

第 41 回数学教育論文発表会論文集
論文発表の部

算数・数学と社会をつなげる力の構造の精緻化に関する研究

西村 圭一 島田 功 長崎 栄三
東京学芸大学附属 成城学園初等学校 国立教育政策研究所
国際中等教育学校

要 約

本研究では、算数・数学と社会をつなげる力の構造を精緻化することを目的とする。このことは、一人の子どもに、算数・数学と社会をつなげる力の全体を習得させる上で必要だからである。この目的に対し、授業実践を背景に、数学の内容領域や問題の場面や分野を考慮しながら作成した、算数・数学と社会をつなげる力に関する第 1 期、第 2 期調査の本調査問題 90 題、参考問題 79 題を分析し、問題場面及びそこで発揮される力の特性を抽出した。次に、それらを、性質や状態、関係性、対象等の観点で分類するとともに、抽出されていないが存在が想定される力の特性を明確化し、それに対応する問題や問題場面を開発した。そして、これらをもとに、算数・数学と社会をつなげる力の構造を精緻化した。この精緻化は、算数・数学と社会をつなげる力の習得を、学習目標に位置づける上で有効だと考えられる。

キーワード 算数・数学と社会をつなげる力、特性、目標

1 研究の目的と方法

私たちは、これまでに、社会の問題を解決する際に必要な様々な能力や見方や考え方を、算数・数学と社会をつなげる力として構造化し、子どもの実態を明らかにするとともに、その育成をめざす授業実践を行ってきた（例えば、長崎，2001a；西村，2005；島田・西村，2006）。それらの授業実践は、それぞれの問題に応じて、どの力をどのように育成していくかの検討を中心としていた。1つ1つの

授業を点に例えれば、その集合として算数・数学と社会をつなげる力の育成の可能性を示してきたと言える。

その次の段階として、算数・数学と社会をつなげる力を、一方で、算数・数学教育全体の大きな視野の元で展望する必要がある。他方で、その構造をより精緻化する必要がある。前者については、算数・数学と社会をつなげる力と算数・数学教育の目標との関連を示す必要がある、そこで、算数・数学教育の目標

としての「算数・数学の力」の中に位置付けられることを示した(西村・長崎, 2008)。後者については, ある力を, ある問題に対して発揮できた生徒が, 別の問題に対しては発揮できないことが少なからずあり, 算数・数学と社会をつなげる力の全体を習得させる上で, 個々の力の特性を明らかにする必要がある。

そこで, 本研究では, 算数・数学と社会をつなげる力の構造を精緻化することを目的とする。この目的に対し, 算数・数学と社会をつなげる力に関する第1期調査(長崎, 2001b)及び第2期調査(松元他, 2002)において作成した問題を分析し, そこで発揮される力の特性を明らかにする。そして, それらを整理, 分類し, より詳しい枠組みを構築する。

2 研究の内容

(1) 分析の対象と方法

算数・数学と社会をつなげる力とは, 「社会における現象や問題に取り組む際に必要な力や感覚」であり, それは「数学的活動」(島田, 1977)を基盤としており, そのうちの「数学外の問題を解決する活動」に焦点化したものである。そのような力や感覚を, 表1のように具体化し構造化した(長崎, 2001a)。

そして, 私たちは, 算数・数学と社会をつなげる力に関する第1期調査及び第2期調査

において, 表1のそれぞれの力に対応する, 本調査問題90題, 参考問題79題を作成した¹⁾。これらの問題は, 私たちの授業実践を背景に, 数学の内容領域や問題の場面や分野を考慮しながら作成したものである(表2)。これらを分析の対象とし, 第一に, 問題場面及びそこで発揮される力の特性を詳細に抽出した。第二に, 表1の個々の力ごとに, それらを整理し, 分類した。第三に, その結果から, 調査問題では抽出されていないが, 存在が想

表1 算数・数学と社会をつなげる力

- A. 社会における量・形についての感覚**
 - A01. 長さの感覚 A02. 広さの感覚
 - A03. かさの感覚 A04. 重さの感覚
 - A05. 角度の感覚 A06. 時間の感覚
 - A07. 速さの感覚 A08. 形の感覚
- B. 社会の問題を数学的に解決する力**
 - B1. 社会の現象を数学の対象に変える
 - B11. 仮定をおく B12. 変数を取り出す
 - B13. 変数を制御する B14. 仮説を立てる
 - B2. 対象を数学的に処理する
 - B21. 表・式・グラフ・図等で表現する
 - B22. 操作を実行する
 - B3. 社会に照らして検証する
 - B31. 予測・推測をする B32. 修正する
- C. 社会において数学でコミュニケーションする力**
 - C01. 数学的表現から現象を読み取る, 伝える
 - C02. 数学を使った日常文を読み取る
- D. 近似的に扱う力**
 - D01. 近似的に式を立てる
 - D02. 近似的に読み取る

