論　説

数学教育における算数・数学と社会をつなげる力の意義と学習指導に関する研究*

西村　圭一**・長崎　栄三***

要　約

本研究の目的は，算数・数学と社会をつなげる力の，算数・数学教育の目標における位置づけを明らかにするとともに，授業において，生徒がその力をどのように発揮するかを事例的に明らかにし，算数・数学と社会をつなげる力の習得を目指す学習指導への示唆を得ることである．本研究を通して，第一に，算数・数学と社会をつなげる力は，「算数・数学の力」における，算数・数学を使う力，表す力，考え合う力に総合的に関わっていること，また，数学化や数学的モデル化を主たる過程として含んでいるが，学級集団での話し合い等も包含するようになっていることを示した．第二に，２つの実験授業を行い，生徒が算数・数学と社会をつなげる力をどのように発揮するかを明らかにし，教科書の通常の単元の中で，その力の習得をめざす授業が実現可能なことを事例的に示した．社会の現象を数学の対象に変える力や社会に照らして検証する力をはじめは十分には発揮できない生徒がいる一方，教師の発問や学級集団での話し合い等の場面設定により発揮できる生徒もいることがわかった．

キーワード：算数・数学と社会をつなげる力，数学的モデル化，数学化，目標

１．研究の目的

筆者が属する「算数・数学と社会・文化のつながり」に関する研究グループでは，社会の問題を解決する際に必要な様々な能力や見方や考え方を，「算数・数学と社会をつなげる力」として構造化し，算数・数学科の授業において，その育成を目指してきた（例えば，長崎他，2001，2004；西村，2004，2005；島田・西村，2006）．それは，算数・数学においては，算数・数学の理論的な内容を理解し発展させる側面と，算数・数学と現実のつながりを大切にする側面の両者のバランスの取れた教育が必要であると考えるからである．ところが，わが国ではともすると前者の理論的な発展だけに偏りがちであり，そこで，後者の現実のつながりを強調し，その具体的な授業構築を提案してきた．しかし，一方で，社会の問題を扱いさえすればよい，数学と社会とのつながりを感得させればよいといった誤解が生じたり，社会の問題と数学の問題をバランスよく扱う必要性が伝わらなかったりした面があった．これは，筆者らが，算数・数学と社会をつなげる力と，算数・数学教育の目標の全体性との関連について十分に論じてこなかったことや，実践事例において，生徒が，それらの力をどのように発揮するかを示しきれていなかったことにも原因があると考えた．

本研究では，算数・数学と社会をつなげる力の，算数・数学教育の目標における位置づけを明らかにするとともに，授業において，生徒がその力をどのように発揮するかを事例的に明らかにし，その力の習得を目指す学習指導への示唆を得ることを目的とする．理念的に，算数・数学と社会をつなげる力の意義を述べるだけではなく，それを授業で具体化していく道筋を示すことが重要だと考えるからである．

なお，本研究では，「社会」を，生活，社会，日常生活，日常社会，現実生活，現実社会，現実世界，実社会，実世界，環境などを総称して用いる．

*平成20年４月21日受付，平成20年８月13日決定
**東京学芸大学附属国際中等教育学校
***国立教育政策研究所

2．研究の方法

(1) 算数・数学と社会をつなげる力の意義を，算数・数学教育において育成することが必要な力との関係から文献をもとに検討する．

(2) (1)で明らかにした意義を，授業において，どのように実現するかを事例的に示す．すなわち，算数・数学と社会をつなげる力の習得を目指す実験授業を行い，生徒のその力の様相を分析する．

3．研究の内容

(1) 算数・数学と社会をつなげる力の意義

①算数・数学と社会をつなげる力の全体像

算数・数学と社会をつなげる力とは，「社会における現象や問題に取り組む際に必要な力や感覚」であり，それは「数学的活動」（島田，1977）を基盤としており，そのうちの「数学外の問題を解決する活動」に焦点化したものである．そのような力や感覚を，「社会の問題を数学的に解決する力」，「社会において数学でコミュニケーションする力」，「社会における量・形についての感覚」，「近似的に扱う力」の4つの大きな力で具体化し構造化した（例えば，長崎他，2001）．それらをまとめると，表1の通りである．

表1　算数･数学と社会をつなげる力

A．社会における量・形についての感覚
- A01．長さの感覚　　A02．広さの感覚
- A03．かさの感覚　　A04．重さの感覚
- A05．角度の感覚　　A06．時間の感覚
- A07．速さの感覚　　A08．形の感覚

B．社会の問題を数学的に解決する力
- B1．社会の現象を数学の対象に変える
  - B11．仮定をおく　　B12．変数を取り出す
  - B13．変数を制御する　　B14．仮説を立てる
- B2．対象を数学的に処理する
  - B21．表・式・グラフ・図等で表現する
  - B22．操作を実行する
- B3．社会に照らして検証する
  - B31．予測・推測をする　　B32．修正する

