

平成 22 年 5 月 6 日現在

研究種目： 基盤研究(C)
 研究期間： 2007～2009
 課題番号： 19540177
 研究課題名(和文) 解が初期値にリプシッツ連続的に依存する微分方程式系に対する適切性理論の構築
 研究課題名(英文) Wellposedness of differential equations whose solutions depend Lipschitz continuously on their initial data
 研究代表者
 田中 直樹 (TANAKA NAOKI)
 静岡大学・理学部・教授
 研究者番号： 00207119

研究成果の概要(和文)：本研究は、解が初期値にリプシッツ連続的に依存する微分方程式系に対する適切性定理の確立を課題とし、それをリプシッツ作用素半群の生成の問題に翻訳して考察した。成果は、リプシッツ作用素半群が抽象的コーシー問題の軟解を与えるための必要十分条件を与えたこと、及び、正則半群の非線形摂動として表されるリプシッツ作用素半群の特徴づけを与えたことである。特色は、解の初期値に関する連続的依存性を保障する準消散条件を提案するために、距離に似た非負なリプシッツ連続汎関数を用いた点である。

研究成果の概要(英文)：The purpose is to establish the wellposedness of differential equations whose solutions depend Lipschitz continuously on their initial data by interpreting it as a problem of the generation of semigroups of Lipschitz operators. We give a necessary and sufficient condition for a semigroup of Lipschitz operators to give a mild solution to the abstract Cauchy problem and characterize a semigroup of Lipschitz operators which is represented as a nonlinear perturbation of an analytic semigroup. The feature is to use a metric-like functional in order to propose a new type of dissipative condition.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2008年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2009年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：実解析学(作用素半群の理論と発展方程式)

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：semigroup of Lipschitz operators, semilinear equation, quasilinear equation, metric-like functional, analytic semigroup, stability condition, subtangential condition

1. 研究開始当初の背景

(1) 近似解法による微分方程式系の初期値問題, 混合問題の適切性 ① 保存則系の初期

値問題の差分近似解法に関する研究：長い間未解決であった、保存則系の初期値問題の小さな初期値に対する適切性の問題は、波面追

跡法、及び、粘性消滅法により解決された。注目すべき点は、2つの弱解の差を測るために構成された汎関数に関して、弱解の差が初期値の差に縮小的に依存することが示されることで、保存則系の初期値問題に対する解作用素の族がリブシッツ作用素半群を形成することが明らかにされたこと、さらに、この事実が利用され、適切性定理が証明されていることである。一方、単独保存則の初期値問題の適切性を証明する方法には、上記2つの証明方法のほかに、差分近似法によるものが先行研究にあった。② チャーノフの積公式に関する研究：微分方程式の初期値問題に対する差分近似解の収束性の問題を位相解析的に定式化した理論として、ラックスの同等定理、及び、チャーノフの積公式がよく知られている。これらは、離散半群に対するノルムを用いた安定性条件と、ラックスの同等定理においては、解作用素を用いた整合性条件、チャーノフの積公式においては、レゾルベント収束を用いた整合性条件が、差分近似解の収束を保障することを主張する定理である。

(2) 微分方程式系の初期値問題、混合問題の適切性定理の構築 ①非線形双曲型方程式の初期値問題、混合問題の適切性に関する研究：保存則系の小さな初期値に対する適切性の問題は解決をみた。しかしながら、西田システムは、大きな初期値に対しても時間大域的な弱解を持つことが知られているが、弱解の大きな初期値に関する連続的依存性が成立するかどうかは分かっていない。この意味において、保存則系の大きな初期値に対する適切性の問題は、依然未解決である。また、キルヒホッフ方程式を代表とする準線形双曲型方程式に対する初期値問題、混合問題の時間大域的適切性の問題は、多くの場合、方程式のもつ特性を生かしながら、個別的に研究されていた。② 非線形放物型方程式の初期値問題、混合問題の適切性に関する研究：単調作用素の1つである劣微分作用素の理論は、生成される縮小作用素半群が平滑性を持つという事実から、非線形熱方程式を代表とする非線形放物型方程式の初期値問題、混合問題に幅広く応用されてきている。近年、複素ギンツブルグ・ランダウ方程式の混合問題に対する解作用素族が平滑性を持つこと、及び、リブシッツ作用素半群を形成することが報告された。また、準線形放物型方程式の初期値問題、混合問題に対する適切性を研究する目的で、半単調作用素という概念を用いて劣微分作用素の理論を拡張しようという流れもある。

2. 研究の目的

(1) 近似解法による微分方程式系の初期値問

題、混合問題の適切性 ① 保存則系の初期値問題の差分近似解法に関する研究：背景に述べたように、保存則系の初期値問題に対する適切性を差分近似法により証明しようという重要で魅力ある研究が活発化すると考えられた。そこで、リブシッツ作用素半群の考察を通して、差分近似法により、保存則系の初期値問題に対する適切性定理を得ようというのが、本研究の目的である。② チャーノフの積公式に関する研究：先行研究で用いられてきたノルムにより定まる距離の代わりに、距離に似た汎関数による安定性条件のもとで、積公式を研究する必要性が、理論的な立場だけでなく実用的な立場からも見えてくる。これを実行することが本研究の目的である。

