静岡大学教育学部附属教育実践総合センター紀要　No.26 p.27～34（2017）

〈論文〉

高等学校数学科における体系化の理解を促す図形指導

－多角形の外角の性質に関する教材－

熊倉啓之

Geometry Teaching for Promoting understanding of systematization in High School

– Materials about External Angle of Polygon –

Hiroyuki KUMAKURA

Abstract

The purpose of this study is to pursuit teaching for promoting understanding of systematization, focusing on geometry teaching in high school, and to develop useful materials and suggest mathematical activities concretely. First, the author researched present and past textbooks, and guessed that teachers don't teach for promoting understanding of systematization. Second, based on research of previous studies, the author pointed two mathematical activities; recognizing systematization and constructing system. Finally, the author considered about two activities and suggested 3 activities; constructing the map of theorems, evaluating circular reasoning, and finding new theorems about external angle of polygon by themselves and constructing the map of theorems.

キーワード：体系化の理解，多角形の外角，定理地図，循環論法

1．問題の所在と研究の目的

学問としての数学の特徴について，赤（1988）は，「現代の数学の最大の特徴は，すべての理論を「演繹的体系」として構成することである．」と述べている．また，科学技術の智プロジェクト数理科学専門部会（2008）も，数学という学問の本質の１つとして，「数学は抽象化した概念を論理によって体系化する」を挙げている．このように，体系化は数学の特徴の１つであることがわかる．

一方，数学の理解や数学的な考え方の育成等を目的とする数学教育においても，体系化は重視されている．実際，平成21年告示高等学校学習指導要領の数学科の目標には，次のように「体系」という表現が使われている．

「数学的活動を通して，数学における基本的な概念や原理・法則の体系的な理解を深め，～（以下略）」　（下線は筆者）

また，他にも体系化に関わって，次のように多くの主張がある．

「公理的方法とは，ある学問領域について，公理を基礎に演繹的な体系を作る方法であり，数学はこの方法により学問としての数学となった．したがって，数学とは何かを理解するためには，公理的方法の理解は欠かせない．」（杉山，1986）

「体系化を図形指導の観点に加えることは，論証の意義の理解，演繹的推論の仕組みの理解，数学的思考に関する高次の理解に意義がある．」（礒田，1987）

「組織化・体系化にかかわる活動は，数学及びそれ以外の営みにおいて「知のととのえ」として必須である．」（宮崎，2002）

「公理的構成の教育的価値は，前提を見直すことや前提をおいて考えることが合理的に改善するときやものごとを論じるときに役立つ．」（佐々木，2015）

以上の指摘から，体系化されたものとして数学を理解し，体系化の考え方を身に付けることは，数学教育において重要であると考える．

しかし，論理的思考力の育成を意識した指導は，中学・高等学校の図形教育を中心によく行われている一方で，体系化の理解を意識した指導はあまり行われていないように思われる．後述するように中学校・高等学校の教科書を見ても，体系化の理解に関わるような記述はほとんど見当たらない．

以上の問題意識のもと，本研究の目的は，特に高等学校の図形教育に焦点を当て，体系化の理解を促す指導のあり方を追究した上で，そのための効果的な教材を開発して数学的活動の具体を示すこととする．

2．研究の方法

次の手順で研究を進める．

(1)　現在及び過去の教科書分析を通して，体系化の理解に関わる指導の実態を探る．

(2)　先行研究を通して，体系化の理解を促す指導のあり方について追究する．

(3)　(2)での考察を踏まえて，体系化の理解を促す効果的な教材を開発して数学的活動の具体について示す．

*静岡大学学術院教育学領域

3．体系化の理解に関わる指導の実態

(1) 現行教科書における定理・性質等の扱い

中学校と高等学校の現行教科書（平成 23~24 年検定）について，特に平面図形（平面幾何）分野に焦点を当てて，扱われている定理・性質等の体系化が具体的にどのように示されているかを調査した．

