静岡大学教育学部附属教育実践総合センター紀要　　No.10 p.11～22 (2004)

作図から証明への過程を重視した「相似な図形」の学習指導

Teaching Similarity of Geometrical Figures Emphasized Learning Process from Constructing to Proving

－An Improvement in Teaching Geometry in Lower Secondary School, The Fourth Report－

榛葉伸吾*・園田博人*・国宗　進**

Shingo SHINBA, Hiroto SONODA, and Susumu KUNIMUNE

(平成15年12月18日受理)

This study focusses on teaching and learning geometry in lower secondary school.

We had already proposed basic principles to make lesson plan about geometry from seventh grade to ninth. Based on this principles, we had made a plan about every lessons and taught it.

By observing practical lessons and analyzing their writings on these lessons, we pointed out the possibility that we teach the propositions about the triangles, quadrilaterals and so on at eighth grade by the method that students and teacher proceed the lessons according to the order that students want to check and prove the problems.

This report points out too about teaching similarity of geometrical figures, it is better we take the process that at first students construct the figures, then prove whether the way of constructing are good or not. In these lessons, many students had learned geometry with great interest and understood the way of deductive reasoning.

1．研究のねらい

本研究は，中学校3年間を見通した図形についての学習指導のあり方を，授業実践を通して検討することを目的としている．

その継続研究の一環として，本稿では，これまでの成果をふまえて，「相似な図形」の学習に関する授業モデルを提案し，授業改善の方向を探ることがねらいである．

2．図形指導改善の「基本的な考え方」

筆者らはこれまでに，中学校での図形の学習指導についての問題点を検討し，中学校3年間を見通した授業計画を立てて実践してきた（羽田他，2001，2002；榛葉他，2002，2003)．その実践は，次の①から⑥に示す図形の学習指導改善の「基本的な考え方」に基づいている（国宗，1998，国宗・羽田・榛葉，1999.)

＊附属島田中学校教諭　　＊＊数学教育教授

① 図形指導のねらいを明確にする．
② 中１の内容を，空間図形と多角形の角で構成する．
③ 基本作図を単独では扱わない．
④ 小学校で学習した性質は既知として，その逆の追究から始める．
⑤ 作図等を通して直観的に確認したことを定式化する．
⑥ 円の内容を軽減して扱う．

このような方針で授業実践を繰り返した結果，その成果として，次の点が得られた（羽田他, 2002; 榛葉他, 2003）．ここでは，特に中２以降の学習指導について簡単にあげておく．

・わかりきったことを証明するのではなく，作図してその方法が正しいかどうかを証明するという授業を行ったことにより，生徒たちは大変意欲的に取り組んだ．
・論証の授業に新鮮さが生まれた．
・生徒たちから出された課題を中心に授業を構成したが，教科書で扱われる定理はすべて授業でも出され共有された．

3．授業モデルの基本的な考え

上記の成果をふまえ，ここでは「相似な図形」の学習指導の改善について提案する．それは，特に以下の２点に重点があり，上記「基本的な考え方」の③と⑤に深く関わっている．

１）図形の論証のおもしろさや楽しさを「相似な図形」の学習で伝えよう．
２）「相似の考え」の理解度が低くならないように，作図を積極的に取り入れよう．

本稿で提案する授業モデルの特徴は，作図を積極的に取り入れている点である．従来の「相似な図形」の学習指導は，次の授業１や授業２のような形式が多いであろう．

〈授業1〉 ①定理を知る→②定理を証明する→③定理を活用する
〈授業2〉 ①問題を解く→②定理を発見する→③定理を証明する→④定理を活用する

授業１では，まず教師が生徒に定理を示し，それを証明するという展開になる．生徒は，どうしてその定理をとりあげるのか，どうしてその順番で証明するのかといった疑問を抱いたまま学習することになりがちである．

授業２では，１つの定理を発見するために１つの問題を扱う．単元全体では問題間につながりがなく，生徒にとっては，あらかじめ定理を発見するために教師によって用意された問題を解くことの繰り返しになる．

授業１や２は，定理を系統的に学習するにはよい方法である．しかし，生徒の側からすると，受け身の学習になり与えられた問題を解くことに終始しがちになるという問題点がある．