C．社会において数学でコミュニケーションする力
- C01．数学的表現から現象を読み取る，伝える
- C02．数学を使った日常文を読み取る

D．近似的に扱う力
- D01．近似的に式を立てる
- D02．近似的に読み取る

「B．社会の問題を数学的に解決する力」は，数学的モデル化過程とも言われる，社会の問題を算数・数学の対象に変え，その上で算数・数学の手法を使って処理し，さらにその結果を社会の場面に照らして検証する過程において，中心的に働く力である．表・式・グラフ・図等で表現することが，数学的モデルを作成することにあたる．これには，ICTを活用すること，数学的モデルを統合したり，一般化したりすることが含まれる．また，操作を実行することには，ICTを活用すること，処理をアルゴリズム化することが，予測・推測をすることには，適用可能範囲や限界について評価すること，結論の正当性を示すことが含まれる．

「C．社会において数学でコミュニケーションする力」は，社会では，集団で交流しながら問題を解決することが求められていることなどをふまえた力である[1)]．数学的モデル化の全過程にかかわって働くものであり，解決結果の正当性を他者に伝えること，他者の考えを批判的に理解することが含まれる．

「A．社会における量・形についての感覚」「D．近似的に扱う力」は，B，Cの背景で働く力である．前者は，数や図形が社会ではどのような意味を持つかということを直観的に理解していることに関する感覚である．後者は，目的に照らして近似的に処理したり，計算処理した結果を理想的な数としてではなく社会で扱える数と見なしたりすることに関する力である．

さらに，社会の問題を算数・数学で扱う際には，これらの力の他に，それらを支えたり，問題の解決過程を監視し，統制したりする意識や態度が必要であり，また，それらから育成される意識や態度がある．例えば，社会の問題を解決したことにより，算数・数学に対する意識や数学観が変わり，さらに，そのことが算数・数学をつなげる力に影響する．これらをまとめると，表2の通りである．

表2　算数・数学と社会のつながりに関する意識・態度

- E01．算数・数学に対する意識
- E02．算数・数学の表現方法に対する意識
- E03．算数・数学的処理に対する意識
- E04．算数・数学における協同的な学習に対する意識
- E05．算数・数学における応用的な態度
- E06．算数・数学における発展的な態度

② 「算数・数学の力」との関連

筆者が属する「算数・数学の力」の研究グループ（長崎他(2008)）は，平成14年度から平成18年度にかけて，数学的活動・数学的方法の側面を算数・数学教育の目標として「算数・数学の力」の構造化を図った．そこでは，数学的な考え方などの先行研究（例えば，島田，1977；松原，1977；中島，1981；竹内・沢田，1984；片桐，1988；古藤，1992）をもとに，算数・数学教育にとって，概念理解に加え，能力習得が現代的な課題となっている点を踏まえ，「算数•数学の力」を，次の7つの原則のもとで，表3のように構造化した．

1）算数•数学教育の3つの目的にかかわる
2）算数•数学教育の認知的な目標に多面的にかかわる
3）算数•数学の内容と一体となったものである
4）数学の思想・方法・過程に見出される
5）算数•数学の学習指導過程に見出される
6）算数的活動・数学的活動によってよりよく育成される
7）子どもが学習によって身に付けられる

表3　算数・数学の力

算数•数学を生み出す力
① 算数•数学できまりや方法などを見つける力
② 算数•数学で前提をもとに確かめる力
③ 算数•数学で多様に考える力
④ 算数•数学で関係づけて考える力
⑤ 算数•数学で発展的に考える力

算数•数学を使う力
① 現実の問題を算数•数学の問題に直す力
② 算数•数学のきまりに従って処理する力
③ 算数•数学で処理した結果を振り返る力
④ 算数•数学で予測・推測する力
⑤ 算数•数学で感覚的・概括的に判断する力

算数•数学で表す力
① 式・表・グラフ・図などで表す力
② 式・表・グラフ・図などを使う力
③ 式・表・グラフ・図などをよむ力

算数•数学で考え合う力
① 算数•数学で説明する力
② 算数•数学で解釈する力
③ 算数•数学で話し合う力

「算数・数学の力」は，中心に，算数・数学を生み出す力と算数・数学を使う力があり，その両者にかかわるものとして，算数・数学で表す力があり，その全体を取り巻くものとして，算数・数学で考え合う力があると考えている．また，これらの力は厳密に類別できるものではなく，ある力とある力が同時に働くことも多く，相互に影響し合う面もあると考える．このことを前提としながら，算数・数学と社会をつなげる力をみると，それは主として算数・数学を使う力に対応し，算数・数学で表す力とも大きく関わっていることがわかる．また，集団での問題解決や，方法や結果を伝えたり解釈したりするという面では，算数・数学で考え合う力とも関わっている．つまり，算数・数学と社会をつなげる力は，「算数•数学の力」の全体に大きく関わるものであることがわかる．

ただし，算数・数学を生み出す力は，算数・数学内での発展を目指したものであり，数学外へ目を向けた算数・数学をつなげる力とは，その方向性が異なる．したがって，両者の関係は薄いと考えている．ここに，筆者が，社会の問題の扱いと数学とのバランスを図ることを主張する理由がある．数学のすべての授業で社会の問題を扱うのでは，それが重くなりすぎるだけではなく，算数・数学を生み出す力の育成を十分には図れないことになるからである．