表2 問題の場面・分野と内容領域

	場 面				分 野													
	家 庭 生 活	学 校 生 活	社 会 生 活	自 然 現 象	自 然 科 学	産 業 ・ 経 済	交 通	技 術	遊 び	建 築 ・ 測 量	ス ポ ー ツ	公 共 ・ 福 祉	地 理 ・ 歴 史	環 境	芸 術	政 治	医 療	そ の 他
量と測定	14	15	15	0	3	3	9	2	3	9	3	0	1	0	0	0	0	7
数・式	2	1	5	1	1	6	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
関数	17	9	30	26	33	16	13	14	5	0	6	4	2	3	0	0	1	4
確率・統計	2	1	15	5	4	4	0	2	3	0	2	4	3	1	0	1	0	0
図形・幾何	3	2	7	0	1	0	0	5	0	2	0	1	2	0	1	0	0	1
合 計	38	28	72	32	42	29	22	23	12	11	11	10	8	4	1	1	1	12

(のべ数, B22の8題を除く)

定される力の特性を明確化するとともに、それに対応する問題や問題場面を開発した。本稿では、中学校・高等学校で中心的に育成をめざす B,C,D の力について述べる。

(2) 分析の結果

ア) 問題場面の特性

算数・数学と社会をつなげる力の発揮の様相は、その問題が埋め込まれた文脈に影響されると考え、問題場面の特性に着目した。すなわち、直面している問題場面が、量的か質的か、確定的か不確定的かによって、力の発揮の様相が異なり、それぞれの度合いを軸とする 2 次元で捉えることができると考えた。

以下では、このような問題場面による発揮の様相の違いがあることをふまえながら、個々の力ごとに、その特性を示す。

イ) 力の特性

1) 社会の現象を数学の対象に変える

① 仮定をおく (B11)

第一に、定性的な仮定をおくことと定量的な仮定をおくことの違い、第二に、その仮定をおく目的による違いがある。仮定をおく目的とは、「等しいとする」「ないものとする(無視する)」「定める」等である²⁾。次の例 1 では、鉢植えの大きさは極めて小さいという、定性的で、ないものとする仮定をおく。例 2 では、66(万 m^3 /日)の割合で減少するという、定量的で、等しいとする仮定をおく。例 3 では、暑い日を最高気温が 30℃以上とするという、量的で、定める仮定をおく。(例の後ろの()内は、第 2 期調査の正答率である。)

例 1 くに子さんの学校では、校内音楽会のためにステージの右はしから左はしまで、はちうえの花を下のように 10 個まっすぐに並べました。(図略)

となりどうしのはちうえとはちうえの間は 2m にしました。右はしのはちうえから左はしのはちうえまで何 m あるかを、くに子さんは、次のように考えました。

$$2 \times 9 = 18 \quad \text{答え } 18 \text{ メートル}$$

くに子さんの考え方が成り立つためには、どのようなことを考えておかなければなりませんか。(選択肢 略)

(中 1 15.3, 中 3 19.4, 高 2 27.5)

例 2 矢木沢ダムの貯水量は、この 5 日間、全く雨が降っていないため、5 日間で 330 万 m^3 減り、5245 万 m^3 になりました。貯水量が 4000 万 m^3 になると取水制限をしなければなりません。千春さんは、このニュースを聞いて、4000 万 m^3 になる日を次のように予想しました。

$$330 \div 5 = 66 \text{ (万 } m^3 \text{)}$$

$$(5245 - 4000) \div 66 = 18.86 \dots \text{ (日)}$$

だから、およそ 19 日後に 4000 万 m^3 になる。

千春さんの考え方が成り立つためには、どのようなことを考えておかなければなりませんか。(選択肢 略)

(中 1 43.3, 中 3 53.4, 高 2 55.9)

例 3 香さんの家では、昔に比べて、暑い日が増えていのではないかということが話題になりました。このことを調べるために、香さんは、最高気温が 30℃以上の日数を調べました。かおりさんの考え方が成り立つためには、どのようなことを考えておかなければなりませんか。

② 変数を取り出す (B12)