できるならば，教師が問題を次々と提示するという形式から脱却したい．それだけでなく，生徒が主体的に学び，しかも教科書の定理をすべて扱うような授業をめざしたい．

「相似な図形」は，新学習指導要領では中２から中３へと指導学年が移行された．つまり，三平方の定理とともに中学校数学科での図形学習の到達点という位置づけである．だからこそ，これまでの学習内容や方法を十分に活用し，生き生きと学習に取り組む姿を期待したい．

そんな思いをこめて，以下に述べるような「相似な図形」についての授業モデルを考えた．

なお，対象生徒は，「平行線をかく」「等しい角を移す」作図について第２学年で学習済みであるが，ここでは，例えば平行線をその方法で作図することまでは要求しない．三角定規をずらしてかくが，定規とコンパスだけでかくこともできる，という了解に基づいている．

4．「相似な図形」の構成と授業展開

この単元を３つの作図問題を中心に構成しようというのが，本稿の提案である．それに対応させて小単元も次の３つとした．

次	小単元	内容
1　次	三角形の相似条件	相似な図形の意味，相似条件，相似な三角形を見つける，相似であることの証明
2　次	相似の位置	相似の位置，相似の中心
3　次	線分の三等分	中点連結定理，平行線と比，比と平行線

いずれの小単元でも作図を取り入れる．生徒は個々に目的の図を描くことをめざして追究する．そして，全体の場で，いろいろな作図方法が提案される．その中には，全員が正しいと認める方法は勿論のこと，本当に正しいかどうかがすぐにはわからないものや，その点に関する生徒の意見が分かれるものもある．そこで，本当に正しいかどうかを確かめようという展開で授業が進む．

このような授業の流れは，子どもが追究したいことや意欲に合致していて，実に自然である．生徒から提案された作図の方法について考察するので，証明に対する意欲も高まり，証明することの必要性も生徒に自覚できるし，授業がより活動的になる．

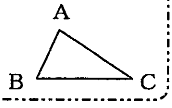
5．取り上げる作図問題と授業の構想

ここでは，取り上げる作図問題を中心に，授業の構想を述べる．

(1) 三角形の相似条件

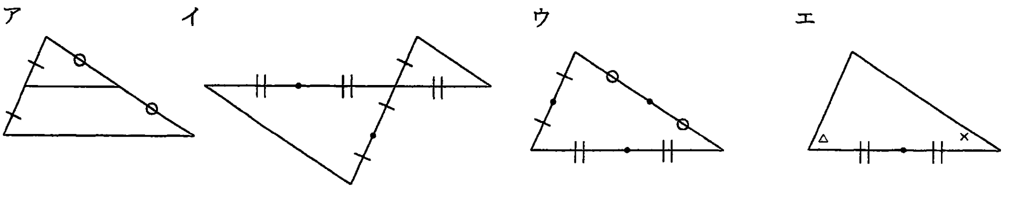
作図問題 (1)

△ＡＢＣを２倍に拡大しよう．



新教育課程では小学校で拡大図，縮図が扱われなくなったことも踏まえ，作図という操作活動を通して「相似の考え」の理解を一層深めることもねらって，単元のはじめの作図としてこの問題を取り入れた．この問題に取り組むまでに，相似な図形の意味は取り扱っておく．

ここでは次のような作図方法が出されるであろう．

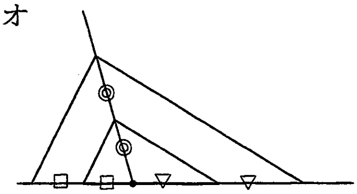


ア〜エのような方法が出され，学級全体で確かに２倍の拡大図になっていることを確認したら，３つの相似条件をクラスで共有する．

その際，もしアやイのような作図方法が発表されたら，ここで，相似の位置，相似の中心の用語を押さえておく．

また，例えば右のオのような方法が出され，拡大図になっているかどうかで意見が分かれたら，時間を確保して生徒に議論させたい．そうすることにより，相似条件の活用の仕方や相似な三角形を見いだすことについても，さらに深い理解が得られることが期待できる．