① 中学校の教科書分析

調査対象とした教科書は，大日本図書「数学の世界 2・3」（2 冊）である[1]．この教科書は，中 2，中 3 における図形領域の「平面図形」に関する定理あるいは定理に準ずる性質が，他社の教科書に比べて最も多く扱っている．

調査結果は，図 1 の通りである．ただし，図 1 で取り上げた定理・性質等は，本文中に定理と明記，あるいはそれに準ずる扱いがされているものである．また，矢印の線分は，命題の証明に直接的に利用されていることを示す．ただし，複数の証明法を扱っている場合は，最初に登場する代表的な証明の場合のみを反映している．

図 1 から，中学校では，「平行線の性質」「平行線の条件」「合同条件」「相似な図形の性質」の 4 命題を公理として扱っていることがわかる．

「ユークリッド原論」では，これら 4 命題はすべて証明すべき対象であるが，昭和 33 年告示中学校学習指導要領以降より現在に至るまで，同様の扱いといってよい．

また，次のアのように，2 つの命題のみが体系化される場合もあれば，イのように，3 つ以上の命題が体系化される場合もある．

ア　平行線の性質→平行四辺形性質（対角）

イ　平行線の性質→三角形の外角性質→円周角定理→円周角定理の逆

② 高等学校の教科書分析

調査対象とした教科書は，数研出版「数学Ⅰ～Ⅲ・A・B」（5 冊）[2]である．この教科書は，各教科書会社で複数発行している教科書の中で最もレベルが高いもののうち，採択数が最も高い．

調査結果は，図 2 の通りである．ただし，図 1 と同様に，取り上げた定理・性質等は，本文中に定理と明記，あるいはそれに準ずる扱いがされているものであり，また，矢印の線分は，命題の証明に直接的に利用されていることを示す．

図 2 から，高等学校では，中学校で扱った「合同条件」「相似条件」「三平方の定理」等の 8 命題をもとに定理等を証明していることがわかる．一方で，ユークリッド原論で扱われている「平行線公理」等は，教科書では一切触れられていない．そもそも，「公理」という用語は，中学校でも高等学校でも，教科書で必修の扱いとはなっていない．

以上のことから，中学校・高等学校の教科書での扱いは，局所的に体系化された定理・性質を扱っていることがわかる．これは，局所的組織化（Freudentahl,1971），あるいは局所的理論（宮川他，2014）に基づく体系といえよう．

(2) 体系化に関わる現行の教科書記述

次に，体系化に関わる教科書記述について調査した．中学校の教科書では，「証明」について次のように定義している（大日本図書 2 年，p.131）．

「すでに正しいと認められたことがらをよりどころとして，あることがらが成り立つことを筋道を立てて述べること．」

この教科書の定義から，「1 つの証明の中で，循環論法にならないようにすること」が意識されていることがわかる．一方で，証明された複数の定理・性質間の関係を意識させるような記述や問題は見られない．すなわち，定理・性質等は，(1) で述べたように体系化に基づいて示されているにもかかわらず，体系化の理解に関わる教科書記述は見られなかった．このことは，高等学校の教科書においても同様である．