第一に、質的な変数を取り出すことと量的な変数を取り出すことの違い、第二に、相互に依存関係のある変数を取り出すことと依存関係のない変数を取り出すこととの違いがある。次の例 4 の「ドラマ」「ニュース」等は、質的で、依存関係のない変数であるのに対して、例 5 の「歩く速さ」「道のり」等は、量的で、依存関係のある変数である。

例 4 佳純さんのクラスでは、テレビ番組に関するアンケート調査を行うことになりました。よく見るテレビ番組のジャンルを知りたいと考えました。どのようなアンケート項目にすればよいでしょうか。

例 5 牛乳を作る会社まで歩いて見学に行きます。午前 10 時 30 分に着きたいと思います。朝、8 時 30 分に出発して間に合うでしょうか。間に合うかどうかを知るには、どんなことを調べればよいですか。(選択肢 略)

(中 1 77.7, 中 3 74.4, 高 2 71.1)

③ 変数を制御する (B13)

第一に、質的な変数を制御することと量的な変数を制御することの違い、第二に、制御する変数の個数による違いがある。

④ 仮説を立てる (B14)

実験や観察，調査等を通して，あるいは経験に基づいて，事象を数学的命題で表すことに関する力である。第一に，定性的な仮説を立てることと定量的な仮説を立てることの違い，第二に，数・式化に関わる仮説を立てることと幾何学化（図形化）に関わる仮説を立てることとの違い，第三に，仮説に含む変数の個数による違いがある。1 変数の場合は，事象の状態に関する仮説や，現状（データ）から過去や未来，より大きな集団に対する仮説である。一方，2 変数以上の場合は，現象の変化の様子（関数関係）についての仮説や，相関関係についての仮説である。次の例 6 では，定量的，数・式化，1 変数の仮説を立てる。例 7 では，定性的，数・式化，2 変数の仮説を立てる。

例 6 オリンピックの陸上男子 400mリレーに出場する選手4人の 100m走のもっともよい記録は，10 秒 02，10 秒 08，10 秒 21，10 秒 25 です。この4人の 400mリレーの記録について，バトンパスがうまくいったとき，どのようなことが言えますか。（選択肢 略）

（中 1 26.8，中 3 34.2，高 2 45.4）

例 7 体育館で，バレーボールを真上に向かって投げ上げました。このとき，ボールが床に落ちるまでの，ボールの速さについて，どのようなことが言えますか。（選択肢 略）

（中 1 52.3，中 3 65.0，高 2 72.5）

2) 対象を数学的に処理する

①表・式・グラフ・図等で表現する (B21)

確定的な事象での表現と不確定的な事象での表現による違いがある。確定的な事象では，関数の表・式・グラフ，図・図形等に，不確定的な事象では，統計の表・グラフ，値（指数・指標，確率，統計量等）等に表現する。

②操作を実行する (B22)

確定的な事象で操作を実行することと不確定的な事象で操作を実行することとの違いがある。不確定的な事象では，特に，操作の結果に意味があるかを判断する必要もある。

3) 社会に照らして検証する

①予測・推測をする (B31)

第一に，定性的な予測・推測をすることと定量的な予測・推測をすることとの違い，第二に，確定的な事象で予測・推測をすることと不確定的な事象で予測・推測することの違いがある。確定的な事象では，関数の表・式・グラフ，図・図形等で，不確定的な事象では，統計の表・グラフ，値（指数・指標，確率，統計量等）等で表現した数学的モデルを用いる。なお，数学的モデルの適用可能範囲や限界について評価すること，予測・推測に基づいて判断をしたり，その正当性を示したりする必要もある。

②修正する (B32)

第一に，修正する契機による違いがある。修正する契機には，予測・推測と現実との相違，条件の変化がある。第二に，定性的な修正をすることと定量的な修正をすることとの違いがある。その際の対象は，前者では仮説，後者では観察・実験・測定方法，数学的モデルの適用範囲，数学的モデルの一部，仮説である。次の例 8 では，予測が現実とかけ離れていたために，定性的な修正をする。例 9 では，条件の変化により，定量的に，数学的モデルの一部を修正する。

例 8 直美さんは，右の図のように天井からぶら下がったひもにおもりをつけました。そして，ひもをぴんと張った状態でおもりをななめに持ち上げて手を離しました。そのおもりの動きを見て，直美さんは「おもりが一往復する時間は，ひもの長さに関係があるのではないか。」と考え，おもりの重さは変えずに，ひもの長さを変えて実験したところ，次のような結果になりました。

