

直角三角形の合同条件の指導

Teaching Congruent Conditions of Right Triangles

守屋謙一郎*・近藤正雄*・国宗 進**

Kenichiro MORIYA, Masao KONDO, and Susumu KUNIMUNE

(平成17年1月11日受理)

1. 研究のねらい

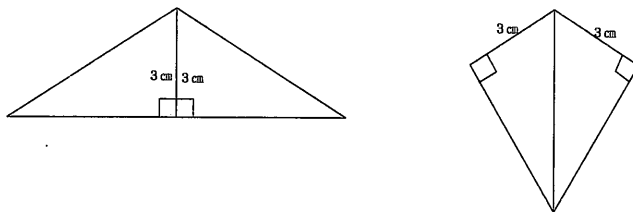
中学校数学科での図形の論証の初期指導において、直角三角形の合同条件に関する内容は、三角形の合同条件を利用して二等辺三角形の性質と条件等を学習した後に、その利用の1つとして位置づけられることが多いであろう。この場合、それを定理としてまとめるにあたって、一般的には2つの並べられた直角三角形の一方を裏返し移動して二等辺三角形をつくり、二等辺三角形の底角を手がかりに証明する。この証明法は、それまでの指導の流れから考えるとかなり特殊な方法である。それだけに、その学習指導も教師主導になりがちである。

本稿は、直角三角形の合同条件を見だしそれを証明する学習指導の改善の方法について、授業を通して検討することがねらいである。

2. 研究の内容

(1) 授業改善の視点

「研究のねらい」でも述べたように、2つの直角三角形の一方を裏返し移動して二等辺三角形をつくり、二等辺三角形の底角を手がかりに証明するという方法は、生徒からの自然な発想としては生じにくい。そこで、より生徒の側に立って、2辺が等しく、 90° の角を2つ含むたこ形を取り上げ、対角線を引くことによって残る辺が等しいことを証明したり、あるいは、もう一方の対角線を引いて証明できないかを考えて裏返しの方法へと展開したりする授業も行われたりする。



いずれにしても、直角三角形の合同条件を見だし、裏返しの方法へと帰着させて証明する、という一連の学習は、そうしなければ証明できないという必然性がとらえにくい。

そこで本研究では、学習の必然性をもたせるために、的確な[問題]を提示し、直角三角形の合同を証明しなければ[問題]が解決されない状況を設定することが重要であると考えた。

そのための[問題]として、一見して長方形と判断される図を提示する。その辺や角のどこが等しいかを前提として追究させるかを検討してみると、主に次の[1]～[6]が考えられた。これらは、筆者らを含むグループによって検討されたものである。

[1] 右の図で、四角形A B C Dの面積は何 cm^2 だろうか？

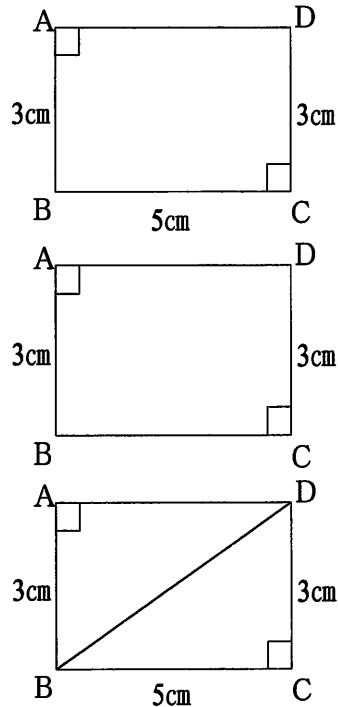
[2] 右の図で、ADの長さは何 cm だろうか？
(図は略、[1]の図と同一。)

[3] 右の図のような四角形A B C Dは長方形であるといつてよいだろうか？

[4] 右の図のような四角形A B C Dは何という四角形だろうか？ (図は略、[3]の図と同一。)

[5] 右の図で、ADの長さは何 cm だろうか？

[6] 右の図は何という四角形だろうか？
(図は略、[5]の図と同一だが、BCの長さは与えられていない。)



