

## 現代G Pの一環としての物理実験教材開発の試み

著者	増田 健二
雑誌名	技術報告
巻	13
ページ	63-68
発行年	2008-03-11
出版者	静岡大学技術部
URL	<a href="http://doi.org/10.14945/00002919">http://doi.org/10.14945/00002919</a>

# 現代GPの一環としての物理実験教材開発の試み

増田健二

工学部技術部実験教育支援室

## 1. はじめに

本学では、2年次の物理実験において「連成振動(波と振動)実験<sup>[1,2]</sup>」を取り入れている。図1のように、直径10mm長さ60cmの真鍮丸棒2本P、Qの上部10cmに穴をあけ、直径1.5mm長さ70cm程度の鋼鉄棒Sを連結する。支持台にその鋼鉄棒Sを水平におき丸棒P、Qを振動させると、重力を復元力とし鋼鉄棒のねじれの力を結合力とする連成振動をする。今回は、創造教育センターの「現代的教育ニーズ取組支援プログラム(現代GP)」の一貫として、「連成振動」の測定に工学基礎実習(1年前期)で製作したBASIC Stampを用いることを考えた。具体的には、真鍮丸棒の下部をくり抜き、発光ダイオードを設定し、スリットを通して半導体位置検出素子(PSD)の受光面に光を当てる。PSDは、光の位置を電圧に変換する仕組みとなっている。連成振動の力学的振動をPSD素子で電気的信号に変換し、BASIC StampとADコンバータを組み合わせた測定系を用い、データをグラフ化する試みである。

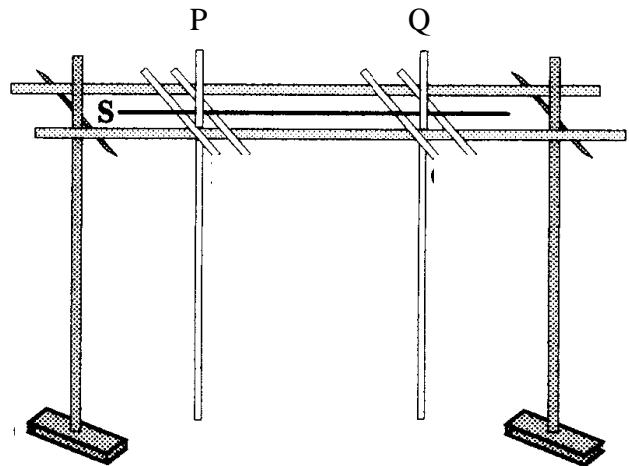


図1. 連成振動実験装置の配置

## 2. ねじれ振動による連成振動の原理

実験装置の配置を図1に示す。支持台に鋼鉄棒を水平に置き丸棒P、Qを振動させると、重力を復元力とし鋼鉄棒のねじれの力を結合力とする連成振動をする。

P、Qをそれぞれ長さ $\ell$ [m]、質量 $M$ [kg]の様な棒とし、棒の重心より $h$ [m]の位置に1.6mmの穴をあけ、垂直に鋼鉄棒Sを通して固定する。図2はP、Qの振動を鋼鉄棒Sの軸方向から見た場合で、 $\phi_1, \phi_2$ はP、Qの鉛直線からの角変位である。P、Qの軸Sの慣性モーメントを $I$ [ $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ ]とすると、P、Qの回転の運動方程式は次のようになる。

$$I \frac{d^2 \phi_1}{dt^2} = -Mgh \sin \phi_1 + c(\phi_2 - \phi_1) \quad (1)$$

$$I \frac{d^2 \phi_2}{dt^2} = -Mgh \sin \phi_2 - c(\phi_2 - \phi_1) \quad (2)$$

P、Qの振動の振幅が小さい時は、 $\sin \phi_1 \cong \phi_1, \sin \phi_2 \cong \phi_2$ となり、A、B、 $\dots$ は初期条件で定まる定数である。

よって $\phi_1, \phi_2$ は、

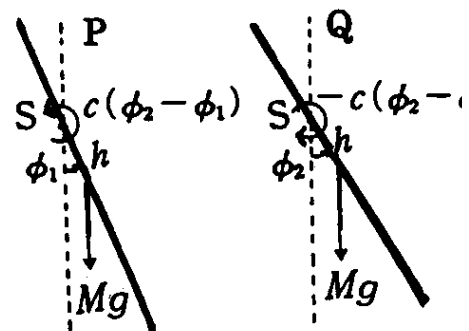


図2. 鋼鉄棒Sの軸方向から見た図

$$\phi_1 = \frac{A}{2} \sin(\omega_1 t + \alpha) + \frac{B}{2} \sin(\omega_2 t + \beta) \quad (3)$$

$$\phi_2 = \frac{A}{2} \sin(\omega_1 t + \alpha) - \frac{B}{2} \sin(\omega_2 t + \beta) \quad (4)$$