(3) 体系化に関わる過去の教科書記述

① 中学校の教科書分析

昭和 44 年告示中学校学習指導要領では，「図形」領域とは別に「集合・論理」領域を設けて，特に第 3 学年には，次の内容が含まれていた．

> E　集合・論理
>
> (1)　論理を進めていく方法や考え方についての理解を深める．

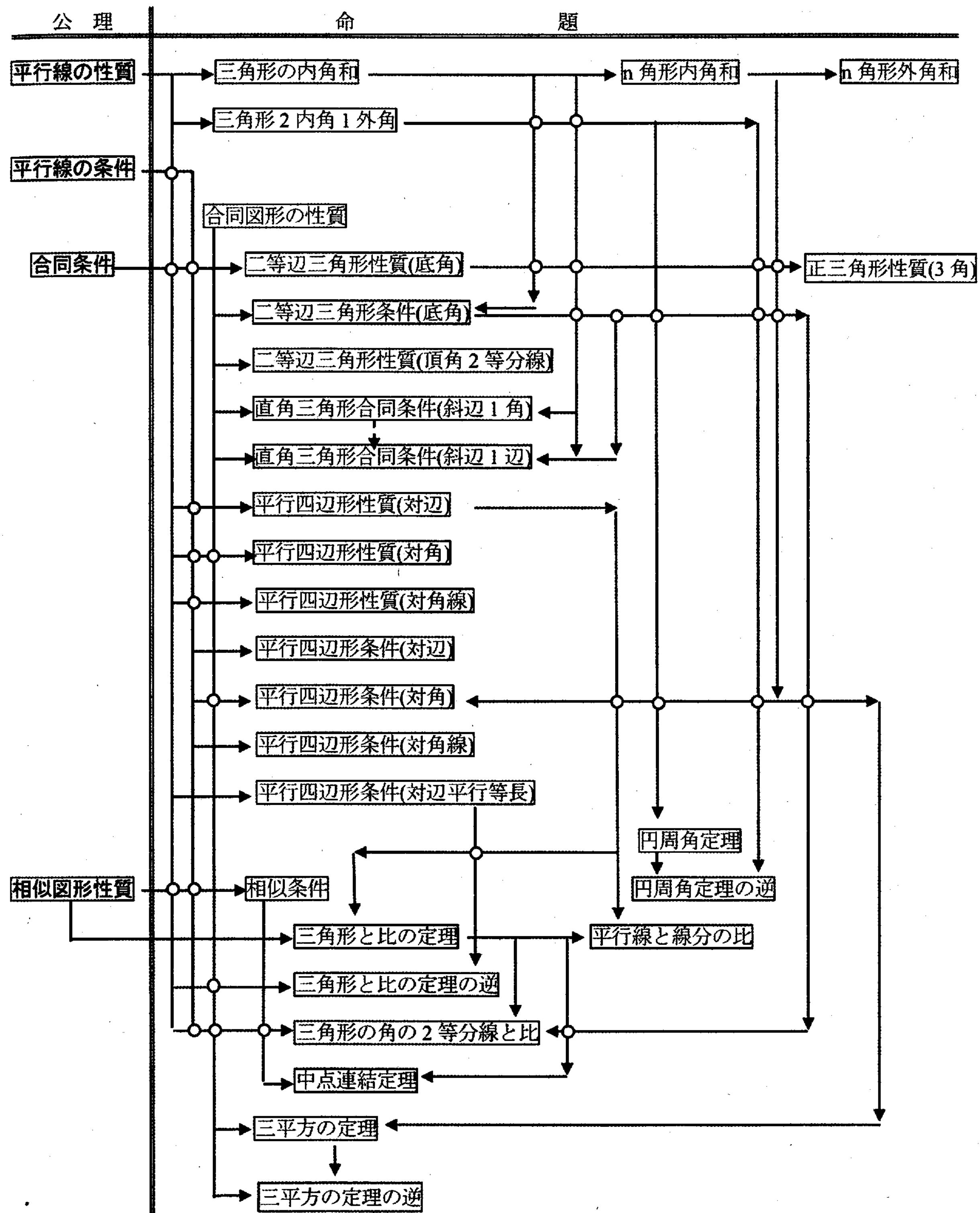
この内容に関連して，例えば次のような教科書記述[3]がある（p.205）．

> 今までの図形を調べるにあたり，いちばん「もと」になる図形の基本性質として，次の 3 つを用いてきた．
>
> 〔Ⅰ〕平行線の性質
>
> 〔Ⅱ〕三角形の合同条件
>
> 〔Ⅲ〕三角形の相似条件
>
> この「もと」になる図形の基本性質と，それぞれの図形の定義から，順次議論を重ねて，いろいろな定理や，図形の性質を調べてきた．

「公理」という用語こそ登場していないが，公理と定義を基に，体系的に定理等を構成していく過程について記述されていることがわかる．さらには，同じ単元に，次のような練習問題も掲載されていた（p.207）．