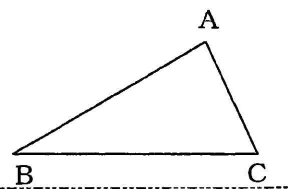
オ



（2）相似の位置

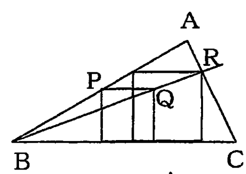
作図問題（2）

△ＡＢＣの中に，１辺がＢＣ上にくるような最大の正方形を作図しよう．

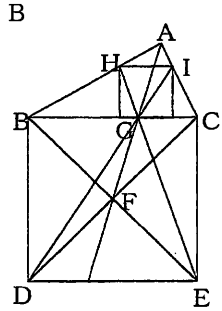


次のような作図の方法が考えられる．

ア　辺ＡＢ上に点Ｐをとり，Ｐを1つの頂点とする正方形を作図する．
　　ＢＱの延長とＡＣとの交点をＲとする．
　　Ｒを１つの頂点とする正方形を作図する．



イ　ＢＣを１辺とする正方形をかき，対角線の交点をＦとする．
　　ＡＦとＢＣの交点をＧとする．
　　ＡＢとＥＧの延長との交点をＨ，ＡＣとＤＧの延長との交点をＩとする．ＨＩが求める正方形の１辺である．



もしこれまでに「相似の位置」の用語の指導がすんでいないならば，この作図を通して「相似の位置」に関する用語と意味の理解について扱うことが可能である．

この作図問題は，難易度が高いものである．作図の方法が正しいかどうかについては，論証の総仕上げとして扱うことも可能である．

（3）線分の三等分

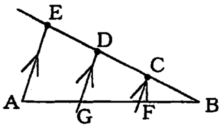
作図問題（3）

線分ＡＢを三等分しよう　Ａ―――――Ｂ

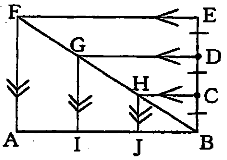
二等分なら線分の垂直二等分線の作図をそのまま使うことができるので，これを繰り返せば何とかなると考える生徒もいるであろう．しかし，やってみるとうまくいかないことに気づき，いろいろと試行錯誤することが予想される．

次のような方法が考えられる．

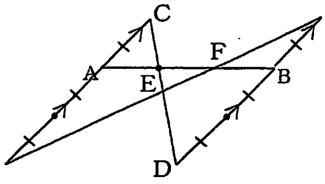
ア



イ



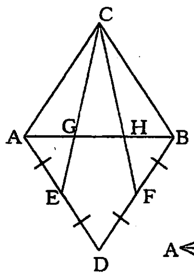
ウ



これらは比較的説明がしやすい方法であろう．もし，生徒から「正しいかどうかわからないので証明しよう.」という声があがれば，証明すればよい．

これに対して，下のエやオのような方法は，正しいようだが，本当に正しいかどうか迷う生徒もいるであろう．

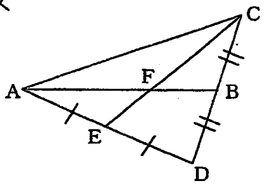
エ



エ　ひし形ＡＤＢＣを作図しＡＤの中点をＥ，
　ＢＤの中点をＦとする．
　ＡＢとＣＥ，ＣＦそれぞれの交点をＧ，Ｈとすると，Ｇ，ＨがＡＢを三等分する点になる．

オ　ＢＣ＝ＢＤとし，ＡＤの中点をＥとする．
　ＣＥとＡＢの交点をＦとする．
　すると，ＦＢの長さがＡＢの３分の１になる．

オ



もし，エやオのような方法が出されたら，そこから論証にスムーズに入ることができそうである．

相似な三角形を見いだしそれを証明する過程で，教科書で扱われる「平行線と比の定理」や「中点連結定理」を使ったり，これらの定理を証明したりすることも予想される．

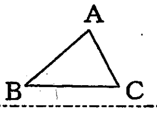
このような追究活動の後で，クラス全体でこれらの定理をまとめ，共有して単元の学習を終了することになる．

6．授業の実際

（１）三角形の相似条件

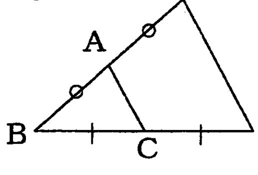
作図問題 (1)