となる。(3), (4)式を見るとP, Qの振動 $\phi_1, \phi_2$ は2つの角度について単振動、 $\frac{A}{2} \sin(\omega_1 t + \alpha)$ ,  $\frac{B}{2} \sin(\omega_2 t + \beta)$ の和または差の振動になっていることがわかる。このように、複雑な連成振動を単純な単振動の重ね合わせで表せるとき、これらの単振動をこの系の規準振動、またその振動数を規準振動数(または固有振動数)という。一般にN個の自由度(N個の座標)をもつ連成振動系の小振動においては、N個の規準振動があり、各自由度に対する座標の時間的变化はN個の規準振動の一次結合として取り扱うことができる。

### 3. 実験装置と測定方法

#### 3.1 PSDを用いた位置検出方法

位置検出装置の写真を図3に示す。図3(a)のように、真鍮丸棒の下部を内径7mm深さ50mm程度削り、その中に発光ダイオード(緑色)を接着する。遮蔽板として幅25mm長さ70mm厚さ0.5mm

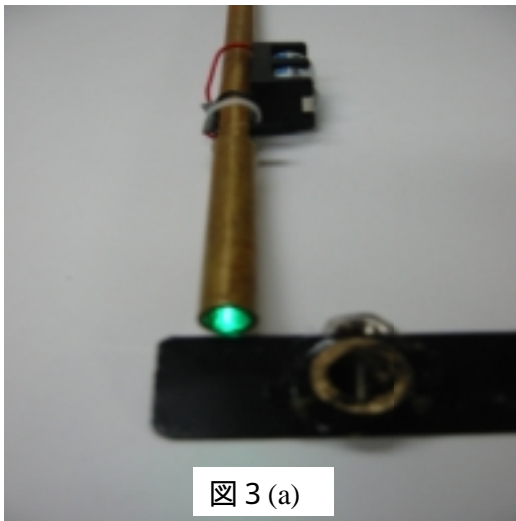


図3(a)

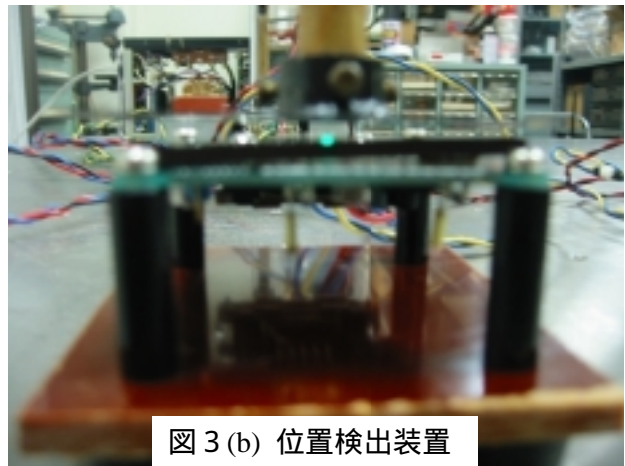


図3(b) 位置検出装置

の真鍮板を用い、遮蔽版の中心には幅1mm長さ10mmのスリットを設け、そこを通過する光の位置から丸棒の変位を測定する。図3(b)にPSDの測定部分の写真を示す。V(浜松ホトニクスS1352)を信号処理基板(C3683-01)にハンダ付けし、15Vの電源を接続する。このPSD素子は、最大 $\pm 17\text{mm}$ (最大 $\pm 10\text{V}$ )まで検出でき、変位1.7mmに対して1Vの出力電圧を生じる。

#### 3.2 PSDを用いた測定装置

測定系の全景を図4に示す。直径10mm長さ60cmの真鍮丸棒2本P, Qの上部10cmに穴を明け、直径1.5mm長さ70cm程度の鋼鉄棒Sを連結する。支持台にその鋼鉄棒Sを水平におき丸棒P, Qを振動させる。真鍮丸棒の下部に埋め込んだ発光ダイオードの光がスリットを通過し、PSDの受光面の中心を照らすように設定する。