> **問題 4**　次のいろいろな定理のうち，どの定理からどの定理が導きだされるかをいえ．
>
> ①　二等辺三角形の両底角は等しい。
>
> ②　三角形の外角は内対角の和に等しい。
>
> ③　円において，1 つの弧に対する円周角はすべて等しい。
>
> ④　円に内接する四角形の対角の和は 2 直角である。
>
> ⑤　円において，1 つの弧に対する円周角は，その弧に対する中心角の半分に等しい。

図 3　中 3・体系化に関わる練習問題



・枠囲あるいはそれに準ずる定理・性質等のみ。
・ は，2 本の線が交差していないことを示す。
・対頂角の性質は省略。

図1　中学校教科書「平面図形」における体系化　(H23 検定　大日本図書中 2・中 3)

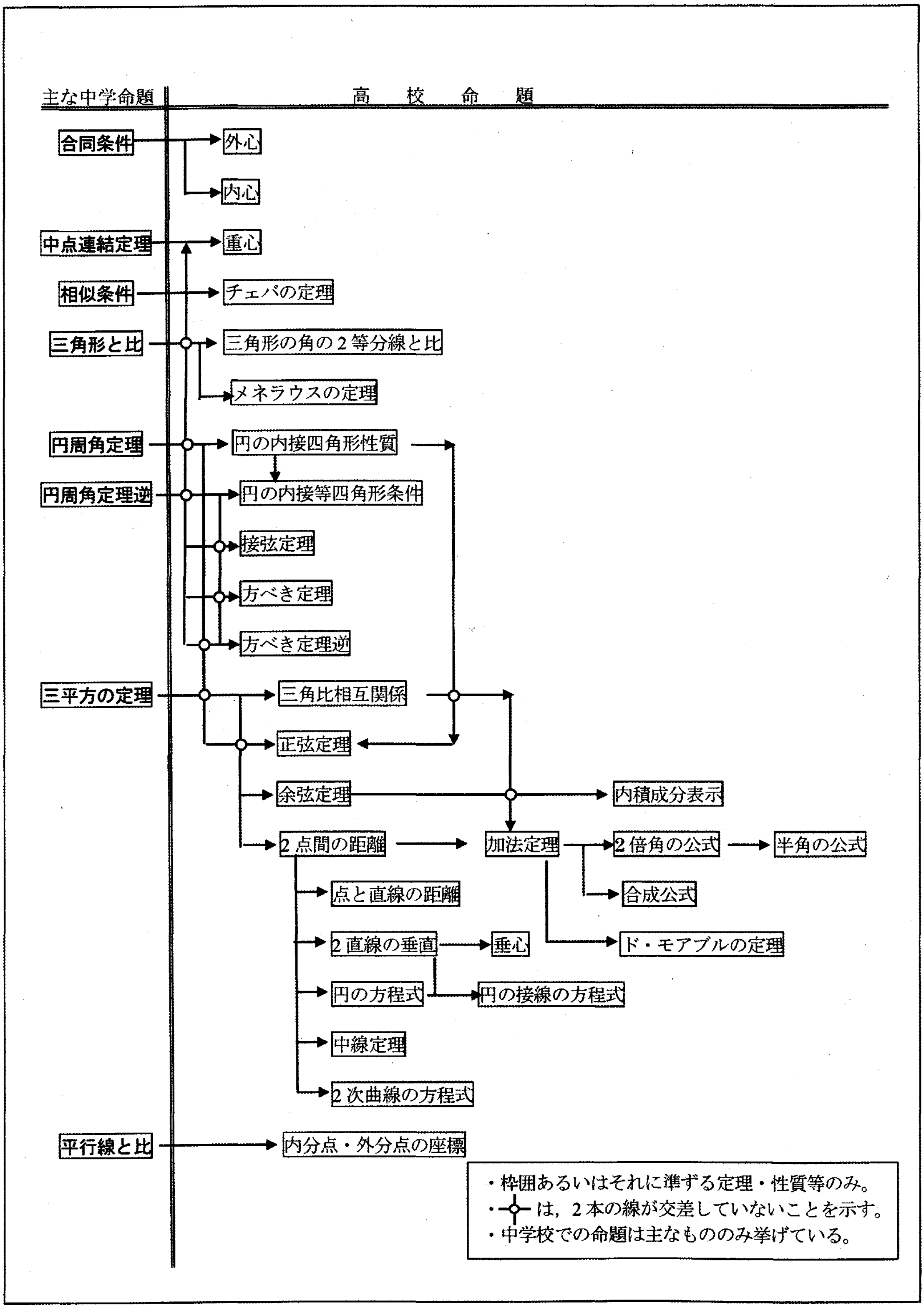


図2 高等学校教科書「平面図形」分野に関わる体系化（H23検定 数研出版数学Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ・A・B）

