

# 工学基礎物理実験「波と振動」の測定装置の改良

増田健二

工学部技術部学科系技術支援室

## 1. はじめに

本学では、2年次の物理実験において「連成振動(波と振動)実験<sup>[1]</sup>」を取り入れている。図1のように、直径 10mm 長さ 60cm の真鍮丸棒 2 本 P、Q の上部 10cm に穴をあけ、直径 1.5mm 長さ 70cm 程度の鋼鉄棒 S を連結する。支持台にその鋼鉄棒 S を水平におき丸棒 P、Q を振動させると、重力を復元力とし鋼鉄棒のねじれの力を結合力とする連成振動をする。また、学生の理解度を上げるため、半導体位置検出素子（以降 PSD と称す）とデジタルストレージオシロスコープを組み合わせた測定系を用い、学生実験の説明段階に取り入れている<sup>[2]</sup>。

今回の測定装置は、上記の説明用の演示実験装置に比べて安価な USB オシロスコープを用いることで、学生実験での測定器具として活用するための試作を行った。

## 2. ねじれ振動による連成振動の原理

現在使用している物理実験装置の配置を図1に示す。支持台に鋼鉄棒 S を水平に置き丸棒 P、Q を振動させると、重力を復元力とし鋼鉄棒のねじれの力を結合力とする連成振動をする。

P、Q をそれぞれ長さ  $\ell$  [m]、質量  $M$  [kg] の一様な棒とし、棒の重心より  $h$  [m] の位置に 1.6mm の穴をあけ、垂直に鋼鉄棒 S を通して固定する。図2は P、Q の振動を鋼鉄棒 S の軸方向から見た場合で、 $\phi_1, \phi_2$  は P、Q の鉛直線からの角変位である。P、Q の軸 S の慣性モーメントを  $I$  [kg·m<sup>2</sup>] とすると、P、Q の回転の運動方程式は次のようになる。

$$I \frac{d^2 \phi_1}{dt^2} = -Mgh \sin \phi_1 + c(\phi_2 - \phi_1) \quad (1)$$

$$I \frac{d^2 \phi_2}{dt^2} = -Mgh \sin \phi_2 - c(\phi_2 - \phi_1) \quad (2)$$

P、Q の振幅が小さい時は、 $\sin \phi_1 \cong \phi_1, \sin \phi_2 \cong \phi_2$  となり A、B、 $\alpha$ 、 $\beta$  は初期条件で定まる定数である。よって  $\phi_1, \phi_2$  は、

$$\phi_1 = \frac{A}{2} \sin(\omega_1 t + \alpha) + \frac{B}{2} \sin(\omega_2 t + \beta) \quad (3)$$

$$\phi_2 = \frac{A}{2} \sin(\omega_1 t + \alpha) - \frac{B}{2} \sin(\omega_2 t + \beta) \quad (4)$$