電圧の時間変化は、ADコンバータ(CONTEC AI-1608AY-USB)を用い、アナログ デジタル変換してパソコンに取り込む。Excel計算ソフトで解析しグラフ化する。

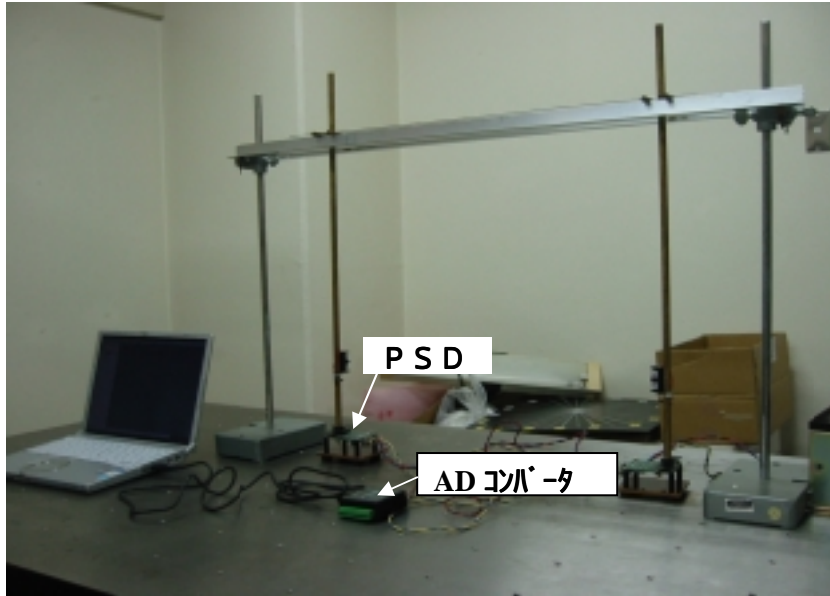


図4 . PSD を用いた測定装置

#### 4 . 測定方法と結果

##### 4.1 同位相の振動 $\omega_1$ の測定

P , Q を同じ方向に同じ角度だけ変位させ、同時に静かに放す。

(3) , (4)式からわかるように  $\phi_1, \phi_2$  は2つの規準振動

$$\frac{A}{2} \sin(\omega_1 t + \alpha), \quad \frac{B}{2} \sin(\omega_2 t + \beta)$$

の和または差となる。個々で  $B=0$  のとき、 $\phi_1, \phi_2$  は規準角振動  $\omega_1$  だけの振動となり、

$$\phi_1 = \phi_2 = \frac{A}{2} \sin(\omega_1 t + \alpha)$$

となる。よって P , Q は常に同方向に振動する (P と Q の位相差は0)。このときの振動周波数  $f_1$  を測定し、振動周期  $T_1$  を  $T_1 = 1/f_1$  の関係から求める。変位は  $(\phi_1 + \phi_2)/2$  であるから、

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} \quad (5)$$

となる。

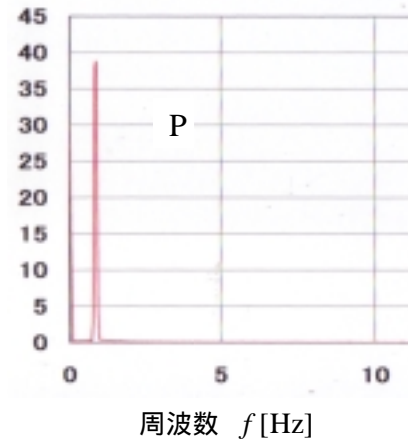
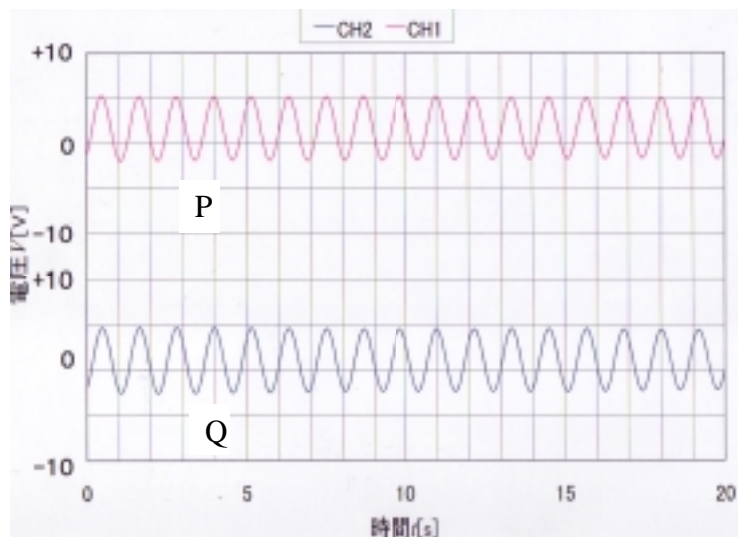
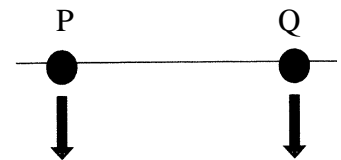