これは，5つの定理の関係を問う問題であり，体系化を意識させる活動といえるであろう．

② 高等学校の教科書分析

昭和45年告示高等学校学習指導要領では，科目「数学ⅡB」に次の内容が含まれていた．

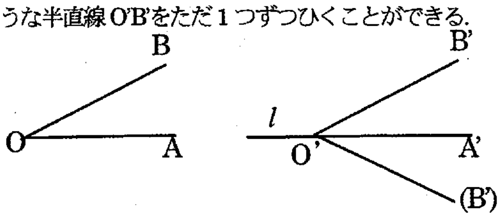
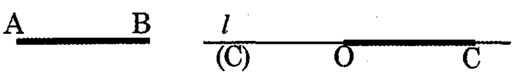
> A　代数・幾何
> (1)　平面幾何の公理的構成
> 　平面幾何について，数学における公理の意味と公理的構成について理解させる．
> 　ア　公理，定義および定理の意味
> 　イ　平面幾何の構成
> 　ウ　用語および記号　公理

この内容に関連して，例えば図4のような教科書記述[4]がみられる（p.189）．

> 2　推論の基礎
>
> これまでに，定理1から出発して，つぎのような順でつぎつぎと定理を証明した。
>
> 定理 1 → 定理 2 → 定理 5
> ↓
> 定理 3 → 定理 4
>
> ここでは，この過程をふりかえって，これまでの議論の基礎となっていることについてしらべてみよう。

図4　体系化に関わる教科書記述

そして，議論の基礎となっていることがらとして，次のA～Dおよび相等の基本法則を挙げている（pp.189～192）．

> A　2点を通る直線はただ1本存在する．
> B　直線lは平面を2つの部分P,Qに分けて，
> 　(1)　Pの2点を結ぶ線分およびQの2点を結ぶ線分は，lと交わらない．
> 　(2)　Pの1点とQの1点とを結ぶ線分は，必ずlと交わる．
> C　∠AOBと半直線O'A'が与えられているとき，この半直線をふくむ直線lのどちらの側にも，∠AOB=∠A'O'B'となるような半直線O'B'をただ1つずつひくことができる．
>
> 
>
>
> D　線分ABと直線l上の点Oが与えられているとき，l上でOの両側にOC=ABとなるような点Cをただ1つずつ定めることができる．
>
> 
>

> [相等の基本法則]
> (1)　a=a,
> 　a=bならばb=a,
> 　a=b，b=cならば，a=c
> (2)　a=b，a'=b'ならば，a±a'=b±b'

上記のA～Dは，ユークリッド原論における公理ではなく，それを修正したヒルベルトの幾何学基礎論（D.ヒルベルト，2005）における公理のいくつかであり，中学校に比べて，より数学的な記述になっている．さらに，「公理」という用語について，図5のような記載があり（p.194），それに続くページには，ひたすら定理とその証明が並んでいる．図5にある「～基礎的なことがらの組を定めて証明しないでみとめておき，それらを根拠にしてつぎつぎと推論を進めて新しい定理を証明するという方法がとられる」といった記述から，体系化の理解に関わる指導が行われていたことが推測される一方で，その指導は説明にとどまり，数学的活動は行われていないといえるであろう．