ひもの長さ(cm)	10	20
おもりが一往復する時間(秒)	約 0.5	約 1

この結果から，直美さんは「ひもの長さとおもりが一往復する時間は比例する」と考えました。そこで，この考えが正しいかどうかを1mのひもを使って確かめたところ，おもりが一往復する時間は約2秒となりました。このことから，直美さんが考えた「ひもの長さとおもりが一往

復する時間は比例する」という考え方について、どのように判断して、どのようにしたらよいですか。(選択肢 略)

(中 1 23.9, 中 3 23.9, 高 2 22.6)

例 9 影の長さを利用して、木の高さを次のようにして求めました。(図略)

0.8m の棒の影が 1.5m できていて、木の影の長さが 6 m なので、

$$0.8 \times (6 \div 1.5) = 3.2 \quad \dots (*)$$

木の高さは 3.2m。

夕方になって、同じようにして、別の木の高さを求めてみようと思い、1mの棒の影の長さを測ったところ3m、木の影の長さは9mになっていました。(*)の式をどのように直せば、木の高さを求められますか。(選択肢 略)

(中 1 31.0, 中 3 35.5, 高 2 38.5)

4) 社会において数学でコミュニケーションする力

① 数学的表現から現象を読み取る, 伝える (C01)

第一に、対象の数学的表現による違い、第二に、読み取る内容による違い、第三に、伝える手段による違いがある。読み取る対象は、確定的な事象での表現 (関数の表・式・グラフ, 図・図形等) と不確定的な事象での表現 (統計の表・グラフ, 値 (指数・指標, 確率, 統計量等) 等) がある。読み取る内容は事象間の変化・関係, 事象の様子, 変量等である。伝える手段は, 文, 図, 数学的表現である。

② 数学を使った日常文を読み取る (C02)

第一に、確定的な事象に関する日常文を読み取ることと不確定的な事象に関する日常文を読み取ることとの違い、第二に、読み取る内容による違いがある。読み取る内容は事象間の変化・関係, 事象の様子, 変量等である。

5) 近似的に扱う力 (D)

① 近似的に式を立てる (D01)

第一に、数の種類による違い、第二に、用いる演算による違いがある。

② 近似的に読み取る (D02)

近似的に読み取る目的に応じた違いがある。それは、概括的に読み取ること, 幅をもたせて読み取ること, 有効数字の考えで読み取ることである。

(3) 算数・数学と社会をつなげる力の構造の精緻化

(2)をもとに、算数・数学と社会をつなげる力の構造を精緻化すると表 3 の通りである。

表 3 算数・数学と社会をつなげる力の精緻化した構造

B. 社会の問題を数学的に解決する力

B11. 仮定をおく

性質: 定性的な仮定, 定量的な仮定

状態: 等しいとする, ないものとする, 定める

B12. 変数を取り出す

性質: 質的な変数, 量的な変数

関係性: 依存関係のある変数, 依存関係のない変数

B13. 変数を制御する

性質: 質的な変数, 量的な変数

個数: 制御対象の変数の個数

B14. 仮説を立てる

性質: 定性的な仮説, 定量的な仮説

分野: 数・式化, 幾何学化 (図形化)

変数: 1 変数, 2 変数以上

B2. 対象を数学的に処理する

B21. 表・式・グラフ・図等で表現する

事象: 確定的な事象での表現

関数の表・式・グラフ, 図・図形

不確定的な事象での表現

統計の表・グラフ, 値 (指数・指標, 確率,

統計量等)

B22. 操作を実行する

事象: 確定的な事象での操作, 不確定的な事象での操作

B3. 社会に照らして検証する

B31. 予測・推測をする

性質: 定性的な予測・推測, 定量的な予測・推測

事象: 確定的な事象での予測・推測

関数の表・式・グラフ, 図・図形から

不確定的な事象での予測・推測

統計の表・グラフ, 値 (指数・指標, 確率,

統計量等) から

B32. 修正する

契機: 予測・推測と現実との相違, 条件の変化

性質: 定性的な修正

仮説

定量的な修正

観察・実験・測定方法, 数学的モデルの適

用範囲, 数学的モデルの一部, 仮説

C. 社会において数学でコミュニケーションする力

C01. 数学的表現から現象を読み取る, 伝える

対象: 確定的な事象での表現 (関数の表・式・グラフ, 図・図形等), 不確定的な事象での表現 (統計の表・グラフ, 値 (指数・指標, 確率, 統計量等) 等)