今回は、1組の対辺が等しく1組の対角が 90° である四角形を提示し、長方形であるかどうかを問うことによって、四角形に潜む直角三角形が合同であることを証明する必要性を導き出そうと考えた。2つの直角三角形を移動して新たな図形を作り、その図形の性質を用いることによって証明する。二等辺三角形の他に、たこ形や平行四辺形もつくり出すことができるので、多様な考えを引き出し、互いの考え方を広げる学習の機会にもなる。中にはこの段階では説明がつかないものもあるが、「証明できない」ということを確認する学習にも意義がある。ぜひ積極的に取り組ませたいと考えた。

(2) 授業計画

「三角形と四角形」【19時間扱い】

- ① 図形の合同・三角形の合同条件 (3時間)
- ② 命題と証明 (2時間)
- ③ 二等辺三角形 (4時間)
- ④ いろいろな三角形 (1時間)
- ⑤ 直角三角形 (3時間) —本時はこの第1,2時—
- ⑥ 平行四辺形 (2時間)
- ⑦ 平行四辺形になるための条件 (2時間)

- ⑧ いろいろな四角形（1時間）
- ⑨ 平行線と面積（1時間）

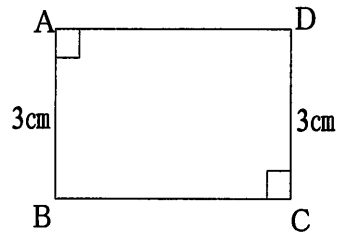
(3) 実際の授業

- ・日時 第1時 平成16年10月26日（火）
第2時 平成16年10月28日（木）
- ・対象 静岡大学教育学部附属浜松中学校2年2組
- ・授業者 近藤正雄，山下正吾（AT；アシスタントティーチャー）
- ・授業記録

ここでは、2時間分の授業を次の3分節に分けて記述する。

- ① 「問題」を把握し、長方形であることを示すという目的を明確にする。
 - ② $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$ の証明を考える。
 - ③ $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$ の証明を発表し確認する。
- ① 「問題」を把握し、長方形であることを示すという目的を明確にする。

[問題] 右の図の四角形ABCDは
何という形でしょうか？



- S1：長方形だよ。
- T1：本当に？ では、「長方形」ってどんな四角形？
- S2：4つの角が 90° の四角形です。
- T2：他には？
- S3：向かい合った辺が等しい四角形です。
- T3：それじゃあ、これ（筆者注；四角形ABCDのこと）は長方形になるかな？
なると思う人？
（ほとんどの生徒が挙手）
- S3：AD，BCが分からないから， $AD=AB$ なら正方形にもなります。
- S：（拍手）
- AT1：本当に長方形かな？ 90° は $\angle A$ と $\angle D$ の2つだけじゃないかな。
- T4：AT1に説明ができるように、何が言えたら長方形になるか考えてみよう。
（5分経過）
- S4： $\angle B = \angle D = 90^\circ$ です。
- S5：対角線が垂直に交わらなければ長方形。
- S6：AD//BC，AB//DCかな。
- T5：ちょっと確認しよう。S6の考えでなぜ言えるか、説明してくれるかな？

S 6：平行といえると、錯角が等しくなって 90° になり、 $\angle D$ も 90° になるからです。 $\angle B$ も同様です。

S：(拍手)

T 6：他にはどうだろう。

S 7：対角線を引いて、交点と各頂点の距離が等しければいいです。

S 8：ある辺の垂直二等分線を引いて、折ったときに重なればいいです。

S 6： $AB=BC$ (筆者注;正方形を意識した発言である。)