(2) 微分方程式系の初期値問題、混合問題の適切性定理の構築 ①非線形双曲型方程式の初期値問題、混合問題の適切性に関する研究：様々な微分方程式系の個別的な考察から系統的な性質を見出し、統一的な適切性理論を展開できないかという問題は興味深い。これらの問題を、リブシッツ作用素半群、及び、加藤理論の考察を通して、解明していくことが本研究の目的である。② 非線形放物型方程式の初期値問題、混合問題の適切性に関する研究：劣微分作用素に代わる『平滑性を引き起こす作用素』のクラスを提案することが重要な課題となっており、それが本研究の目的である。

3. 研究の方法

(1) キルヒホッフ方程式を代表とする準線形双曲型方程式に対する混合問題の時間大域的適切性の問題は、多くの場合、方程式のもつ特性を生かしながら、個別的に研究されている。これらの個別的な考察から系統的な性質を見出し、統一的な適切性理論を展開できないかという問題は興味深い。これらの問題を、リブシッツ作用素半群の考察を通して解明していく。このことが本研究の特色ある研究手法である。また、リブシッツ作用素半群の概念は、解の初期値に関する連続的依存性に着目して作用素半群の理論を展開するという発想から生まれた。

(2) 従来では、解の初期値に関する連続的依存性を確立するために、2つの解の差を測るものとして、ノルムが用いられることが多く、その方法に対応する理論が単調作用素の理論である。本研究では、解の初期値に関する連続的依存性を保障する消散条件、安定性条件を提案するために、距離に似た非負なリブシッツ連続汎関数を用いた。このことも本研究の特色ある研究手法である。

(3) 従来から用いられてきた独立な条件を以下の例に挙げるように結合させた条件を提案した研究手法も本研究の特色である。
① $L^p - L^q$ 評価を抽象的に組み込んだ汎関数の導入とそれによる半線形安定性条件の提案
② ペニランによる integral solution を暗示させる, 準消散条件に劣接線条件を組み込んだ条件の提案

4. 研究成果

(1) リプシッツ作用素半群が抽象的發展方程式の軟解を与えるための必要十分条件の導出: 解の初期値に関する連続的依存性に着目して作用素半群の理論を展開するという発想から, リプシッツ作用素半群の概念が生まれた。従来では, 解の初期値に関する連続的依存性を確立するために, 2 つの解の差を測るものとして, ノルムが用いられることが多く, その方法に対応する理論が単調作用素の理論である。リプシッツ作用素半群の生成定理は, 抽象的コーシー問題と密接に関係している。その抽象的コーシー問題には, 解の時間に関する微分可能性により, 様々な解の概念がある。とくに, 古典解の一般化である, 軟解 (= 抽象的發展方程式に対する後退差分方程式の解の一様収束極限として得られる解) の概念がある。本研究では, 解の初期値に関する連続的依存性を保障する条件として, 距離に似た非負なリプシッツ連続汎関数により表現される新たな消散条件を提案した。この消散条件のもと, リプシッツ作用素半群が抽象的發展方程式の軟解を与えるための必要十分条件を与えることに成功し, 得られた理論をキャリアー方程式の混合問題へ応用した。

(2) 正則半群の生成素の非線形摂動: 平滑性のある解をもつ方程式に関する適切性定理へ適用可能なリプシッツ作用素半群の生成定理を考察することが本研究の目的である。平滑性を持つリプシッツ作用素半群の生成素が, 正則半群の生成素の非線形摂動として表現される場合から考察した。 L^2 空間において, 複素ギンツブルグ・ランダウ方程式は, その解作用素が平滑性を持ち, しかも, 正則半群の生成素と非線形作用素の和により支配されていることが示されており, 本研究を進める上で, 重要なモデルである。本研究の目的を達成するための接近方法として, 研究課題を正則半群の生成素の非線形摂動として表される生成素を持つリプシッツ作用素半群の特徴づけの問題に翻訳して考察した。これは本研究の特色の1つである。得られた結果は次の通りである。生成素が正則半群の生成素の非線形摂動として表されるリプシッツ作用素半群は, 距離に似た汎関数とそれを用いて表現される安定性条件, 及び, 正則

半群の生成素の分数ベキのノルムを用いて表現される放物型劣接線条件により特徴付けられる。この特徴づけを複素ギンツブルグ・ランダウ方程式に応用し, 岡澤, 横田による L^2 適切性定理と解の平滑性に関する先行研究結果を, 我々の得た解は正の時刻に対して1回連続的微分可能であるという点で改良した。

(3) 放物型半線形發展方程式に付随するリプシッツ作用素半群の特徴づけ: 平滑化効果を期待できる半線形發展方程式は, 同値な積分方程式へ書き換えられ, $L^p - L^q$ 評価, ハーディ・リトルウッド・ソボレフの不等式などの援用により, その適切性が考察されていた。一方, 平滑化効果をもつ半線形發展方程式を組織的に取り扱う方法として, 正則半群の非線形摂動の理論が, 正則半群の生成素の分数ベキをもとに展開されていた。両者の特性を生かした枠組みとして, $L^p - L^q$ 評価を抽象的に組み込んだ汎関数の導入とそれによる半線形安定性条件の提案を行った。この条件及び放物型劣接線条件により, 平滑効果を持つ半線形發展方程式を組織的に取り扱う新たな方法を与え, Drift-diffusion system の適切性の問題へ応用した。