△ＡＢＣを２倍に拡大しよう．

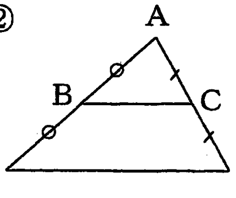


作図問題（１）について個人追究を行い，次にクラス全体で意見を出し合った結果，次のような方法が発表された．

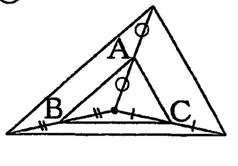
①

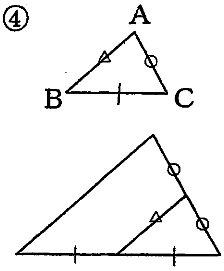


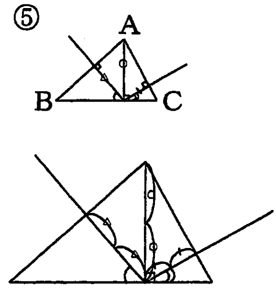
②

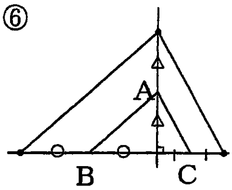


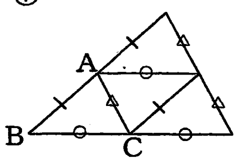
③

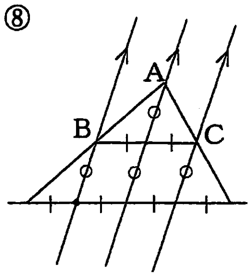


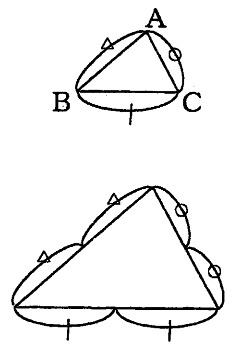
④


⑤


⑥


⑦


⑧


⑨


上記方法をすべて発表させた後，三角形の相似条件を授業者が紹介し，それぞれの作図方法がどの相似条件にあてはまるのかを確認した．なお，その際の相似条件の扱いは公理的扱いとし，合同条件と対比させてさらっと流す感じで扱った．

さらに，ここで③の方法に着目させて，「相似の位置」「相似の中心」という用語とその意味について指導した．

まとめると，作図問題（1）についての授業は，次のように行われた．

第１時　作図方法を個人で考えた．

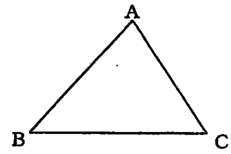
第２時　クラス全体で発表しあい，各作図が２倍の拡大図になっていることを確認した．

第３時　三角形の相似条件を教師が提示し，①から⑨の作図方法がどの相似条件にあてはまるのかを考察し，確認した．その後「相似の位置」，「相似の中心」という用語とその定義について指導した．

（2）相似の位置

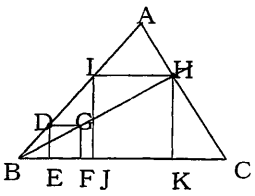
作図問題（2）

△ＡＢＣの中に，１辺がＢＣ上にくるような最大の正方形を作図しよう．



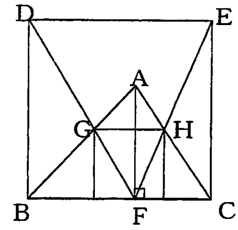
上記の作図問題（2）も個人追究した後に小集団で意見を出し合い，全体で発表した．そこでは次の３つの方法が発表された．

①



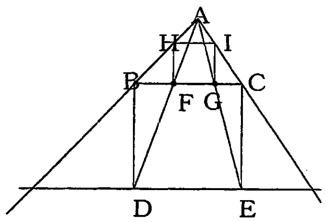
ＡＢ上にＤをとり，Ｄを通る正方形を作図する．
ＢＧの延長とＡＣとの交点をＨとする．
ＨＫ⊥ＢＣ，ＨＩ//ＢＣとなるようにＫ，Ｉをとる．
ＩＪ⊥ＢＣとなるようにＪをとる．

②



ＢＣを１辺とする正方形を作図する．
ＡＦ⊥ＢＣとし，ＦＤとＡＢの交点をＧ，ＦＥとＡＣの交点をＨとする．
Ｇ，ＨからＢＣに垂線をひく．ＧとＨを結ぶ．

③



ＢＣを１辺とする正方形を作図する．
ＡとＤ，ＡとＥを結ぶ．
ＡＤとＢＣの交点をＦ，ＡＥとＢＣの交点をＧとする．
ＨＦ⊥ＢＣ，ＩＧ⊥ＢＣとなるようにＨ，Ｉをとり，
ＨとＩを結ぶ．

それぞれの方法について，条件に合う正方形が作図できる理由を考察した．
以上，作図問題（２）についての授業は次のように行われた．
第１時　作図方法を個人で考えた．
第２時　小集団で方法を出し合い，クラス全体でその方法を共有した．
第３時　なぜその方法で条件に合う正方形が作図できるのか，理由を個人で考察した．
第４時　第３時に考察した意見を小集団で討論した後に，全体で確認した．