③数学化・数学的モデル化との関連

算数・数学と社会をつなげる力には，数学化や数学的モデル化過程が含まれており，「B．社会の問題を数学的に解決する力」がそれらに相当する．

数学化・数学的モデル化については，その論者の理論的背景から，次の3つの立場が同定されている（阿部，2007）．第一は，事象から数学化し，さらに数学内で数学化を続けることで，数学を発展させるという数学化論（フロイデンタールら），第二は，事象から数学化し，数学的モデルを作り解決し，再び現実へと戻るという数学応用論（ポラックら），第三は，第一と第二の両者を包含する論（島田茂ら）である．

これらのいずれにおいても，事象を数学的に表現したり，それをさらに他の数学に表現し直したりする「数学化」が鍵となる概念となっている[2)]．ここで重要なことは，数学化は，現実的な事象を数学的に表現することだけではなく，数学内にお

ける発展においても使われるということである．他方，第一の数学化においては，数学から現実に戻って検証をして現実の解を探究するということは重視されていない．

算数・数学をつなげる力においては，数学化が重要な役割を演じるが，それは現実的な事象を数学的に表現する部分である．そして，それらを含めて，現実から数学へ，そして，現実へと戻るサイクルを繰り返す数学的モデル化過程を取り込もうとしている．したがって，上述の分類に従えば，第三の全体像を意識しつつ，第二を強調するものである．ただし，それだけではなく，集団での活動を通して，コミュニケーションをする力の育成も視野に入れている．

他方，生徒の興味関心を惹きつけるために導入問題に現実的な問題を持ってきて，それを数学化して，その後は数学の問題に終始するという指導も見受けられる．そのような指導と筆者の考える算数・数学をつなげる力の指導とは，その問題の解決とともに，その解決過程で身につける様々な力や態度に焦点を当てるという点で異なる．

④算数・数学と社会をつなげる力の意義

算数・数学と社会をつなげる力は，これまで検討してきたように，「算数・数学の力」を育成するものとして捉えられる．そこでは，「算数・数学の力」に関わる，算数・数学を使う力，表す力，考え合う力に総合的に関わっている．また，数学化や数学的モデル化を主たる過程として含んでいるが，学級集団での話し合い等も包含するようになっている．このような算数・数学と社会をつなげる力の指導では，単に社会の問題を扱うだけではなく，その過程で数学的モデル化に関わる能力，さらには社会的なコミュニケーション能力をも育成しようとしている．

算数・数学教育においては，数学の概念形成を図るものと数学の能力習得を図るものがあるが，算数・数学と社会をつなげる力は，主として後者であり，しかもそれは数学外の対象に向けたものである．一方，数学の概念形成や数学内での発展を目指した能力習得も必要不可欠であり，数学内と数学外，数学の概念と方法という多様なバランスが求められている．

(2) 授業における算数・数学と社会をつなげる力

算数・数学と社会をつなげる力は，(1)で明らかにしたことから，算数・数学の授業において，広く，その習得を目指す価値があることがわかる．したがって，どの単元の中でも，この力の習得を目指す学習指導を行う必要があると考える．では，そのような学習指導は実現可能なのだろうか．その道筋を示すことで，はじめて，実際の学習指導の改善につながると考える．そこで，ここでは，中学校1年「文字と式」，2年「平行と合同」において，算数・数学と社会をつなげる力の習得を目指す実験授業を行い，生徒のその力の様相を分析し，その学習指導の可能性を探る．

なお，算数・数学の授業で扱う社会の問題には2つのタイプがあると考えている．1つは，社会の問題を数学的モデルを作って解決するタイプであり，もう1つは，社会で直接あるいは間接的に用いられている数学的モデルを見いだし考察するタイプである．ここでは，そのそれぞれについて，授業の実際を示すことにする．前者のタイプが「バンドウイルカは絶滅するか」，後者のタイプが「なるほど分度器のしくみを探ろう」である．

①「バンドウイルカは絶滅するか」

> 日本では，伝統的にイルカ漁が行われていた．野生動物の保護活動への関心が世界的に高まり，イルカは海洋野生動物としての保護対象となった．そのため，日本は，1993年に，種毎に捕獲許可頭数を定めた．たとえば，バンドウイルカは，当時，日本の沿岸域に約36000頭が生息しており，それまでの増加数などを考慮して年間1100頭の捕獲が許可された．現在のバンドウイルカの頭数は，どのくらいになっているだろうか．また，将来はどうなるだろうか．

ア）単元：中学校1年　文字と式

文字と式の学習とは，具体的には次のように関係する[3]．

- n 年後のバンドウイルカの頭数を式に表すこと
- n 年後のバンドウイルカの頭数を表す式を読み取ること

例）1年ごとの減少（または増加）頭数を先に求める考えや，生まれる頭数や捕獲頭数ごとに予測し，あとから合計する考えなどを式から読み取る．条件の変更に対応しやすい式はどれかを考える．など