> 1　公　　理
>
> ある定理を証明するためには，それ以前に正しいことの証明されたいくつかのことがらを用いる。ところが，そのとき用いるいくつかのことがらもまた，別のことがらをつかって証明しなければならない。しかし，このようにして，つぎつぎと前のことがらを証明しようとしても，どこまでもさかのぼれるものではない。§1でしらべたように，
>
> [A]，[B]，[C]，[D]，相等の基本法則
>
> をみとめるならば，定理1から出発して，定理2～6はきちんと証明できるが，たとえば[A]を証明しようとしても，どういうことを論拠にしたらよいかわからない。
>
> そこで一般に，幾何を理論的にきちんと組み立てるためには，上の[A]，[B]などのようないくつかの基礎的なことがらの組を定めて証明しないでみとめておき，それらを根拠にしてつぎつぎと推論を進めて新しい定理を証明するという方法がとられる。このとき，はじめに根拠として定めておく命題を **公理** という。平面幾何の公理のとり方はいろいろあるが，ここでは，§1でしらべたことにもとづいて公理を定めることにしよう。

図5　公理についての教科書記述

以上の教科書分析から，体系化の理解を促すような数学的活動は，昭和44年告示学習指導要領の下で，中学校教科書に一部見られたものの，それ以外では過去から現在に至るまで，ほとんど行われてこなかったことが推測される．

4．体系化の理解を促す指導のあり方

(1)　体系化の理解に関わる先行研究

中学校，高等学校での実践を意識した先行研究を調査した．以下，それらについて述べる．

実践研究として，土屋（2006）は，中2を対象とした定理地図を創る実践を行った．最初に個人で定理の証明を考えながら定理地図を創り，次にグループ→クラスで順に改良を加えていくというものである．

磯田（1987）は，中3を対象として，「三角形と比」に関する

命題を系列化する実践を行った．1つの命題を基に，条件の一部を変更して生徒が他の命題を作って証明し，次にそれらを系列化するというものである．

太田（1991）は，中2を対象として，凹四角形の外角の和を追究する実践を行った．凹角の外角について，凸角の場合を自然な形で拡張した定義を生徒自身が見つけ，凸角→凹角へと拡張して体系化する活動を取り入れている．

井上（1995）は，中2を対象として，星形多角形の内角の和を追究した実践を行った．多角形の内角の和の公式をもとに，星形5角形，星形7角形，…の内角の和を求めて星形多角形の性質を体系化する活動を取り入れている．

佐々木（2015）は，高1を対象として，球面上における正方形の作図の実践を行った．球面幾何であるために，既習の前提が成り立たないことで，前提を明らかにしようという意識が働きやすい．

次に，教材開発研究として，柴田（2009）が，四面体の切断に関する問題を開発した．切断の仕方で切り口の形がどのように変わるかを解決する過程を体系的にまとめるというものである．

以上，いくつかの実践や教材開発を概観したが，活動としては，大きく「体系化を意識する活動」と「体系を構成する」活動に分けることができる．

いずれの実践や教材も，体系的な理解を促す上で効果的なものであるといえる．一方で，教材が比較的難しく，上記で挙げた実践はすべて附属中学校・高等学校でのものであり，一般の生徒にとって解決は容易ではない．それだけに比較的取り組み易い教材が望まれる．

また，いずれの教材も，体系化の対象となる命題群はそれほど多くはなく，その構造も単線型が目立つなど，単純なものが多い．その意味で，もう少し豊富な体系性を有する教材が望まれる．

(2) 体系化の理解を促す数学的活動

先行研究を踏まえるとき，体系化の理解を促す数学的活動として，次の2つが重要であると考える．

活動Ⅰ　体系化を意識する活動
活動Ⅱ　体系を構成する活動

Ⅰは，教科書の定理等が局所的理論に基づいて示されているので，それを意識化する活動のことである．Ⅱは，体系化を意識するにとどまらず，さらに生徒が自ら体系を構成する活動のことである．まずはⅠに，次いでⅡの活動に取り組むことを通して，体系化の理解を促すことが期待できる．