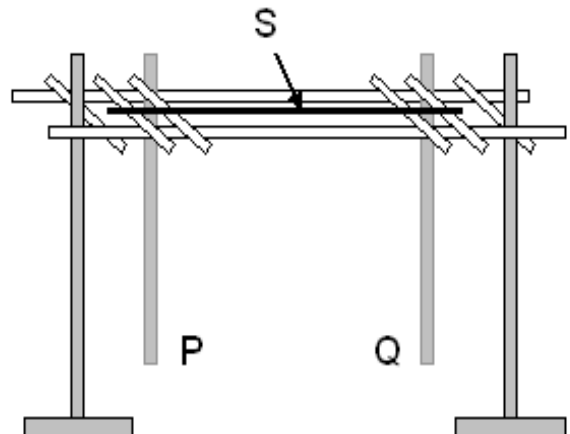


図1 連成振動実験装置の配置

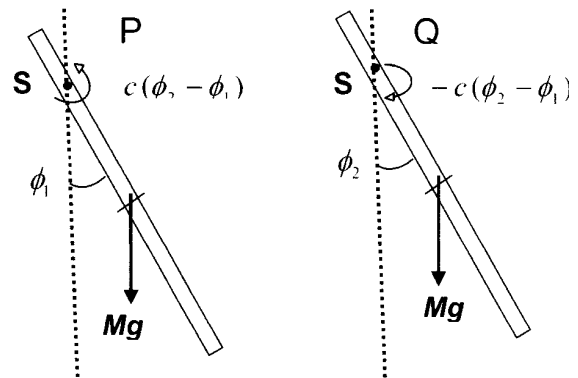


図2 鋼鉄棒 S の軸方向から見た図

となる。(3), (4)式を見ると  $P, Q$  の振動  $\phi_1, \phi_2$  は2つの角度について単振動、 $A/2 \sin(\omega_1 t + \alpha)$ ,  $B/2 \sin(\omega_2 t + \beta)$  の和または差の振動になっていることがわかる。このように、複雑な連成振動を単純な単振動の重ね合わせで表せるとき、これらの単振動をこの系の規準振動、またその振動数を規準振動数(または固有振動数)という。一般に  $N$  個の自由度 ( $N$  個の座標) をもつ連成振動系の小振動においては、 $N$  個の規準振動があり、各自由度に対する座標の時間的変化は  $N$  個の規準振動の一次結合として取り扱うことができる。

### 3. 実験装置と測定方法

#### 3.1 PSD を用いた位置検出方法

位置検出装置の写真を図3に示す。図3(a)のように、真鍮丸棒の下部を内径7mm 深さ50mm程度削り、その中に発光ダイオード(緑色)を接着する。遮蔽板として幅25mm 長さ70mm 厚さ0.5mmの真鍮板を用い、遮蔽版の中心には幅1mm 長さ10mmのスリットを設け、そこを通過する光の位置から丸棒の変位を測定する。図3(b)に PSD の測定部分の写真を示す。PSD (浜松ホトニクス S1352) を信号処理基板 (C3683-01) にハンダ付けし、15V の電源を接続する。この PSD 素子は、最大 $\pm 17\text{mm}$  (最大 $\pm 10\text{V}$ ) まで検出でき、変位 1.7mm に対して 1V の出力電圧を生じる。

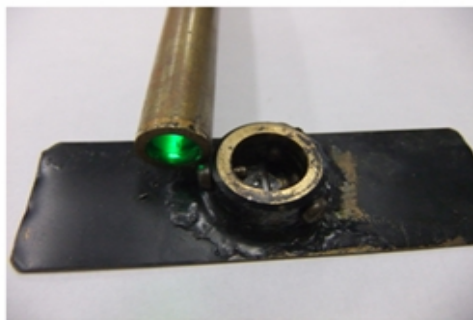


図3(a)