イ）対象：国立大学附属中学校1年生40名

文字を使った式の表し方，1次式の加減乗除の学習を終えている．

ウ）目標：バンドウイルカの将来の頭数を，文字を用いた式に表すとともに，それを読み取ることができる．

（算数・数学と社会をつなげる力に関して）

- 自分なりの根拠を持ってバンドウイルカの頭数の変化に関する仮定をおいたり，仮説を立てたりすることができる．
- バンドウイルカの頭数の変化を，表・式・グラフ等で表現し，伝えることができる．また，それらを社会に照らして読み取ることができる．
- 自らの仮定や仮説にもとづいて，将来のバンドウイルカの頭数を予測することができる．
- 予測を，現実に照らして検証し，仮定や仮説を修正することができる．

エ）実験授業の展開と指導の工夫

実験授業では，発問や学級集団での話し合い等の場面設定を工夫し，算数・数学と社会をつなげる力が発揮されるようにする．具体的には，以下の通りである．

(1) 学級集団で仮定を検討する場面を設ける

はじめに，問題文にある情報をもとに，イルカの頭数を予測させる．それを発表させ，どのような仮定のもとで考えたかを検討する．それをふまえ，あらためて仮定をおき，予測し直す．

(2) 予測を検証する場面を設ける

2000年の頭数を知らせ，自分の予測を検証し，必要に応じて仮定や仮説を修正する．あとから2000年の頭数を知らせるのは，次のような理由による．イルカの頭数に限らず，さまざまな事象に関する将来の予測では，適宜，見直しがなされる．一方，学習の場面では，実際に数年たってから見直しをさせるということは考えにくい．そのような経験をさせることを重視し，それを実現するための方策として，あとから2000年の頭数を知らせる．

オ）実験授業の実際

(1) 学級集団で仮定を検討する場面（第1時）

生徒は，電卓を使いながら，1993年，1994年，…と順に頭数を求めた．そこで，次の2つの考えを板書させた．

93年　36000－1100＝34900
94年　34900－1100＝33800
（中略）
x年　（前の年の頭数）－1100

93年　36000－1100
94年　36000－1100×2
95年　36000－1100×3
なので，36000－1100x　（以下略）

イルカの頭数の増減が捕獲以外にないことに疑問をもつ生徒は見受けられなかった．

T　33年後にバンドウイルカは絶滅してしまうということですね．どうしたらいい？
S　とらなければいい．
S　単純！
T　単純？　とらなければどうなるの？
S　減らない．
S　増える．
T　なんで？
S　だって，生まれる．
T　そりゃ，そうだね．だとすると，さっきのは？
S　おかしい．
T　何が？
S　生まれていない．
T　うん．現実を考えていた人，いませんか？いまみたいなことを．（いない）
T　さっきの考え，これとかこれは，どういうことになっているんだ？
S　イルカはとられるだけ．
S　1100ずつ．
T　それはどういう意味？
S　毎年，きっちり1100頭ずつ捕獲する．
T　現実はどうなんだろう．
S　もっといっぱいとっているかもしれない！
S　子どもが生まれている．

ここで，バンドウイルカの生態に関する資料を提示した．そこから得られる主な情報は，次の点である．

- 体長は約3メートルあまり，イルカの中では最大クラスの大きさで，魚をはじめ，イカ，甲殻類など多様な餌を食べる．
- メスで7～8歳，オスならば11歳で大人になる．
- 寿命は，オスで40歳，メスで45歳前後と推測される．

・メスは年に1回子どもを出産し，一生のうちに最大20頭前後の子供を産む.

これをもとにしながら，生徒がおいた仮定とその人数は，表4の通りである.

表4　生徒のおいた仮定の内訳

仮　定	根拠の記述	
	あり	なしまたは不明確
産・死・捕	19人	10人
産・捕または死・捕	0人	5人
捕のみ	0人	6人

(産：産まれる頭数に関する仮定，死：自然死する頭数に関する仮定，捕：捕獲される頭数に関する仮定)

産まれる頭数と自然死する頭数が等しいと仮定して，捕獲による変化だけを考えた生徒もいた．それは，「産・死・捕」に分類した．したがって，「捕のみ」は，産まれる頭数や自然死する頭数に関してまったくふれていないものである.

図1は，「産・死・捕」で，仮定に関する自分なりの根拠を示している例である．この生徒T．Rに，自然死する頭数に関する仮定について発表させた.

S　私は，毎年850頭のイルカが寿命で死ぬと考えました．なぜなら，オスとメスが半分ずつだとして，各年齢も同じ数だけいるとすると，…

T　はい，ちょっと待ってね．いまの聞こえた？Tさんは，どう考えようとしているのかな？

S　毎年，850頭ずつ死ぬ.