（３）線分の三等分

作図問題（３）

線分ＡＢを三等分しよう．Ａ　　　Ｂ

作図問題（３）については，個人で考察し，小集団でその方法を出し合い，それが正しいかどうかについて討論し，それをもとにしてクラス全体で考察を進めた．

個人で追究する際には，「二等分ならできるのに・・」と言いながら試行錯誤する生徒，「ええっ三等分」と絶句する生徒など，その問題が本当にできるのかどうかとまどっている様子が見られた．しかし，時間が経過するにつれて集中度が増し，教室にはコンパスと定規の音だけが聞こえていた．

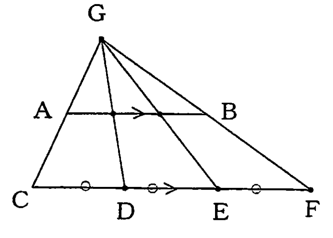
続いて，４人での小集団活動に入る前に，授業者は「いろいろな作図方法が考え出されているけれど，自分でその方法が正しいという理由が言える場合には，理由も述べよう．理由はわからないけれど三等分できそうだという方法も積極的に出し合おう．」と指示した．

小集団での意見交換では，さまざまな意見が飛び交っていた．いくつかのグループの話題と

その話し合いの様子を以下に紹介する.

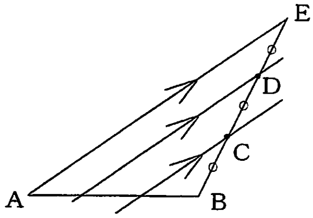
Aグループ

「私は，線分ＡＢと平行な直線をかきました．そして，コンパスを使って，その直線上にＣＤ＝ＤＥ＝ＥＦとなるように３つの点を取りました．その両端の点とＡ，Ｂをそれぞれ結んでその交点Ｇを見つけます．そして，ＧとＤ，ＧとＥを結ぶと，線分ＡＢを三等分する点を見つけることができます.」



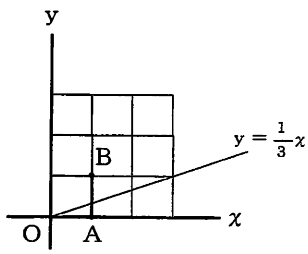
Bグループ

「ぼくは，Ｂを通る直線を引き，ＢＣ＝ＣＤ＝ＤＥとなるように点を取りました．そして，ＡとＥを結び，点Ｄ，Ｃを通るＡＥとの平行線を引きました．そうすると，線分ＡＢ三等分する点を見つけることができます.」



Cグループ

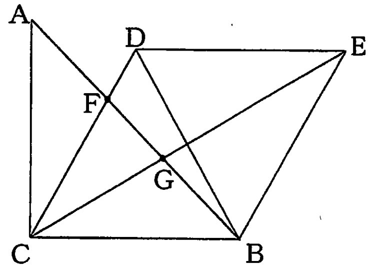
「ぼくは，比例のグラフをイメージしました．もし図のように線分ＡＢがあって，点Ａの座標が（１，０）だとしたら，ｙ＝1/3χのグラフと線分ＡＢの交点は（１，1/3）になります．だからこの点が線分ＡＢを三等分する点の一つです.」



Ａ～Ｃグループのように作図方法を発表するだけで終わっているグループもあったが，次に紹介する２つのグループのように，意見が分かれてどちらが正しいのかはっきり結論が出なかったグループもあった.

Dグループ

「ぼくは，角が三等分できれば，線分も三等分できると思いました．だから，図のようにまず線分ＡＢを斜辺とする直角二等辺三角形ＡＣＢを作図しました．次に，ＣＢを一辺とする正三角形ＤＣＢをかき，∠ＤＣＢの二等分線を作図しました．そうすると，
∠ＡＣＦ＝∠ＦＣＧ＝∠ＧＣＢ＝30°になり，線分も三等分されて，ＡＦ＝ＦＧ＝ＧＢになると思います.」