T 7：BとDを結ぶ対角線を補助線としている人がいた。これから言えることは何だろう。

S 9： $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$ が言えるから長方形といえます。

T 8：なぜこの合同が言えれば長方形になるか、説明できる人はいるかな。

S 10：この2つの三角形の合同がいれば、 $\angle ADB = \angle CBD$ となって平行線の錯角となり、平行がいえます。

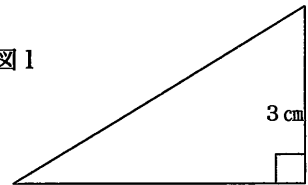
S 9：もし証明できれば、 $\angle ADB = \angle CBD$ 、 $\angle ABD = \angle CDB$ となり、 $\angle ADB = \circ$ 、 $\angle ABD = \times$ とすると、三角形の内角の和より $(\circ + \times) + 90^\circ = 180^\circ$ 、 $\circ + \times = 90^\circ$ となるので、 $\angle D = \angle B = 90^\circ$ になります。

② $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$ の証明を考える。

T 9：そうですね。では、 $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$ を証明しよう。

$\triangle ABD \equiv \triangle CDB$ を証明しよう。

図 1



(紙を切って作った図 1 の直角三角形を 1 人 10 枚ずつ配布し、少し時間をおいた。)

T 10：2 枚で長方形を組むのではなく、別の形にして考えている人がいるので紹介します。

S 11：(紙で作った三角形を黒板上に並べて) 図 2 のように二等辺三角形にします。

図 2

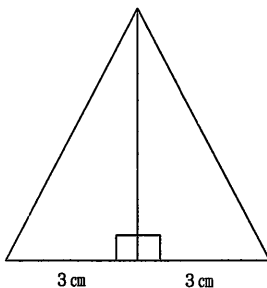
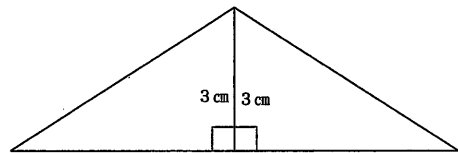


図 3



T 12：本当に二等辺三角形かな。これが二等辺三角形だと思う人、手を挙げて？

(ほとんどの生徒が挙手)

AT 2：本当に二等辺三角形かな？ 重なる辺の長さが違うかもしれないよ。

S 12：それなら 3 cm の方でつなげば、長さが等しくなるので、つながります。(図 3 のように黒板上で並べて示した。)

T 13：その形ならつながるね。この三角形 (筆者注; 図 3 のこと) は二等辺三角形といえるのでしょうか？

S 12：斜辺の部分はずの長方形の対角線の部分だから等しいはずですよ。

T14: そうですね。では、その二等辺三角形になることを認めます。斜辺の部分を a cm と決めておきましょう。

平行四辺形らしい形を作っている人もいました。この2つの図形(図4, 図5)はそれぞれちゃんと辺が重なる形になるのでしょうか。

図4

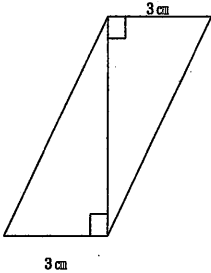
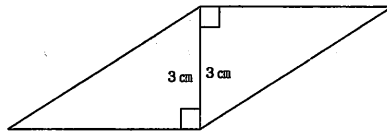


図5



S12: 図5は等しい辺が重なっているのが分かるけど、図4は辺の長さが分からないからくっつかないと思う。

T15: そうだね。じゃあ、図4の形は外し、できそうな形を他に考えてみましょう。(この後、図5, 図6が生徒から出てきた。図を確認したところで時間になり、第1時の授業を終えた。)

図5

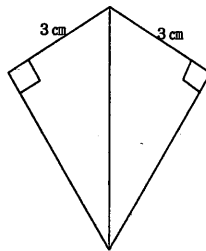
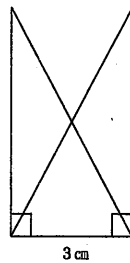


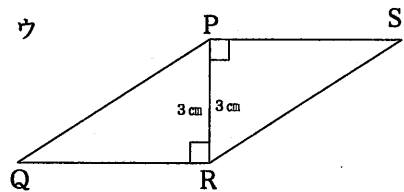
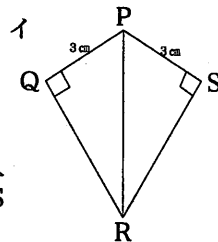
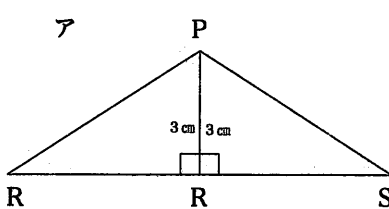
図6



