2) 本論文では, き裂を有する直交異方性材料の特異熱応力の解析法を示し, 表 1 の材料に対する  $K_I$ ,  $K_{II}$  を数値結果として得たが, 結果が示すように材料定数の値により  $K_I$ ,  $K_{II}$  は等方性材料に比べてその値が変化し, 等方性材料に対する特異熱応力の見直し

といった意味でも意義があると考えている。より多くの材料, 形状に対する数値結果は示し得なかったが, 破壊力学の観点からは  $K_I$ ,  $K_{II}$  のわずかな増減も大きな意味を持ち, 材料 III は等方性材料より  $K_I$ ,  $K_{II}$  が大きくなる事も興味深いと考えている。

(3) ご指摘のようにき裂を有する弾性体の非定常熱応力問題は, 定常熱応力問題との比較という意味を含めて, 今後検討されなければならない重要問題の一つだと考えている。著者の知る限りでは, この種の問題の非定常問題はほとんど報告されていないように思う。

〔質問〕 関根 英樹 (東北大学工学部)

やっかいな問題を手際よく解析されたことに敬意を表す。

図 3~5, 7~9 において応力拡大係数は  $a/b$  の値が 0.1~0.6 の範囲でしか示されていないが, き裂端が長方形板の境界に近づくにつれて応力拡大係数は急激に増加することが予想され  $a/b$  が 0.6 より大きい場合の応力拡大係数の値を算定することも重要と思われる。本解法によれば精度の良い解が得られるのは  $a/b$  の値がどの程度 1 に近い場合までなのか。

〔回答〕 本解法は,  $z$  面のき裂を有する長方形板を  $\zeta_j$  面の単位円の外部有限領域に写像し, 解析接続された複素応力関数を写像領域でのローラン級数に展開し, その未定係数を長方形境界での条件を満足するように境界点最小二乗法を用いて決定している。したがって, この方法で精度よい解を得る限界は形状係数  $a/b$ ,  $c/b$  および弾性定数  $\gamma_j$  の値により定まる写像領域の形状に依存する。 $a/b$  が 1 に近づく程, 写像領域は「単位円孔を有する薄肉の長方形あるいは帯板」の形状に近くなり, このような領域に対して解を得るには, より多くの項数を取らなければならない, また項数の増加と共に連立一次方程式の条件が悪くなり, 数値計算上の困難さが増す。ご指摘の  $a/b$  が極端に 1 に近い場合までの数値計算は実行しておらず今後の検討課題としたいと思うが, 本論文での形状および材料に対しては,  $a/b$  が 0.8 程度までなら, 通常の数値計算方法で解が得られると考えている。