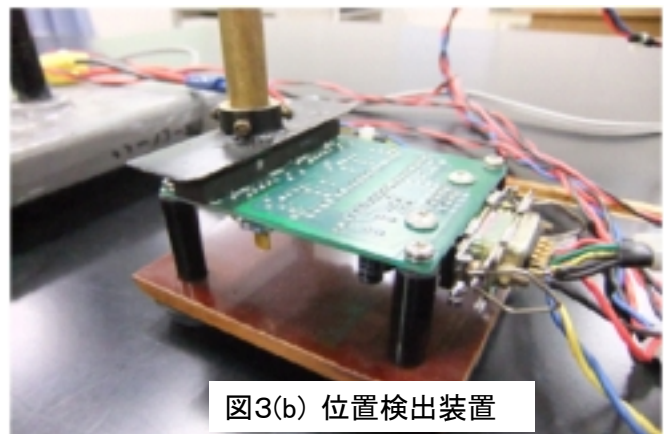


図3(b) 位置検出装置

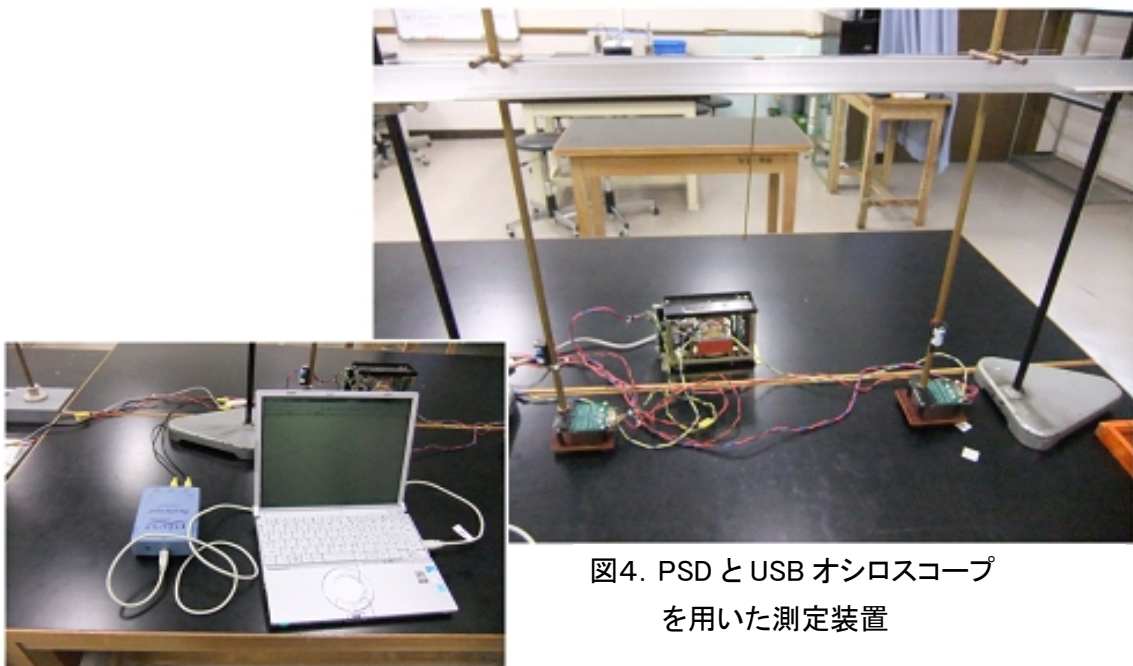


図4. PSD と USB オシロスコープを用いた測定装置

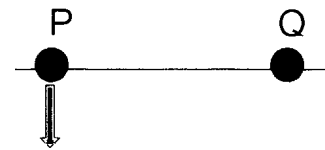
### 3.2 PSD と USB オシロスコープを用いた測定装置

測定系の全景を図4に示す。直径10mm長さ60cmの真鍮丸棒2本A, Bの上部10cmに穴をあけ、直径1.5mm長さ70cm程度の鋼鉄棒Sを連結する。支持台にその鋼鉄棒Sを水平におき丸棒P, Qを振動させる。真鍮丸棒の下部に埋め込んだ発光ダイオードの光がスリットを通過し、PSDの受光面の中心を照らすように設定する。2つのPSDの出力端子とUSBオシロスコープの2チャンネルの入力端子を接続する。PSDのアナログの電圧信号は、USBオシロスコープを用いてデジタル信号に処理し、パソコンに取り込む。パソコンでは付属の解析ソフトを用い、電圧振幅の時間変化を画面上に波形として表示する。

## 4. 測定方法と結果

### 4.1 振幅の時間変化による $\omega_1, \omega_2$ の測定

棒P, Qは自然の状態で鉛直下方を向くようにSに固定する。棒Qを鉛直下方に固定した状態で棒Pを適当な角度だけ変位させ、P, Qを同時に静かに放す。



この方法により、初期条件  $\phi_1 = a, \phi_2 = 0, \frac{d\phi_1}{dt} = 0, \frac{d\phi_2}{dt} = 0$  から  $A = B = a, \alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$

となる。よって(3), (4)式は

$$\phi_1 = \frac{a}{2}(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) = a \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \quad (5)$$

$$\phi_2 = \frac{a}{2}(\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) = a \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right) \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \quad (6)$$