③ $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$ の証明を発表し確認する。

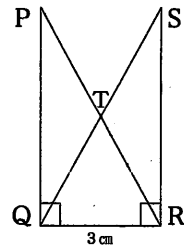
T16: 今日は、前回みんなが工夫してつくった図形を確認し、それをもとに2つの直角三角形の合同を証明します。証明で大切なことを確認します。つくった図形について既に証明されている性質、例えば二等辺三角形の底角は等しいなどは、条件として利用しています。

(前時に確認した図を提示し、それらを新たにア～エとした。)



T17: 証明が比較的やさしいものと難しいものがあるので、次のようにします。アは基本コース、イ、ウ、エはチャレンジコースとします。基本コースから始めて下さい。

また、証明において共通の記号を扱いたいのでここで決めます。(図のように記号を書き込んで) 頂点をそれぞれ P, Q, R, S, そして T と定めます。なお、チャレンジコースは証明できるかどうか



も分かりませんのでそのつもりで。

S：(証明に取り組む。20分程度)

S13：アの証明ができました。△PQSと△PRSにおいて

PS=PS (共通) …① $\angle PSQ = \angle PSR (90^\circ)$ …②

$\angle PQS = \angle PRS$ (△PQRは二等辺三角形で底角が等しいから) …③

②③より、 $\angle QPS = \angle RPS$ …④

①②④より、1辺と両端の角がそれぞれ等しいので $\triangle PQS \equiv \triangle PRS$

S：(拍手)

S14：イも証明ができます。

QとSを結びます。△PQSは二等辺三角形になるので、 $\angle PQS = \angle PSQ$

$\angle RQS = 90^\circ - \angle PQS = 90^\circ - \angle PSQ = \angle RSQ$

2角が等しいので、△RQSは二等辺三角形だから、 $RQ = RS$ …①

PRは共通 …② $PQ = PS$ (仮定) …③

①②③より、3辺がそれぞれ等しいので、 $\triangle PQR \equiv \triangle PSR$

S：(拍手)

T18：ア、イの方法で2つの三角形の証明ができたね。ウとエについては今日は時間がないので、続けてやってみたい人はノートにやって提出しましょう。

(ウ、エについて、この時点で途中まで証明している生徒が何人かいた。)

T19：さて、2つの直角三角形が合同であることが証明できたことにより、言えることを確認しよう。もとの四角形ABCDにもどると、 $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$ がいえたことになる。それによって何が言えるのでしょうか。

S15： $\angle ABC = \angle CDA = 90^\circ$ で長方形がいえます。

T20：復習すると、 $\angle ABD = \angle CBD$ を \times° 、 $\angle ADB = \angle CDB$ を \circ° とすると、 $\circ + \times = 90^\circ$ になるからいえるということだね。2つの直角三角形の合同が証明できたので、長方形になることが確かめられました。次回はこれをもとに直角三角形の合同条件をまとめます。(以上第2時の授業)

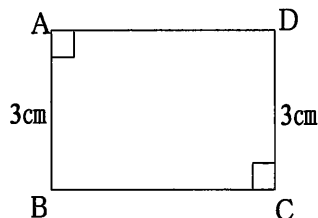
(4) 検討

ここでは、今回の授業において観察された子どもの考えについて検討し、指導上の改善点を考える。

① 「長方形であることを示すには何がいえればよいか」を考える場面

授業の冒頭で、[問題]を提示し、「四角形ABCDは長方形である」という結論が正しいことを示すためには何がいえればよいかを考えさせたところ、生徒からは次のような考えが出された。

- ・ $\angle B = \angle D = 90^\circ$
- ・ $AD \parallel BC$
- ・ BDを引いて、 $\angle ADB = \angle CBD$
または、 $\angle ABD = \angle CDB$
- ・ BDを引いて、 $\triangle ADB \equiv \triangle CBD$
- ・ $AD = BC$