S　その850頭の決め方も考えている！

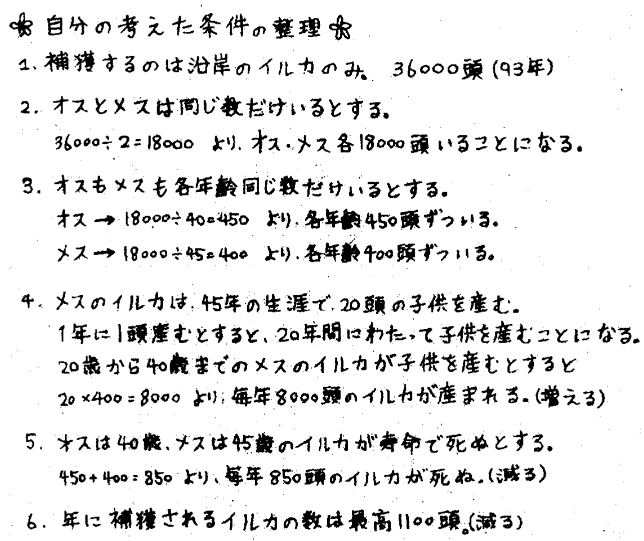

図1　生徒T．Rのワークシートより

(2) 予測をし，検証する場面（第2時）

各自，自分のおいた仮定や仮説のもとで予測をした．毎年，同じ数ずつ増伽あるいは減少するという仮説のもとで予測をした生徒が多かった．それに対し，図2の生徒T．Mは，毎年，全体の頭数が変わるのだから，メスの頭数や産まれる頭数(図2中では「子供」)も変わることをふまえて仮定をおき，予測をしていた.

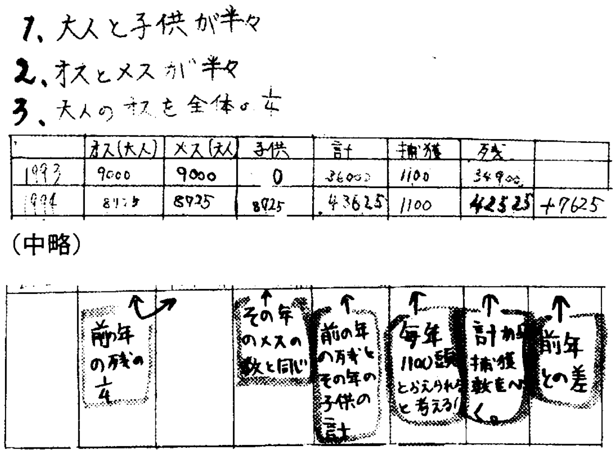

図2　生徒T．Mのワークシートより

この考えを取り上げ，次のように投げかけた.

T　このTさんの考えでは，毎年，産まれる子供の数が変わっているね．なんでですか.

S　メスの大人と同じ数にしているから….

T　しているから？

S　メスの頭数は毎年違うので….

S　メスの大人の数が変わるから，産まれる子供の数も変わる！

T　そうだね．あと，…メスの大人と産まれる子供の数が同じって言っていたけど，…それってどういうことかな？…Tさんはどう考えたと思う？

S　1年に1頭，産む.

T　Tさん，いい？

S　はい.

T　Tさんと同じように考えた人，いる？（いない）

T　Nさんはどう考えていたの？

S　毎年同じ.

次に，2000年の頭数（31444頭）を提示し，各々の予測と比較させた．7年間で（36000－31444＝）4556頭減っているので，毎年（4556÷7＝650.85）約651頭ずつ減るという仮定をおいた生徒（表5

のA）や，2000年が31444頭になるように産まれる数，自然死する数などを調整した生徒（表5のB）が多かった．一方，図2のような変化の仕方に修正（仮説を修正）した生徒は1名しかいなかった．

表5　修正の内訳

修正前の仮定		修正			
		あり			なし
		A	B	他	
産・死・捕	根拠あり	3	14	2	0
	根拠なし	1	6	1	1
産・捕または死・捕	根拠なし	1	3	0	1
捕のみ	根拠なし	3	1	0	2

（人）

また，中には，自分の予測と2000年の頭数が異なった理由を考えた生徒もいた（図3）．

この考えがうまくいかない理由としては、
・オス、メスの数が等しくない。
・それぞれの歳に相当するイルカの数が等しくない。
・全てのメスが20頭子を産むとは限らない。
・自然死が全て寿命とは限らない。
・単純に＋－でなく、子を産む前に捕獲されれば計算上で増えても実際は増えないなど複雑である。
ということが挙げられる。

図3　生徒T.Rのノートより

最後に，適切な捕獲許可数について考えることを宿題にした．「増えすぎても，減りすぎてもだめだ」と考えた生徒が多く，その理由としては，「増えすぎるとイルカがエサにしている魚が減ってしまい，減りすぎると絶滅してしまう可能性がでてくる」ことなどを挙げた．いくつかの捕獲許可頭数を考え，10年後，20年後の頭数を予測してきた生徒もいた（図4）．

〈予想〉　シ…シナリオの略

	現状	シ①-1	シ①-2	シ①-3	シ②-1	シ②-2	シ②-3
10年後	41699	40699	40199	40449	42609	43199	42949
20年後	44569	42569	41569	42069	46479	47569	47069

図4　生徒S.Sのノートより

カ）実験授業の考察

第1時の生徒の活動や発言の様子から，次のような算数・数学と社会をつなげる力をみることができる．それは，イルカの頭数の変化を調べるという状況に対して，産まれる頭数や自然死する頭数，捕獲頭数に関する仮定をおいたり，変化の仕方に関する仮説を立てたりする点である．ただし，はじめは，捕獲頭数のみを考えていたこと，また，半数ほどの生徒しか自分なりの根拠をもって仮定をおいていないことに注意する必要がある．すなわち，中学1年生は，本問題に対して，仮定をおく力を十分には発揮できていなかったと考えられる．