内容: 事象間の変化・関係, 事象の様子, 変量

伝える手段: 文, 図, 数学的表現

C02. 数学を使った日常文を読み取る

対象: 確定的な事象に関する日常文, 不確定的な事

象に関する日常文

内容:事象間の変化・関係, 事象の様子, 変量

D. 近似的に扱う力

D01. 近似的に式を立てる

数の種類と演算

D02. 近似的に読み取る

目的: 概括的な読み取り, 幅をもたせた読み取り, 有効数字の読み取り

3 まとめと今後の課題

本研究では, 問題場面の特性が量的か質的か, 確定的か不確定的かの度合いに応じて, 算数・数学と社会をつなげる力の発揮の様相が異なることをふまえながら, その構造を精緻化した。この精緻化は, 算数・数学と社会をつなげる力の育成を, 学習目標に位置づける上で有効だと考える。例えば, 2つの変数が1次関数の関係にあるという仮説を立てる力には, データに基づいて定量的に立てる力と, 観察等に基づいて定性的に立てる力があることがわかる。1次関数の学習において, その両者の力の育成を視野に入れる必要がある。これらの力の習得をめざす学習指導について明らかにすることが今後の課題である。

注

- 1) 第1期, 第2期調査には, 他に次の者が参加した。飯田由美子(学習院女子中), 五十嵐一博(千葉市立葛城中), 牛場正則(足立区立栗島中), 久保良宏(北海道教育大), 島崎晃(所沢市立明峰小), 久永靖史(共立女子中・高), 牧野宏(狭山市教育指導課), 松元新一郎(金沢大学), 宮井俊充(所沢市立美原中)
- 2) 清野(2007)は「定式化において意識化される仮定」を次のように特定している。本研究では, a1.2は変数を制御するに, a2は仮説を立てるに当たる。
 - a1 事象の構成要素間の特定に関連する仮定
 - a1.1. 関係の薄い細部を無視ないし省略する仮定
 - a1.2. 数値に関する仮定
 - a1.3. 構成要素を単純化・理想化する仮定
 - a2 構成要素間の関係の設定に関連する仮定

引用・参考文献

松元新一郎・長崎栄三・五十嵐一博・牛場正則・久保良宏・島崎晃・島田功・西村圭一・久永靖史・宮井俊

充・牧野宏(2002),「児童・生徒の「算数・数学の力」と「算数・数学を使う力」と「算数・数学に対する意識・態度」との関係についての考察-「児童・生徒の算数・数学と社会をつなげる力」に関する第2次調査から-」, 数学教育論文発表会論文集 35, pp.127-132

長崎栄三編著(2001a),『算数・数学と社会のつながり』, 明治図書

長崎栄三編著(2001b),『児童・生徒の算数・数学と社会をつなげる力に関する発達的研究(改訂版)』国立教育政策研究所科研報告書。

長崎栄三・西村圭一・島田功・牧野宏・島崎晃(2004),「算数と社会をつなげる力に関する研究」, 日本数学教育学会誌算数教育第86巻第8号, pp.3-13

長崎栄三・西村圭一・五十嵐一博・牛場正則・久保良宏・久永靖史・松元新一郎(2004),「数学と社会をつなげる力に関する研究-中学校・高等学校を中心に-」, 日本数学教育学会誌数学教育第86巻第11号, pp.2-11

西村圭一(2005),「数学と社会をつなげる力を育成する1次関数の学習指導に関する研究-「仮説を立てる」「検証する」に焦点を当てて-」, 数学教育論文発表会論文集 38, pp.157-162

西村圭一・長崎栄三(2008),「数学教育における算数・数学と社会をつなげる力の意義と学習指導に関する研究」, 日本数学教育学会誌第90巻第9号, 掲載予定

西村圭一・牧野宏・長崎栄三・五十嵐一博・牛場正則・島崎晃・島田功・松元新一郎(2001),「児童・生徒の算数・数学と社会をつなげる力に関する発達的な様相」, 数学教育論文発表会論文集 34, pp.307-312

清野辰彦(2007),「学校数学における数学的モデル化の学習指導に関する研究-「仮定の意識化」に焦点をあてて」, 日本数学教育学会誌数学教育学論究 Vol. 87, pp.5-11

島田功, 西村圭一(2006),「算数と社会をつなげる力の育成をめざす授業に関する研究-「仮定をおく」「仮説を立てる」「検証する」に焦点を当てて-」, 日本数学教育学会誌算数教育第88巻第2号, pp.2-11

島田茂編著(1977),『算数・数学科のオープンエンド・アプローチ』, みずうみ書房