生徒の多様な考えが現れている。もっとも、発表されたそれぞれの考えは、問題提示後のこの時点では一人一人の子どもの中ではまだ十分な検討を経てはいないであろう。長方形の定義が曖昧であったり、長方形であるための条件をまだ十分にはとらえていないことがその理由である。

この段階での関連する既習事項は小学校で学んだ長方形の「定義」だけなので、この段階でこの「問題」をとりあげるとすると、長方形の理解に対する配慮が重要になってくる。実際の授業では、「4つの角が等しい(90°である)四角形を長方形という」という定義は少なくとも確認して進める必要がある。あるいはまた、今回のような流れに従い、授業冒頭で意図的に長方形の定義を確かなものにするという展開も考えられるであろう。

さらにまた、S3やS5の発言に見られるように、長方形と正方形との包摂関係に関係することにこだわる生徒もいる。今回詳しい調査をしたわけではないが、生徒は正方形と長方形は別の図形ととらえていると考えられる。前時に正三角形と二等辺三角形の関係をベン図にまとめていて、正方形と長方形もその時に練習として簡単に扱っているものの、その理解は十分ではなく、導入で混乱をきたしている。小学校での四角形の包摂関係に関する学習指導が後退し、それに関する子どもの理解も従来より低下している現在(国宗,2000)、この点に関する配慮も重要である。

② $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$ の証明について実際に紙を動かして考える場面

四角形ABCDが長方形であることを示すには、 $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$ を証明すればよいことを全体で確認した後、生徒はこれら2つの三角形の合同を証明することに取り組んだ。

それを今回の授業では、紙で作った直角三角形を1人10枚ずつ配布し、それを実際に操作させて考えさせることにした。

四角形ABCDを2つの直角三角形に切り離し、別の形につなぎ合わせるというアイディアは生徒から出させることが理想であり、可能ならばそうすべきであるが、それには大きな思考の飛躍があつて簡単には出てきそうにない、と考えた結果である。

授業記録にもあるように、長方形に対角線を引いて考えるというアイディアは生徒から自然に出てくる。切り離してつなぎ合わせてもよいという考え方については、今回の授業では、何人かの生徒が別の形を作って考えていたので授業者はそれを全体で紹介するという形で進行している(T10の発言参照)。紙で作った直角三角形を実際に操作して考えた結果である。もしも実際の授業において、切り離してつなぎ合わせてもよいという考え方が出ない場合は、教師の方から提示してよいと筆者らは考えている。

③ 等しい長さの辺を合わせること

2つの直角三角形をつなげる場合、等しい長さの辺どうしだからつなげることができるというこの理解が重要であるが、そのとらえ方にはばらつきがある。二等辺三角形を作るとき、長さが等しいかどうか分からないところはつなげられないことを全体で確認し、実際に操作していくことが重要である。

等しい長さの辺どうしをつなげることに関連して、今回の授業に先立つ二等辺三角形の性質の導入では、小学校での学習を振り返る意味で、二等辺三角形の等しい辺を重ねて折ると、その折り目には頂角の二等分線が現れることを確認する。その実際的な経験を想起しながら、ここでの操作活動の意味をよりよく理解させたい。

④ 直角三角形の合同を証明する必要感

今回の授業では、1組の対辺が等しく1組の対角が 90° である四角形を提示し、それが長方形であるかどうかを問うことによって、四角形に潜む直角三角形が合同であることを証明する必要性を導き出そうと考えた。すなわち、冒頭で「右の図の四角形A B C Dは何という形でしょうか?」という【問題】を提示し、それを解決する中で2つの直角三角形の合同を示して、直角三角形の合同条件を導くという授業展開にした。

このねらいは、授業の実際からすると十分に達成されていたものと考えられる。提示された【問題】を解決することが直接の目標であり、その結果として直角三角形の合同条件を得る、という流れは自然であった。第1時の授業後に、次のように言ってきた生徒もいたほどであり、ねらいが「四角形A B C Dが長方形である」ことを示すという目標をよくとらえていたことが伝わってくる。