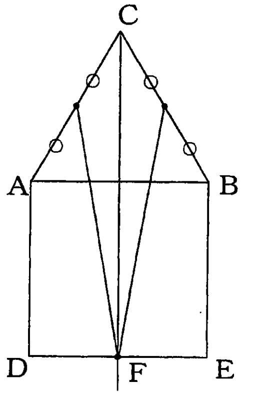


「・・・でも，なんか辺の長さが等しくないみたいだよ.」
「それは誤差じゃないかなあ.」
「そうかなあ・・・」
「だって，角が三等分されれば，線分だって三等分されるはずだよ．・・・」
「そんなことはないよ．だって現に長さが違うじゃん．ＡＦとＢＧは等しいみたいだけど，

ＦＧの長さは何となく短く感じるなあ.」

Ｅグループ

「ぼくは，図のようにＡＢを一辺とする正三角形と正方形を組み合わせて作図しました．正三角形の辺ＡＣとＢＣの中点と正方形の辺ＤＥの中点を結ぶと，線分ＡＢを三等分する点を見つけることができると思います．でも理由がわかりません.」



「本当にできるの？」

「だって，コンパスで測ってみるとできるみたいだよ.」

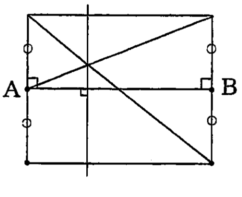
「そうか？じゃあどうやって証明すればいいんだろうか.」

「それがわからないんだよ.」

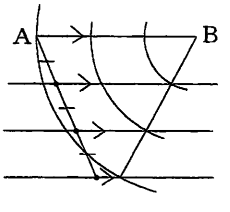
全体で

このような小集団での意見交換を経て，全体発表では次の13種類の方法が発表された.