第2時の生徒の活動の様子から，次のような算数・数学と社会をつなげる力をみることができる．第一に，自分の仮定や仮説にもとづいて，イルカの頭数を式や表に表し，予測をすることである．第二に，その予測を，式や表，グラフを用いて伝えることである．第三に，与えられた2000年の頭数をもとに，仮定を修正することである．この第三の点については，自分の予測と2000年の頭数が一致するように仮定を修正した生徒が多かった．それは，場合によっては過剰な修正であり，予測値をある程度の幅をもって解釈していないと考えられる．また，図2の考えを取り上げたが，毎年，同じ数ずつ変化するという仮説を修正した生徒は1名だけだった．これらのことに注意する必要がある．

以上のような生徒の算数・数学と社会をつなげる力の様相から，中学校1年の「文字と式」の中で，算数・数学と社会をつなげる力の習得を目標に位置づけた授業を行うことが可能なこと，その一方で発問や学級集団での話し合い等の場面設定を工夫する必要があることがわかる．

②「なるほど分度器のしくみを探ろう」

「なるほど分度器」で，直接，測れない角度を測れるわけを図形の性質を用いて説明しよう．

「なるほど分度器」とは，図5のように，普通の分度器を直接あてることができない角の大きさを測るアイデア商品である．バーは平行四辺形を保ったまま動くので，この平行四辺形を数学的モデルとして見いだすことになる．

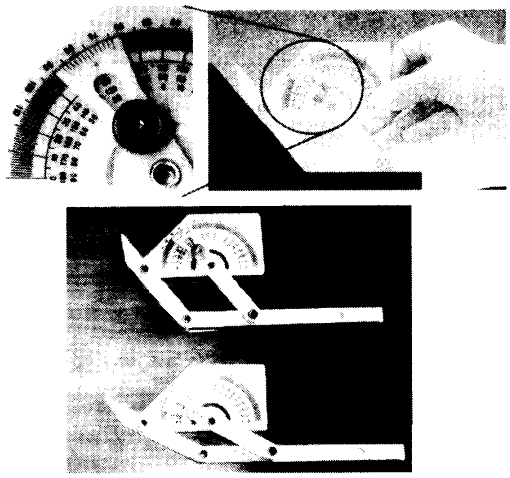

図5　なるほど分度器

ア）単元：中学校2年　平行と合同

イ）対象：国立大学附属中学校2年33名

対頂角，平行線の同位角，錯角の学習を終えて，証明の進め方の学習の途中である．

ウ）目標：「なるほど分度器」で目的とする角の大きさを測ることのできる理由を，平行線と角に関する性質を用いて説明することができる．

（算数・数学と社会をつなげる力に関して）

- 図形の性質を用いて説明するために，分度器のどの部分を直線とみなしているのか等を明確にして，図に表現することができる．
- 他者のかいた図を，分度器に照らしながら読み取ることができる．

エ）実験授業の展開と指導の工夫

事象を，その位置や大きさ，形等だけを抽象し，図形に表現することで，図形の性質を用いて調べたり，関数関係を見出したりすることが可能になる．実験授業では，このような幾何学化とも言われる活動に焦点を当て，以下のような工夫をする．

⑴ 図と説明を比較・検討する場面を設ける

各自の書いた説明を小グループ内で交換させ，説明に対するコメントを書かせる．さらに，いくつかの図と説明をクラス全体で取り上げ，どのような図をかくとよいかを検討する．

⑵ 図と説明を修正する場面を設ける

図形の性質を用いて説明するには，どのような図をかくとよいかを再考し，図や説明を修正する．

オ）実験授業の実際

⑴ 図と説明を比較・検討する場面（第1時）

「なるほど分度器」を班に1つずつ渡し，目的とする角度が測れる理由を，図をかいて説明するよう投げかけた．

例1では，分度器のバーの幅を捨象し直線とみなした上で，平行線の性質を用いて説明している．ただし，バー全体あるいはバーのどの部分を直線とみなしたのかに関しては記述されていない（同様の生徒は他に7名いた）．

一方，例2や例3のように，分度器のバーの幅を捨象せずに，バー全体を直線とみなしたり，バーの端を直線とみなしたりして，説明している生徒もいた．後者は，角度の目盛りを読み取る位置の対応が不十分である．（同様の生徒は他に17名いた）