S：アの図でも、 $\triangle PQR$ が二等辺三角形で底角がいえると、2つの直角三角形の合同を証明するところまでやらなくてもいいと思います。2角の等しいことを確認した後、もとの四角形に戻すと錯角が等しくなり、 $AD \parallel BD$ がいえるからです。そうすると、四角形A B C Dが長方形になることがいえるのではないのでしょうか。

またこの授業では、2つの直角三角形を移動して新たな図形を作るが、二等辺三角形の他にたこ形や平行四辺形もつくることのできることで、生徒の多様な考えを引き出し、互いの考え方を広げる学習の機会にもなっていた。中にはこの段階では説明がつかないものもあるが、それを確認する学習にも意義があろう。

⑤ 生徒の探究的な学習を促す場として

今回のような、直角三角形を多様に組み合わせ証明して直角三角形の合同条件を導く授業が、生徒がそれまでに学習した三角形の合同条件や二等辺三角形の性質を総合的に駆使して図形の性質を探究する場を与えることを実感した。

既に述べたように、直角三角形の合同条件に関する指導は、一般的には2つの並べられた直角三角形の一方を裏返し移動して二等辺三角形をつくり、二等辺三角形の底角を手がかりに証明する。あるいは、三角形の合同条件を得る際に、「2辺と1角がそれぞれ等しい」三角形が合同であることを調べる中で一緒に得る授業（榛葉・羽田・園田・国宗,2002）が行われることもあろう。そのいずれにしても、その授業は教師主導になりがちである。

【問題】の提示から授業に入り、その解決によって直角三角形の合同条件を導くという、今回行ったような授業展開によって、証明する能力や態度を育成する場を用意できることが明らかになった。

この項の最後に、授業後の生徒の感想のいくつかを紹介しておこう。

- ・斜辺と1鋭角がそれぞれ等しいという合同条件は、2角夾辺相等に似ていましたが、「斜辺と他の一辺がそれぞれ等しい」の方は特殊な方法を用いて証明しました。直角三角形の合同条件は、時として三角形の合同条件より便利なので活用していきたいです。(G)
- ・いつもと違う証明ができて少し難しかったけど、これでまた、新しい証明ができるようになったので、考え方を広げられるカギになったと思う。(K)
- ・合同な直角三角形を2つあわせると二等辺三角形になり、それをもとにして証明していくことが分かった。(N)
- ・最後に定理として結びつけたため、今回の学習の流れから定理を覚えやすかった。ただ覚え

るより理由を考えての学習が大事だとあらためて思った。(S)

3. 今後の課題等

(1) 直角三角形の合同条件の指導について、「授業改善の視点」の項で示したように、[問題]を、どのような図や情報を与え、どのような問いかけによって生徒に提示するかについては、種々の考え方がある。

授業のねらいや生徒の実態等に応じた[問題]の提示のあり方を実証的に検討したい。

(2) 今回の授業提案は、直角三角形の合同条件の指導のあり方に関する提案であると同時に、生徒が図形の性質を探究するにふさわしい[問題]の事例の提示にもなっている。中学校での図形学習の節目節目に、生徒の探究的な学習が行われる場を用意する必要があるが、そのための種々のよい「問題」をさらに集積し開発したい。

なお、今回の「問題」の検討、及び事後の検討については、西部数学サークルの諸先生方に多くの有用なご指摘をいただいた。ここに謝意を表したい。

〈引用・参考文献〉

国宗進. 「図形の論証指導 改善の視点」. 第31回数学教育論文発表会・テーマ別部会 論証研究部会.1998.

国宗進. 「図形の論証に関する理解度の変化」. 日本数学教育学会誌数学教育第82巻第3号.2000,pp.2-12.

榛葉伸吾・羽田明夫・園田博人・国宗進. 「中学校での図形の学習指導の改善—生徒の探究活動を重視して—」. 静岡大学教育学部附属教育実践総合センター紀要No.8.2002,pp49-66.