となる。 $\omega_1 \cong \omega_2$  ( $M R h \gg 2c$ , すなわち重力による復元力に対して結合力が小)のとき、P, Qの振動 $\phi_1, \phi_2$ は角振動数 $(\omega_1 + \omega_2)/2$ で変化するが、その振幅は角振動数 $(\omega_1 - \omega_2)/2$ で「うなり」のようにゆるやかに変化していくことがわかる(図5)。 $\omega_1 \cong \omega_2$ の場合の $\phi_1, \phi_2$ の時間変化のP, Qの振動の周期 $T$ は

$$T = 4\pi/(\omega_1 + \omega_2) \quad (7)$$

となる。また振幅の周期 $\tau$ は

$$\tau = 2\pi/(\omega_2 - \omega_1) \quad (8)$$

となる。 $\phi_1, \phi_2$ の振動の変化は位相が $\pi/2$ だけずれているので、P, Qの振動の振幅は一方が最大のとき他方が最小となり、振動のエネルギーは交互に入れかわることになる。

図5の振動の周期 $T = 1.14\text{s}$ 、振幅のうなりの周期 $\tau = 12.74\text{s}$ となった。規準角振動数 $\omega_1, \omega_2$ は(7),(8)式より、

$$\omega_1 = \pi\left(\frac{2}{T} - \frac{1}{\tau}\right) = 5.27 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = \pi\left(\frac{2}{T} + \frac{1}{\tau}\right) = 5.76 \text{ rad/s}$$