例1）

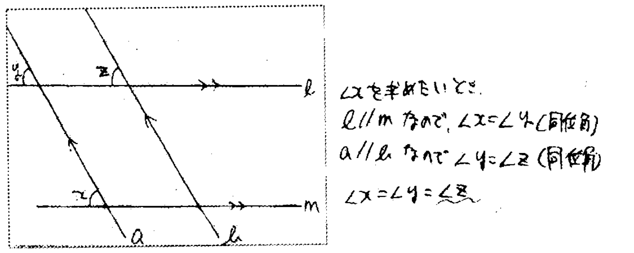

図6　生徒I.Kのノートより

例2）

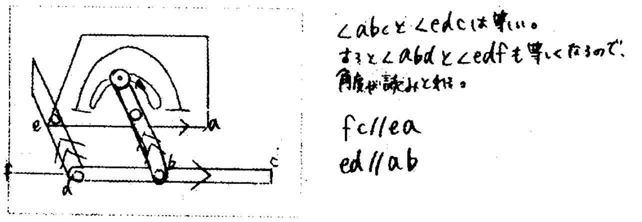

図7　生徒I.Yのワークシートから

例3）

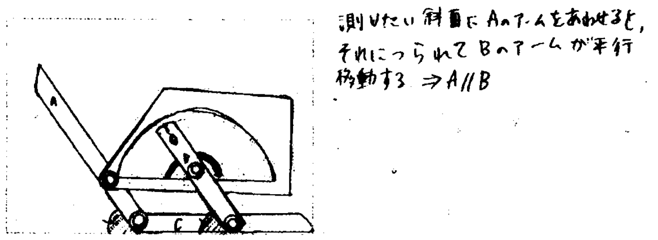

図8　生徒D.Kのワークシートから

それに対して，例4のように，測定対象の角を合わせるバーの左側と，角度を読み取るバーの中央を直線とみなしていることを意識的に表現し，説明している生徒もいた（同様の生徒は他に5名いた）．

例4）

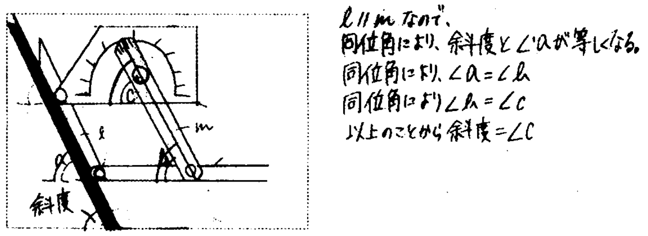

図9　生徒S.Sのワークシートより

次に，班（4～5名）で各自のかいた説明を交換し，コメントを書かせた．例えば，上の例1～例4に対するコメントは，次の通りである．

例1に対するコメント
・簡潔で分かりやすい説明と図でした．
・図がとっても分かりやすい！すぐ理解できます．
・図からわかることがまとめてあって，わかりやすいです．
例2に対するコメント
・説明，シンプルでいいね．
・図に書き込んであることから，まとめてあって，わかりやすいです．
・とてもわかりやすくて良いです．
例3に対するコメント
・絵，上手い！から，どうしてそうなるのか，一目でわかる．
例4に対するコメント
・図に記号が書いてあって分かりやすいです．
・図がうまいです．
・図に記号が入っていてわかりやすいです．

(2) 図と説明を修正する場面（第2時）

例1から例4のそれぞれのタイプの図を1つずつ取り上げ，説明させた．そして，それぞれを比較させた上で，「もう一度，なるほど分度器で角度が測れる理由を，図をかいて説明してみよう」と投げかけた．

図のタイプ別の人数は，表6の通りである．例4のタイプの図が増えた．

表6　タイプごとの人数の変化
（人）

		修正後			計
		例1	例2，3	例4	
修正後	例1	1	5	2	8
	例2，3	3	7	8	18
	例4	0	1	5	6
計		4	13	15	32

（1名はワークシート未回収）

カ）実験授業の考察

第1時では，次のような算数・数学と社会をつなげる力をみることができる．第一に，事象の数学的構造を捉え，目的に応じて，図に表現する力である．いずれの例でも，「なるほど分度器」の数学的構造を捉えることはできているが，それを，「図形の性質を用いて説明する」という目的に応じて表現することや，事象のどの部分を直線とみなすかなどの対応づけが不十分な点に注意する必要がある．

第二に，図を事象と対応させて読み取ることである．いずれの図に対してもわかりやすさを指摘しただけで，また，例4のような図をかいた生徒も，他の図に対して，どの部分を直線とみなしているのかを問うようなコメントを書いていないことに注意する必要がある．

第2時は，次のような算数・数学と社会をつなげる力をみることができる．それは，目的に応じて，図に表現することである．表2に示したような変化が見られたことから，クラス全体で，さまざまな図を比較することを通して，はじめて，図と事象を対応させて検討することができたことがわかる．ただし，例2，例3のような図の生徒が依然13名いることに注意する必要がある．なお，第1時に説明を書いた時点では，生徒にとって，どの程度詳しく説明すればよいかが不明確な面があった．この点に関しては改善の余地がある．

以上のように，中学校2年の「平行と合同」の中で，算数・数学と社会をつなげる力の習得を目標に位置づけた授業を行うことが可能なこと，その一方で学級集団での話し合い等の場面設定を工夫する必要があることがわかる．