図5 . 単振動  $\omega_1$  の測定  
(左 : 変位 , 右 : 周波数)

同位相の振動  $\omega_1$  の変位および周波数の測定データを図 5 に示す。図 5 (右)より周波数  $f_1 = 0.844[\text{Hz}]$  となり、振動周期  $T_1 = 1/f_1 = 1.185 [\text{s}]$  となる。単振動の規準角振動  $\omega_1$  は、(5)式より、

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = 5.302[\text{rad/s}]$$

となる。

#### 4.2 同位相の振動 $\omega_2$ の測定

P, Q を反対の方向に同じ角度だけ変位させ、同時に静かに放す。  
ここで  $A=0$  のときは、

$$\phi_1 = \frac{B}{2} \sin(\omega_2 t + \beta)$$

$$\phi_2 = -\frac{B}{2} \sin(\omega_2 t + \beta) = \frac{B}{2} \sin(\omega_2 t + \beta + \pi)$$

となり、規準角振動  $\omega_2$  のみの振動となり、P, Q は、常に反対方向に振動する(位相差  $\pi$ )。このときには、 $\phi_1 = -\phi_2$  が成り立つので  $\phi_1 - \phi_2 = 2\phi_1 = -2\phi_2$  となる。よって、P または Q の振動周期  $T_2$  から  $\omega_2$  が求まる。

図 6 (右)より、周波数  $f_2 = 0.920[\text{Hz}]$  となり、うなり振動の周期  $T_2 = 1/f_2 = 1.087[\text{s}]$  となる。位相差  $\pi$  の振動モードに対する規準角振動  $\omega_2$  は、

$$\omega_2 = \frac{2\pi}{T_2} = 5.780 [\text{rad/s}]$$

となる。

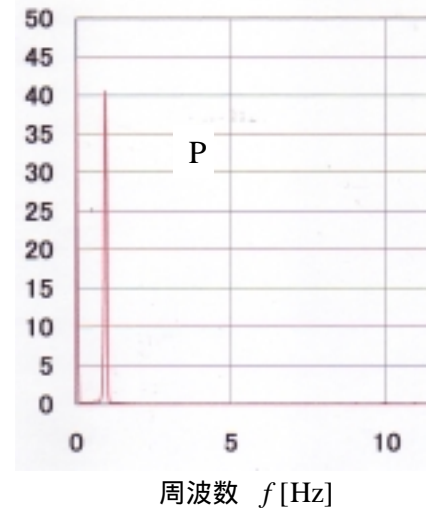
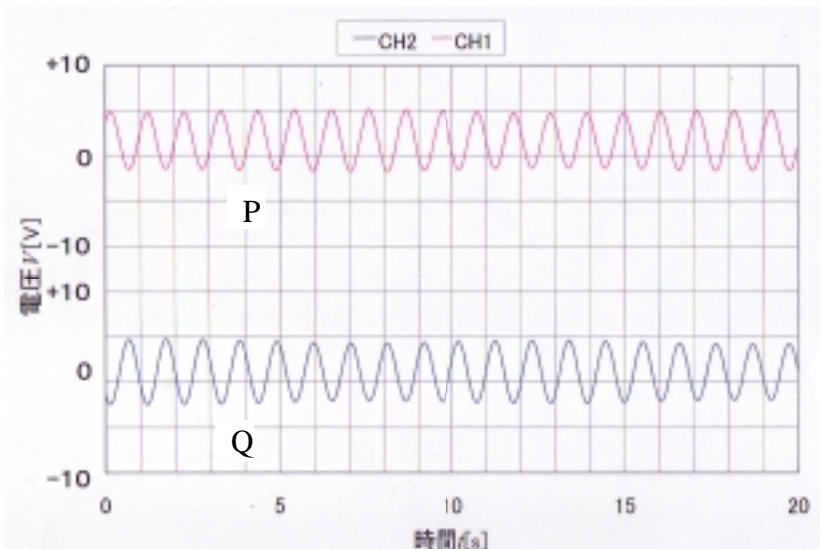
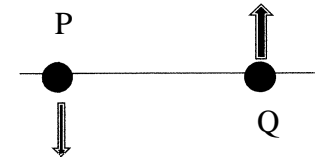