5．体系化の理解を促す教材の開発と数学的活動の具体

(1) 体系化を意識する数学的活動の具体

① 定理地図を創る

4 (1) で述べた「定理地図」を創る活動が有効である．例えば，数学Aの単元「図形の性質」の学習を一通り終えた段階で，次のような活動に取り組むことが考えられる．

【活動例 1】教科書に出ている定理・性質を書き並べて，定理・性質の証明で，他の定理・性質を根拠としている場合に矢印を引いて，定理地図を創ろう．

この活動を通して，証明された定理・性質から，新しい定理・性質が次々と証明されていることを実感することができる．また，中学校で学習した定理・性質等まで遡ることで，平行線の性質や条件，合同条件等は，実はきちんとした証明がなされていなかったことを振り返り，公理の存在と意義を指導することも可能である．

② 循環論法を評価する

別の活動としては，複数の命題間の関係を把握した上で，循環論法を評価する活動が考えられる．例えば，数学Ⅱの単元「図形と方程式」で，座標を用いた中線定理の証明の指導後に，次のような活動に取り組むことが考えられる．

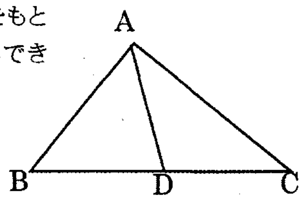
【活動例 2】Aさんは，次のことに気付いた．

中線定理 $AB^2+AC^2=2(BD^2+AD^2)$を$\angle A=90°$の直角三角形の場合で考えると，BD=CD=AD=(外接円の半径)だから，

$AB^2+AC^2=4BD^2=4(BC/2)^2=BC^2$

これは三平方の定理である．

このことから，三平方の定理は，中線定理をもとに証明することもできる．



Aさんの言っていることは，正しいだろうか．

座標を用いた中線定理については，2点(a, b), (c, d)間の距離が，次の式で求められることを用いて証明される．

$$L=\sqrt{(a-b)^2+(c-d)^2}$$

一方，2点間の距離を求める上の式は，三平方の定理を用いて導いている．したがって，Aさんの主張は，循環論法になることがわかる（図6）．

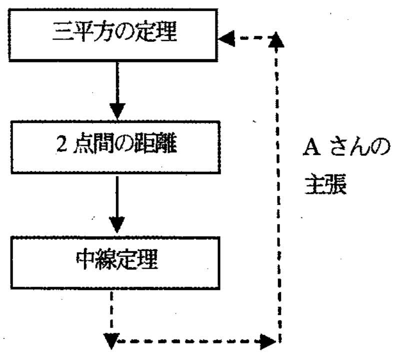


図6　Aさんの主張

このような活動を通して，体系化を意識させ，体系化の理解を促すことが期待できる．

(2) 体系を構成する活動の具体

① 多角形の外角の教材開発

比較的取り組み易く，かつ，豊富な体系性を有する教材として，「多角形の外角の性質」を開発した．外角の性質について，体系化したものを図示すると，図７の通りである．

三角形の外角の性質は中学２年で扱うが，これを，n 角形の場合に拡張して考えたものである．例えば，四角形の場合には，4 つの外角の和=360° を含めて，次の４つの性質がある．

ア　3 内角和=他の 1 外角+180°

イ　2 内角和=他の 2 外角和

ウ　1 内角=他の 3 外角和−180°

エ　0 内角=4 外角和−360°

例えば，アの証明は次の通りである．

＜アの証明＞

4 つの内角と外角を a～d，A～D で表すことにすると，

360° =a+b+c+d

=a+b+c+(180° −D)

よって，a+b+c=D+180°

イ，ウも同様に証明できるが，次の別の証明方法もある．

＜イの証明＞

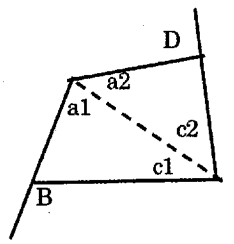
三角形の外角の性質から，

a1+c1=B

a2+c2=D

よって，

B+D=a1+a2+c1+c2=a+b



五角形以降の場合についても，同様に証明することができる．n 角形の場合は，アの場合を一般化するとオ，　また，イの場合を一般化したものの 1 つはカ，　さらに，ア～エすべてを統合して一般化したものは，キである．