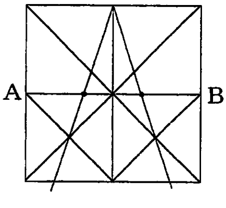
①



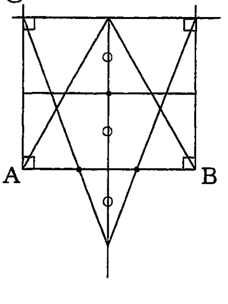
②



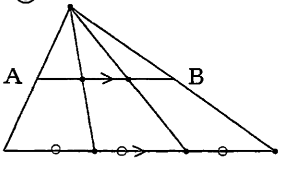
③



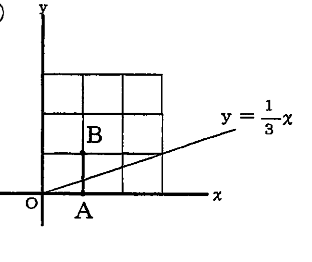
④



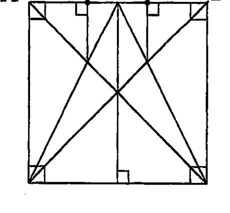
⑤



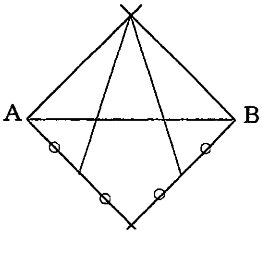
⑥



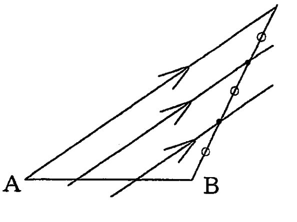
⑦



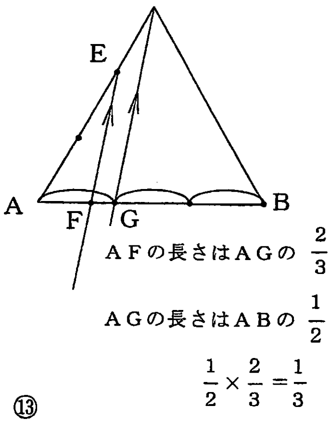
⑧



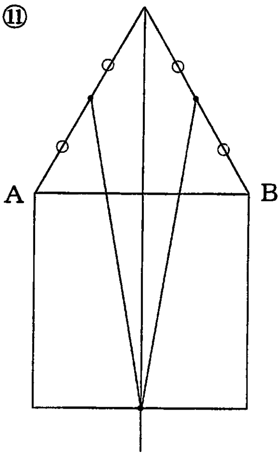
⑨



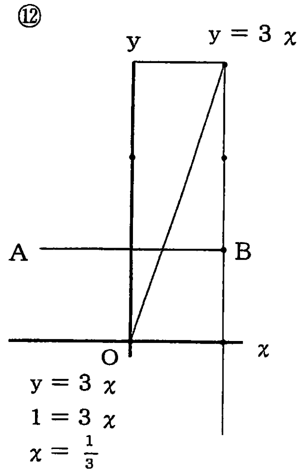
⑩



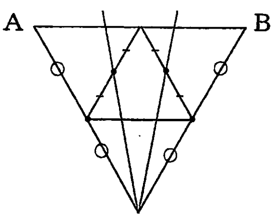
⑪



⑫



⑬



全体発表では，理由をきちんと述べることができる方法も，理由ははっきりしないが三等分できそうだという方法もあった．上記の方法の中では，③，④，⑧，⑪が，理由はわからないが三等分できそうな方法として発表された．それ以外の方法に関しては，発表者が理由を述べて，クラスで正しいことが認められた．

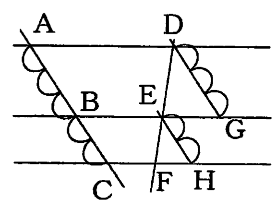
その後の授業は，理由がわからない方法に関して，それが本当に正しいかどうかを個人で考察し，その後クラスで討論した．

ここで次に，全体発表の中で教師の心に残っている２人の印象的な発言を紹介する．

方法②を発表したＡさんの発言

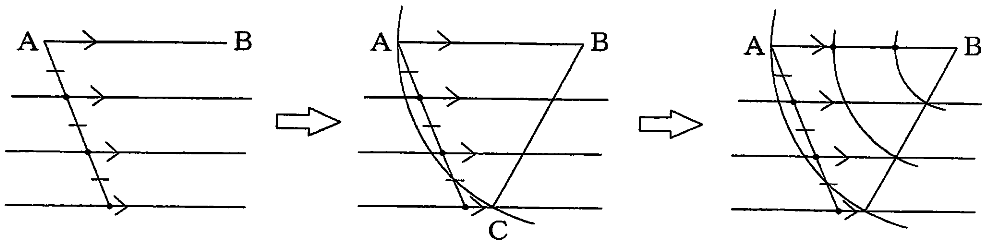
Ａさん「線分ＡＢに平行な線をひいて，その直線上にこのようにコンパスで等しい長さをとります．そして，それぞれの点を通るように線分ＡＢと平行な線をひきます．ここでちょっと話がはずれるんだけど」と言って次のような図をかきながら発言を続けた．

「ＡＢ：ＢＣが３：２だったら，ＤＥ：ＥＦも３：２になるということをまず証明します．ここに平行な線をひくと，四角形ＡＢＧＤは平行四辺形になるのがわかりますか．そうすると，ＤＧの長さは３になります．また，四角形ＢＣＨＥも平行四辺形になります．そしてＥＨの長さは２になります．だから２つの相似な三角形△ＤＥＧと△ＥＦＨができて，こちらの線分の長さの比も３：２になります．だからＤＥ：ＥＦ＝３：２になります．」



「そしてこれをふまえて，コンパスを使ってＢを中心として半径ＡＢの弧をかきます．さっき証明したことを使うと，線分ＢＣも長さの比が等しくなり，三等分できます．だからその長さ

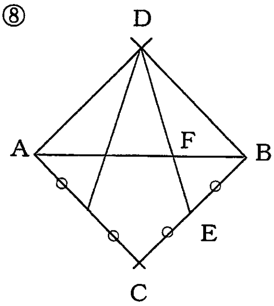
を移すと線分ＡＢを三等分することができます.」



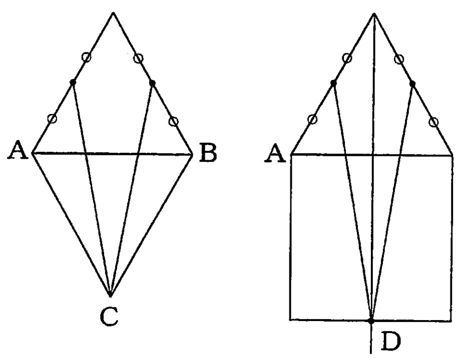
方法⑪が正しくないことを証明した生徒Ｃくんの発言

Ｂくん「⑧の図は，線分ＡＢが対角線となるように正方形ＡＣＢＤをかいてＡＣの中点，ＢＣの中点とＤを結ぶという方法です．その証明は，△ＡＤＦと△ＢＥＦが相似でその相似比が２：１なので，ＡＦ：ＦＢ＝２：１となることから証明できました.」