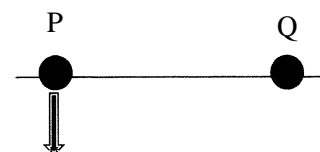
図 6 . ねじれ振動  $\omega_2$  の測定  
(左: 変位, 右: 周波数)

#### 4.3 振幅の時間変化による $\omega_1, \omega_2$ の測定

棒 Q を鉛直下方に固定した状態で棒 P を適当な角度だけ変位させ、P, Q を同時に静かに放す。

この方法により、初期条件は、

$$\phi_1 = a, \quad \phi_2 = 0, \quad \frac{d\phi_1}{dt} = 0, \quad \frac{d\phi_2}{dt} = 0$$



から

$$A = B = a, \quad \alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$$

となる。よって(3), (4)式は

$$\phi_1 = \frac{a}{2} (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) = a \cos \left( \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right) \cos \left( \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right) \quad (6)$$

$$\phi_2 = \frac{a}{2} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) = a \sin \left( \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right) \sin \left( \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right) \quad (7)$$

となる。 $\omega_1 \cong \omega_2$  ( $Mgh \gg 2c$  (すなわち重力による復元力に対して結合力が小) のとき、P, Qも振動 $\phi_1, \phi_2$ は角振動数 $(\omega_1 + \omega_2)/2$ で変化するが、その振幅は角振動数 $(\omega_1 - \omega_2)/2$ で「うなり」のようにゆるやかに変化していくことがわかる(図7)

$\omega_1 \cong \omega_2$  の場合の $\phi_1, \phi_2$  時間変化は図7になり、P, Qの振動周期 $T_3$ は

$$T = \frac{4\pi}{\omega_1 + \omega_2} \quad (8)$$

となる。また「うなり」の周期 $\tau$ は

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1} \quad (9)$$

となる。 $\phi_1, \phi_2$ の振動の変化は、位相が $\pi/2$ ずれているのでP, Qの振動の振幅は一方が最大のとき他方は最小となり、振動のエネルギーは交互に入れかわることになる。

図8の周波数 $f_3 = 0.890$ [Hz]、振動周期 $T_3 = 1/f_3 = 1.124$ [s]となる。振幅の「うなり」の周期 $\tau = 14.88 - 3.78 = 11.10$ [s]となる。規準角振動 $\omega_1, \omega_2$ は(8), (9)式より、

$$\omega_1 = \pi \left( \frac{2}{T_3} - \frac{1}{\tau} \right) = 5.307 \text{ [rad/s]}$$

$$\omega_2 = \pi \left( \frac{2}{T_3} + \frac{1}{\tau} \right) = 5.873 \text{ [rad/s]}$$