(4) 準消散条件に劣接触条件を組み入れた条件下でのリプシッツ作用素半群の生成定理: ノルムによる準消散条件のもとに, 軟解から形成される解作用素は初期値に関して縮小的であり, 軟解は, ペニランによる integral solution となることが知られている。また, この integral solution の概念は, 解の初期値に関する連続的依存性と密接に関係している。この事実から, 解の初期値に関する連続的依存性に着目して作用素半群の理論を展開するためには, ノルムによる準消散条件を弱めて, ペニランによる integral solution を暗示させる, 解が初期値に関してリプシッツ連続的に依存性するための条件を導入する必要性が生じた。この種の条件として, ノルムの代わりに距離に似た汎関数を用い, 準消散条件に劣接触条件を組み込んだ条件を提案した。その条件のもとに, リプシッツ作用素半群の生成定理を考察したという点が本研究の特色である。

(5) ギンツブルグ・ランダウ方程式へのリプシッツ作用素半群的接近方法: ギンツブルグ・ランダウ方程式に関して, 非線形のベキに制限を設ける場合に, 適切性の問題が, 平滑化効果を証明する手段として効果的な劣微分作用素を用いて表現される抽象的コーシー問題へ変換され考察されていた。その後, 横田により, 実函数論分科会特別講演で, ギンツブルグ・ランダウ方程式に対する L^p

適切性の問題が提示された。この種の問題を、リブシッツ作用素半群の生成の問題へ翻訳し考察したことが本研究の特色である。実際、ギンツブルグ・ランダウ方程式を支配する微分作用素が、距離に似た汎関数により表現される準消散条件を満たすことを証明し、先行研究とまったく異なる、リブシッツ作用素半群論的接近方法を与えた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件)

- ① Y. Kobayashi, N. Tanaka, A Lipschitz semigroup approach to two-dimensional Navier-Stokes equations, *Nonlinear Anal. TMA*, 査読有, 72 (2010) 1820–1828.
- ② T. Matsumoto, N. Tanaka, Well-posedness for the complex Ginzburg-Landau equations, *GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl.*, 査読有, 32 (2010) 427–440.
- ③ T. Matsumoto, N. Tanaka, Lipschitz semigroup approach to drift-diffusion systems, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, 査読有, B15 (2009) 147–177.
- ④ Y. Kobayashi, N. Tanaka, An application of semigroups of locally Lipschitz operators to Carrier equations with acoustic boundary conditions, *J. Math. Anal. Appl.* 査読有, 338 (2008) 852–872.
- ⑤ T. Matsumoto, N. Tanaka, Semigroups of locally Lipschitz operators associated with semilinear evolution equations of parabolic type, *Nonlinear Anal. TMA*, 査読有, 69 (2008) 4025–4054.

[学会発表] (計 5 件)

- ① 松本 敏隆, 複素 Ginzburg-Landau 方程式の L^p 適切性, 日本数学会秋季総合分科会, 2009 年 9 月 25 日 (大阪大学)
- ② 松本 敏隆, Drift-diffusion 方程式へのリブシッツ作用素半群の接近法, 日本数学会秋季総合分科会, 2008 年 9 月 27 日 (東京工業大学)
- ③ 田中 直樹, リブシッツ作用素半群入門 (解が初期値にリブシッツ連続的に依存する微分方程式系への応用を目指して) 第 30 回発展方程式若手セミナー, 2008 年 9 月 2 日 (山梨)
- ④ 田中 直樹, Local semigroup of locally Lipschitz operators の生成定理, 日本数学会年会, 2008 年 3 月 25 日 (近畿大学)
- ⑤ 田中 直樹, 解が初期値にリブシッツ連続的に依存する微分方程式系に対する適切性定理, 第 46 回実函数論・函数解析学合同シンポジウム 2007 年 8 月 7 日 (九州大学)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

田中 直樹 (TANAKA NAOKI)
静岡大学・理学部・教授
研究者番号: 00207119

(2) 研究分担者

田村 英男 (TAMURA HIDEO)
岡山大学・大学院自然科学研究科・教授
研究者番号: 30022734
(H20 → H21: 連携研究者)
浅倉 史興 (ASAKURA FUMIOKI)
大阪電気通信大学・金融経済学部・教授
研究者番号: 20140238
(H20 → H21: 連携研究者)
久村 裕憲 (KUMURA HIRONORI)
静岡大学・理学部・准教授
研究者番号: 30283336
(H20 → H21: 連携研究者)
松本 敏隆 (MATSUMOTO TOSHITAKA)
広島大学・大学院理学研究科・助教
研究者番号: 20229561
(H20 → H21: 連携研究者)

(3) 連携研究者