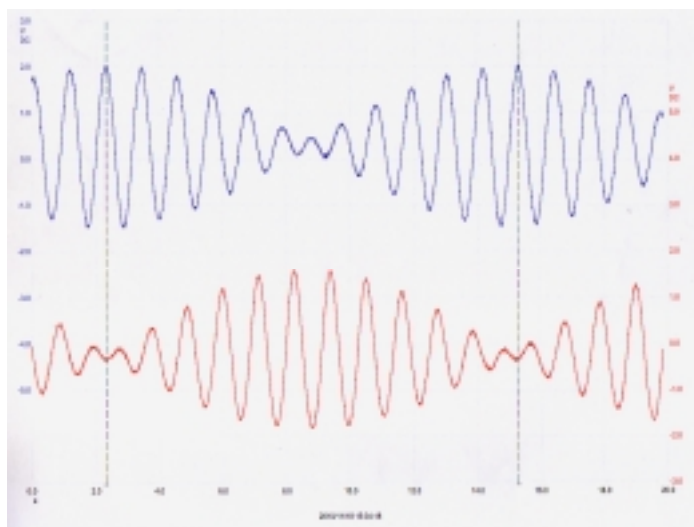


図5 「うなり」の振動波形

#### 4.2 同位相の振動（単振動）による $\omega_1$ の測定

鋼鉄棒Sの中心に軽い指標を取り付ける。P, Qを振動させた時の振動周期 $T_1$ と測定する。

(3)、(4)式からわかるように $\phi_1, \phi_2$ は2つの規準振動

$$\frac{A}{2} \sin(\omega_1 t + \alpha), \frac{B}{2} \sin(\omega_2 t + \beta)$$

の和または差となる。ここで $B=0$ のとき、 $\phi_1, \phi_2$ は規準角振動数 $\omega_1$ だけの振動となり、

$$\phi_1, \phi_2 = \frac{A}{2} \sin(\omega_1 t + \alpha)$$

となる。よってP, Qは図6のように常に同方向に振動する（PとQの位相差は0）。

10回の振動周期 $10T_1$ を測定する。

$$10T_1 = 11.84\text{s} \quad \therefore T_1 = 1.184\text{s}$$

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = 5.299\text{ rad/s}$$

#### 4.3 逆位相の振動（ねじれ振動）による $\omega_2$ の測定

P, Qを反対の方向に同じ角度だけ変化させ、同時に放す。

ここで、 $A=0$ のときは、

$$\phi_1 = \frac{B}{2} \sin(\omega_2 t + \beta)$$

$$\phi_2 = -\frac{B}{2} \sin(\omega_2 t + \beta)$$

$$= \frac{B}{2} \sin(\omega_2 t + \beta + \pi)$$

となり、規準角振動数 $\omega_2$ のみの振動となり、P, Qは、図7のように常に反対方向に振動する位相差）。

このときには、 $\phi_1 = -\phi_2$ が成り立つので、 $\phi_1 - \phi_2 = 2\phi_1 = -2\phi_2$ となる。

よって、PまたはQの振動周期 $T_2$ から、 $\omega_2$ を求める。

10回の振動周期 $10T_2$ を測定する。

$$10T_2 = 10.83\text{s} \quad \therefore T_2 = 1.083\text{s}$$

$$\omega_2 = \frac{2\pi}{T_2} = 5.793\text{ rad/s}$$

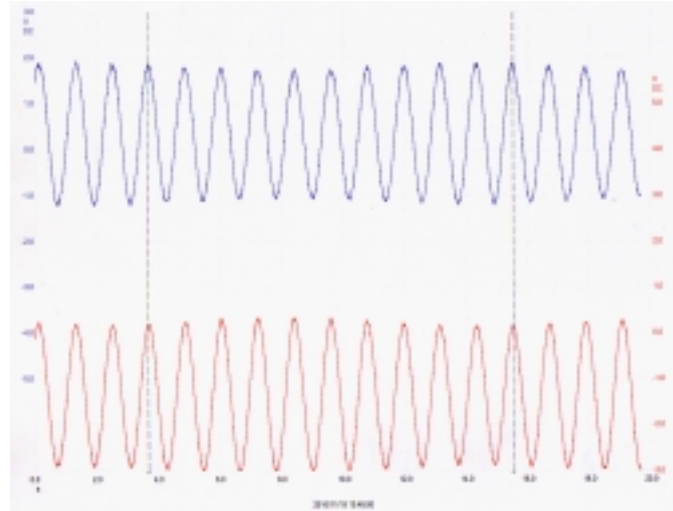
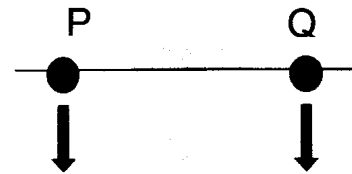


図6 単振動の振動波形

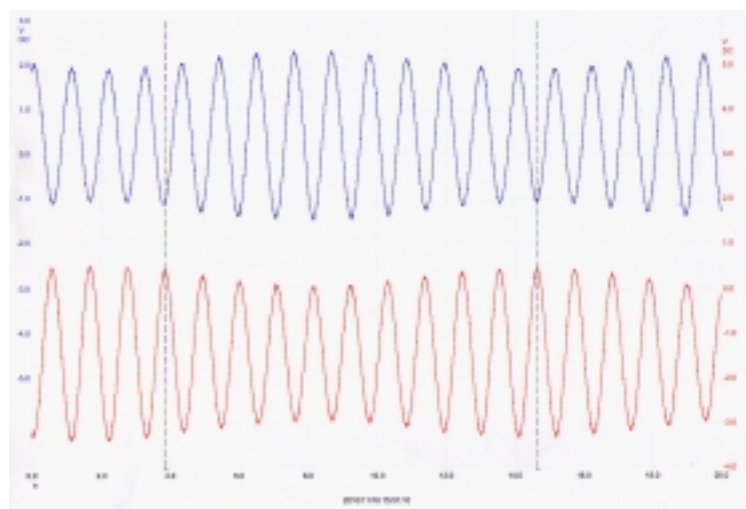
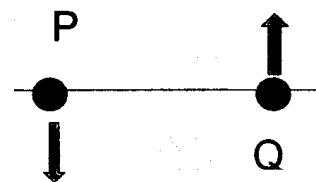


図7 ねじれ振動の波形

#### 4.4 鋼鉄棒のねじれの復元力と剛性率

支軸周辺の真鍮棒の慣性モーメント  $I$  は、

$$I = M \frac{\ell^2}{12} + M h^2 = 0.0269 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad \begin{array}{l} M = 0.399 [\text{kg}] \\ \ell = 0.595 [\text{m}] \\ h = 0.195 [\text{m}] \end{array}$$