となる。

#### 4.4 鋼鉄棒のねじれの復元力と剛性率

支軸周辺の真鍮棒の慣性モーメント $I$ は、

$$I = M \frac{\ell^2}{12} + M h^2 = 0.0269 \text{ [kg} \cdot \text{m}^2]$$

で与えられる。ここで $M$ は棒の質量、 $\ell$ は棒の長さ、 $h$ は棒の重心と支軸との距離である。

$$M = 0.399 \text{ [kg]}$$

$$\ell = 0.595 \text{ [m]}$$

$$h = 0.195 \text{ [m]}$$

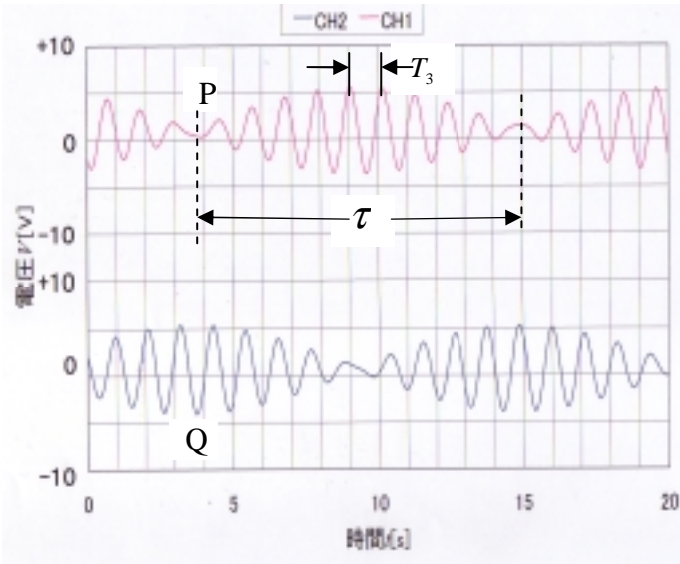


図7.「うなり」の振動波形

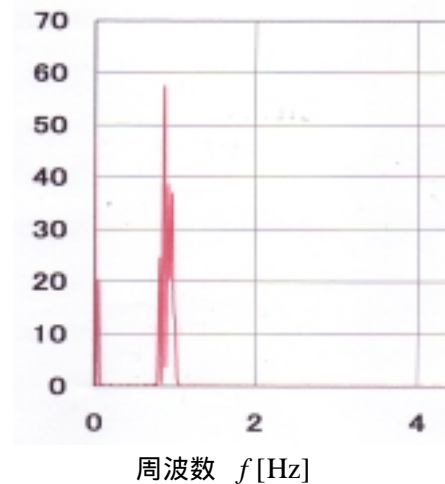


図8.「うなり」の振動周波数

鋼鉄棒 S のねじれの復元力のモーメント  $c$  は、 $c = \frac{I}{2}(\omega_2^2 - \omega_1^2)$  により与えられる。図 7 の「うなり」振動の周波数はバラツキがあるため、図 5 , 図 6 から求められた  $\omega_1, \omega_2$  および上記で求めた  $I$  を代入して、ねじれの復元力のモーメント  $c$  を算出する。

$$c = \frac{I}{2}(\omega_2^2 - \omega_1^2) = \frac{0.0269}{2} \cdot (5.780^2 - 5.302^2) = 0.0712 \text{ [kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}\text{]}$$

鋼鉄棒の半径  $r$ 、棒 P と Q 間の距離を  $L$ 、剛性率を  $G$  としたときの  $c$  は、

$$c = \frac{\pi G r^4}{2L} \quad \begin{array}{l} r = 0.75 \times 10^{-3} \text{ [m]} \\ L = 0.550 \text{ [m]} \end{array}$$

と表わされるので、

$$G = \frac{2L}{\pi r^4} \cdot c = \frac{2 \times 0.550}{\pi \times (0.750 \times 10^{-3})^4} \times 0.0712 = 7.88 \times 10^{10} \text{ [N} \cdot \text{m}^{-2}\text{]}$$

## 5 . 結果のまとめと評価

測定より得られた鋼鉄棒の剛性率  $G = 7.88 \times 10^{10} \text{ [N} \cdot \text{m}^{-2}\text{]}$  は、定数表の値 ( $7.8 \sim 8.4 \times 10^{10} \text{ [N} \cdot \text{m}^{-2}\text{]}$ ) の範囲内であった。

PSD のアナログ電圧信号を AD コンバータによりパソコンに入力しデータ処理する今回の方法は、力学的振動を電氣的に測定できることから、画面上で振動現象を逐次観測できる点に大きな長所がある。

現在物理実験で行っている連成振動(波と振動)実験は、力学的振動の様子を視覚的に実感できる点に長所がある反面、振動現象を逐次観測することができない。そこで本装置を説明段階のデモンストレーションに活用していきたい。

研修の目的の一つに創造教育センターの「現代 GP」の一貫として、「連成振動」の測定に BASIC-Stamp を用いることを試みた。PSD のアナログ電圧信号を AD コンバータ (ADC0834 株式会社コナミ社製) によりデジタル変換し、BASIC Stamp の P-BASIC プログラムで処理したデータを StampPlot Pro でグラフ化した。使用した AD コンバータが 8 ビットの逐次変換型であったことなどプロット点が粗いものとなった。学生実験に取り入れるためには、さらなる改良が必要となった。

## 参考文献

- [1] 静岡大学工学部共通講座物理編：「物理・化学実験テキスト (第 1 分冊)」(2007), pp.25-34
- [2] 増田健二：大学の物理教育 5-3 (1999), pp.44-49