4．まとめと今後の課題

本研究では，第一に，算数・数学と社会をつなげる力の算数・数学教育における位置づけを明らかにした．算数・数学と社会をつなげる力は，「算数・数学の力」における，算数・数学を使う力，表す力，考え合う力に総合的に関わっていること，また，数学化や数学的モデル化を主たる過程として含んでいるが，学級集団での話し合い等も包含するようになっていることを示した．そして，算数・数学と社会をつなげる力は，数学内と数学外，数学の概念と方法という多様なバランスのもとで，その習得を目指す必要がある．

第二に，算数・数学と社会をつなげる力を授業で具体化していく道筋を示すことが重要だと考え，実験授業を行い，生徒が算数・数学と社会をつなげる力をどのように発揮するかを事例的に明らかにし，教科書の通常の単元の中で，算数・数学と社会をつなげる力の習得を目指す授業が実現可能なことを示した．また，2つの事例では，提示し

た問題に対して，はじめは，算数・数学と社会をつなげる力，特に社会の現象を数学の対象に変える力や社会に照らして検証する力を十分には発揮できない生徒がいることがわかった．一方，教師の発問や学級集団での話し合い等の場面設定により発揮できる生徒もいることがわかった．このようなことから，単に社会の問題を扱うだけではなく，教師が発問や学級集団での話し合い等の場面設定を工夫し，その力の習得を目指す必要があることが示唆される．

今後の課題は，より多くの内容で，算数・数学と社会をつなげる力の習得に関して実証すること，本実験授業で，はじめは十分には発揮されなかった，社会の現象を数学の対象に変える力と社会に照らして検証する力の習得を目指す学習指導について明らかにすることである．

注

1) 例えば，OECDのDeSeCoは，これからの社会で必要なキー・コンピテンシーとして，次の3つを挙げている．

・相互作用的に道具を用いる
・自律的に活動する
・異質な集団で交流する

ドミニク・S・ライチェン，ローラ・H・サルガニク（編著）(2006)『キー・コンピテンシー―国際標準の学力を目指して』明石書店

2) 数学化の概念は，わが国の数学教育ではすでに昭和18年に発行された『数学　第一類』『数学　第二類』という中学校用数学教科書の背景となる考え方として見ることができる．その教科書編集の趣旨を説明した『数学編纂趣意書』（中等学校教科書株式会社，1943）には「1．既成ノ数学ノ注入ヲ排シ，事象ニ即シテ生徒自ラ数理ヲ発見スルヤウニ導クコト．2．問題ニハ具体的素材ヲ多クトリ，事象ヲ数学化シ，且ツコレヲ処理スルノ修練ヲ重ンズルコト．…」（下線部は筆者：漢字は旧字体を現在の字体に直してある）とある．

3) 他の単元の学習に位置づけることも可能である．

引用文献・参考文献

阿部好貴（2007）「数学的リテラシーの育成のための教授・学習理論の構築に向けた基礎的研究（2）－数学的モデル化の教授・学習に焦点を当てて－」日本数学教育学会第40回数学教育論文発表会論文集，pp.37－42

Freudenthal, H. (1968) “Why to teach mathematics so as to be useful”, Educational Studies in Mathematics, Vol. 1, pp. 3-8.

片桐重男（1988）『数学的な考え方・態度とその指導1，2』明治図書.

国立教育政策研究所（2004）『PISA2003年調査評価の枠組み』ぎょうせい

古藤怜・新潟算数教育研究会（1992）『算数科多様な考えの生かし方まとめ方』東洋館出版社.

中島健三（1981）『算数・数学教育と数学的な考え方』金子書房.

松原元一（1977）『数学的見方考え方』国土社.

長崎栄三編著（2001）『算数・数学と社会のつながり』，明治図書

長崎栄三・西村圭一・五十嵐一博・牛場正則・久保良宏・久永靖史・松元新一郎（2004）「数学と社会をつなげる力に関する研究－中学校・高等学校を中心に－」，日本数学教育学会誌『数学教育』第86巻第11号，pp.2-11

長崎栄三，国宗進，太田伸也，五十嵐一博，滝井章，近藤裕，熊倉啓之ほか（2008）「算数・数学教育の目標としての「算数・数学の力」の構造化に関する研究」，日本数学教育学会誌『算数教育』第90巻第4号，pp.10-20

西村圭一（2004）「数学と社会をつなげる力を育成する1次関数の学習指導に関する研究－単元構成と教材開発を中心に－」，日本科学教育学会第28回年会論文集

西村圭一（2005）「数学と社会をつなげる力を育成する1次関数の学習指導に関する研究－「仮説を立てる」「検証する」に焦点を当てて－」，日本数学教育学会第38回数学教育論文発表会論文集，pp.157-162

Pollak. H. O. (2003) “A History of the Teaching of Modeling”, A History of School Mathematics, NCTM, pp. 647-671.

島田茂編著（1977）『算数・数学科のオープンエンド・アプローチ』みずうみ書房

島田功，西村圭一（2006）「算数と社会をつなげる力の育成をめざす授業に関する研究－「仮定をおく」「仮説を立てる」「検証する」に焦点を当てて－」，日本数学教育学会誌算数教育第88巻第2号，pp.2-11

竹内芳男・沢田利夫編著（1984）『問題から問題へ一問題の発展的な扱い一』東洋館出版社