⑧



Ｃくん「ぼくはこれを作図した時は，三等分できると思ったんですが，実は三等分できないということがわかりました．だから，三等分できないことを証明します．⑧の作図方法が正しいと証明されたので，それを利用して証明します．⑧のように正方形をかかないで，上下に線分ＡＢを１辺とする正三角形をかいても，線分ＡＢを三等分することができます．証明は⑧と同じ方法でできます．すると，図のように線分ＡＢを１辺とする正三角形の高さと正方形の１辺の長さを比べると，正三角形の高さの方が短いので，左の図の点Ｃと右の図の点Ｄは一致しません．左の図は確かに三等分できるので，右の図では三等分できないことになります.」



これらの発言内容は，これらの生徒が，既に皆で認めたことを根拠にして推論を進める，という方法を体得していることを示している.

また，Aさんの発言を学級全体で検討し，その結果を「中点連結定理」や「平行線と線分の比の定理」としてまとめることができた.

以上，作図問題（3）についての授業は次のように行われた.

第１時　作図方法を個人で考えた.

第２時　小集団で意見交換した．その際に理由を述べることができる場合には，理由も含めて方法を出し合い，その後，クラス全体でその方法を出し合った.

第３時　クラス全体で発表する時間を確保し，意見を発表する際にできるだけ理由も述べるようにした.

第４時　第３時に発表された意見の中で，理由がはっきりしない方法について，その方法が

正しいかどうか判断し個人で理由を考えた．

第５時　第４時に考えた理由や意見をクラス全体で発表しあった．

第６時　今までの学習でよく使った図形の性質を定理としてまとめた．

７．まとめ

本稿では，「相似な図形」についての学習指導に関して，筆者らが実践的に研究してきた「作図し証明する過程を重視した授業」の実際を示し，このような展開が授業改善の１つの方向になりうることを提案した．前項６（3）で述べたように，既に皆で認めたことを根拠にして推論を進める，という方法を体得していることを示すAさんやC君の発言内容は，このような授業展開が有効であることを示していると考えられる．

ここで提案した授業モデルの特徴は，１つの定理を発見させるために１つの問題を扱うのではなく，１つの作図問題を解決することを通して，複数の定理を発見したり証明したりするという展開が可能になるという点にある．

このような展開をするには，本稿で示した３つの作図問題を中心とした授業のように，作図の方法を考察する段階で十分に時間を確保し，正しいかどうかわからない方法や，理由はわからないが正しそうだと思える方法を積極的にあげるようにすることが重要である．

今後さらに，本授業モデルを実践し改善して，生徒の追究や理解の様相をまとめたい．また，2002年度から実施されている新教育課程で扱いが大きく後退した「拡大図・縮図」や「図形の相似」に関して，その内容や方法について学習の適時性も視野に入れて検討を続けたい．

<引用・参考文献>

藤森章弘・羽田明夫・榛葉伸吾.「より豊かな数学学習をめざして」．日本数学教育学会誌数学教育第81巻第5号.1999, pp.39-42.

羽田明夫・榛葉伸吾・国宗　進.「中学校での図形の学習指導の改善－中１での授業実践に基づいて－」．静岡大学教育実践研究指導センター紀要No.7. 2001, pp.23-41.

羽田明夫・榛葉伸吾.「作図から証明への過程を重視した図形学習－数学的活動の楽しさを実感する授業の創造－」．日本数学教育学会誌数学教育第84巻第5号.2002, pp.20-28.

小関熙純編著.「図形の論証指導」.明治図書.1987.

国宗　進.「図形の論証指導 改善の視点」．第31回数学教育論文発表会・テーマ別部会 論証研究部会.1998.

国宗　進・羽田明夫・榛葉伸吾.「中学校での図形指導の改善」．第32回数学教育論文発表会論文集.1999, pp.221-226.

榛葉伸吾・羽田明夫・園田博人・国宗　進.「中学校での図形の学習指導の改善－生徒の探究活動を重視して－」．静岡大学教育実践研究指導センター紀要No.8. 2002, pp.49-66.

榛葉伸吾・園田博人・国宗　進.「中学校での図形の学習指導の改善－作図し証明する過程を重視して－」．静岡大学教育実践研究指導センター紀要No.9. 2003, pp.11-30.

榛葉伸吾・園田博人.「中学校での図形の学習指導の改善－作図問題を軸にした「相似な図形」の授業モデル－」．第36回数学教育論文発表会 課題別分科会発表収録．2003, pp.224-227.