で与えられる。ここで  $M$  は棒の質量、 $\ell$  は棒の長さ、 $h$  は棒の重心と支軸との距離である。

鋼鉄棒  $S$  のねじれの復元力のモーメント  $c$  は、 $c = \frac{I}{2}(\omega_2^2 - \omega_1^2)$  により与えられる。図5の「うなり」振動周波数はバラツキがあるため、図6, 図7から求められた  $\omega_1, \omega_2$  および上記で求めた  $I$  を代入してねじれの復元力のモーメント  $c$  を算出する。

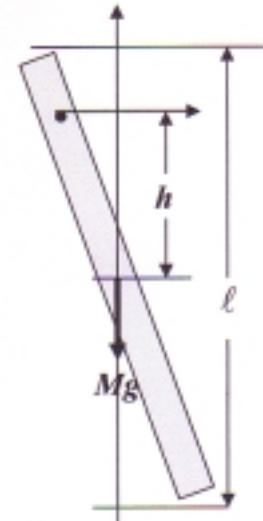
$$c = \frac{I}{2}(\omega_2^2 - \omega_1^2) = \frac{0.0269}{2} \cdot (5.793^2 - 5.299^2) = 0.0737 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$$

鋼鉄棒の半径  $r$ 、棒 P と Q 間の距離を  $L$ 、剛性率を  $G$  としたときの  $c$  は、

$$c = \frac{\pi G r^4}{2L} \quad \begin{array}{l} r = 0.752 \times 10^{-3} \text{ m} \\ L = 0.550 \text{ m} \end{array}$$

と表わされるので、

$$G = \frac{2L}{\pi r^4} \cdot c = \frac{2 \times 0.550}{\pi \times (0.752 \times 10^{-3})^4} \times 0.0737 = 8.07 \times 10^{10} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$$



### 5 . 技術研修の内容

工学基礎(2年次)物理実験の「波と振動の測定装置の改良」と題した技術研修を行った。研修は、11月18日(木)の午後に物理実験第3実験室で行われ、「波と振動」の実験種目を担当している高木廣伸、吉田博文、島田和彦の3名と桑原憲弘、黒川正明、草薙弘樹、嘉嶋康彦、加藤武則の計8名の参加があった。研修内容は、前半は学生と同様の実験体験をするということで、ストップウォッチと数取器を用いて100回の振動周期の測定を行い、角振動数を求め、鋼鉄棒の剛性率を求めるまでの数値計算を行った。後半は、USB オシロスコープが1台しかないので、パソコンの画面をスクリーン上に投影して、操作方法を実践した。連成振動の典型的な現象の「うなり振動(図5)」、「単振動(図6)」、「ねじれ振動(図7)」の波形をグラフ化したもの示す。USB オシロスコープには、点線部分のカーソルをドラックすることによって周期の計測が0.01sの精度でできる。

### 6 . 結果のまとめと評価

測定より得られた鋼鉄棒の剛性率  $G = 7.88 \times 10^{10} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$  は、定数表の値 ( $7.8 \sim 8.4 \times 10^{10} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ ) の範囲内であった。

PSDのアナログ電圧信号をUSB オシロスコープによりパソコンに入力しデータ処理する今回の方法は、力学的振動を電気的に測定できることから、画面上で振動現象を逐次観測できる点に大きな長所がある。

現在物理実験で行っている連成振動(波と振動)実験は、力学的振動の様子を視覚的に実感できる点に長所がある反面、振動現象を逐次観測することができない。そこで本装置を12セット設置するための準備を予算措置を含めて検討していきたい。

物理実験の中では、「波と振動」「レーザー光の回折と干渉」「線の計数測定」の3種目を技術職員が担当しており、今回のような技術研修の取り組みは、装置開発とともに教材開発や実験指導のスキルアップの観点からも有効であったと思われる。

## 参考文献

- [1] 静岡大学工学部共通講座物理編：「物理・化学実験テキスト（第1分冊）」（2010），pp.22-30
- [2] 増田健二：大学の物理教育 5-3（1999），pp.44-49



図8 技術研修の様子