オ　(n−1)内角和=他の 1 外角+180(n−3)°

カ　2 内角和=他の(n−2)外角和

キ　k 内角和=他の(n−k)外角和

+180(k−2)°

キで，特に k=0，n とすると，次の式が導かれる．

k=0　→　n 外角和=360°

k=n　→　n 内角和=180(n−2)°

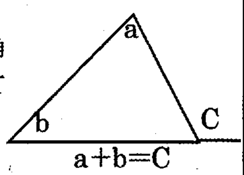
これらは，中学２年で扱う n 角形の外角和と内角和である．

②　多角形の外角の教材に基づく活動

①で開発した教材を基に，例えば次のような活動に取り組むことが考えられる．

【活動例 3】

1)　中学で，右のような三角形の外角の性質を扱ったが，四角形についても外角の性質を見つけよう．また，他の多角形についても調べよう．



2)　1)で見つけた定理を書き並べて，定理地図を創ろう．

図 7 で挙げた定理をどこまで扱うかは生徒の実態によるが，このような外角の性質を基に体系を構成する活動を通して，体系化の理解を促すことが期待できる．この指導は，数学 A の課題学習として扱うのがよいと考える．

６．おわりに

本研究で開発した「多角形の外角の性質」について，大学生を対象に，【活動例 3】と同様に試行的に実践を行った[5]．十分な時間が取れなかったため，定理地図を創る活動はできなかったが，四角形，五角形などの様々な定理を，自分で見いだすことについては，ある程度行うことができた．授業終了後に書かせた記述の中には，次のような感想が見られた．

・本日の課題はとても興味深いものでした．今まで学んできたことをもとに自ら性質を見いだしていく活動は，極めて主体的に取り組めるものでした．何か 1 つ発見すると達成感があり，他の人の意見を聞くと驚きもありました．

・三角形の外角の性質や内角の和の性質を使うことで，多角形についても性質を見いだせる数学の連続性が面白いと感じた．人それぞれ考えが違ったり変形すれば同じ形になったりしていた．一般化することで便利になった．

・当たり前のような三角形の外角であったがそこから発展していき，多角形の外角に関係する性質を見出す作業は初めての経験であり，とてもおもしろかった．

これらの感想から，体系化の理解にどの程度つながったかは不明であるが，少なくとも，自分で定理・性質を構成する活動は，学生にとって新鮮であったようで，興味・関心をもって主体的に活動に取り組んだ様子が読み取れる．この授業後に，さらに定理地図を創る活動に取り組むことで，体系化の理解を促す指導につながる可能性が示唆される．

今後の課題は，本研究で示した 3 つの数学的活動例について，高校生を対象に実践を行い，その有効性を検証することである．

なお，本稿は，日本数学教育学会第 49 回秋期研究大会にて発表した内容をもとに加筆したものである．

注

1)　平成 23 年検定・大日本図書「数学の世界 2」，「数学の世界 3」

2)　平成 23 年検定・数研出版 301「数学Ⅰ」「数学数学Ⅱ」「数学Ⅲ」「数学A」「数学B」

3)　昭和 46 年検定・学校図書「中学校数学 3」

4)　昭和 48 年検定・旺文社 415「新編数学ⅡB」

5)　筆者が担当する教育学部 3 年生を主対象とする「算数・数学科教科内容指導論」において，2016 年 8 月 1 日に実践した．

引用・参考文献

D.ヒルベルト（2005）『幾何学基礎論』ちくま学芸文庫

Freudentahl,H.(1971). Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics*, 3, pp.413-435.

井上正允(1995)『本日オープン！数学美術館』国土社，pp.23-52.

礒田正美(1987)「体系化の立場から見た中 2 の図形指導」日本数学教育学会誌，69 巻 11 号，pp.23-32.

科学技術の智プロジェクト数理科学専門部会(2008)「第 1 章　数学とは」報告書，pp.1-4.

宮川健・濵口達也(2014)「中等教育を一貫する論証指導を捉える枠組みの提案」日本数学教育学会第 2 回春期研究大会論文集，pp.41-48.

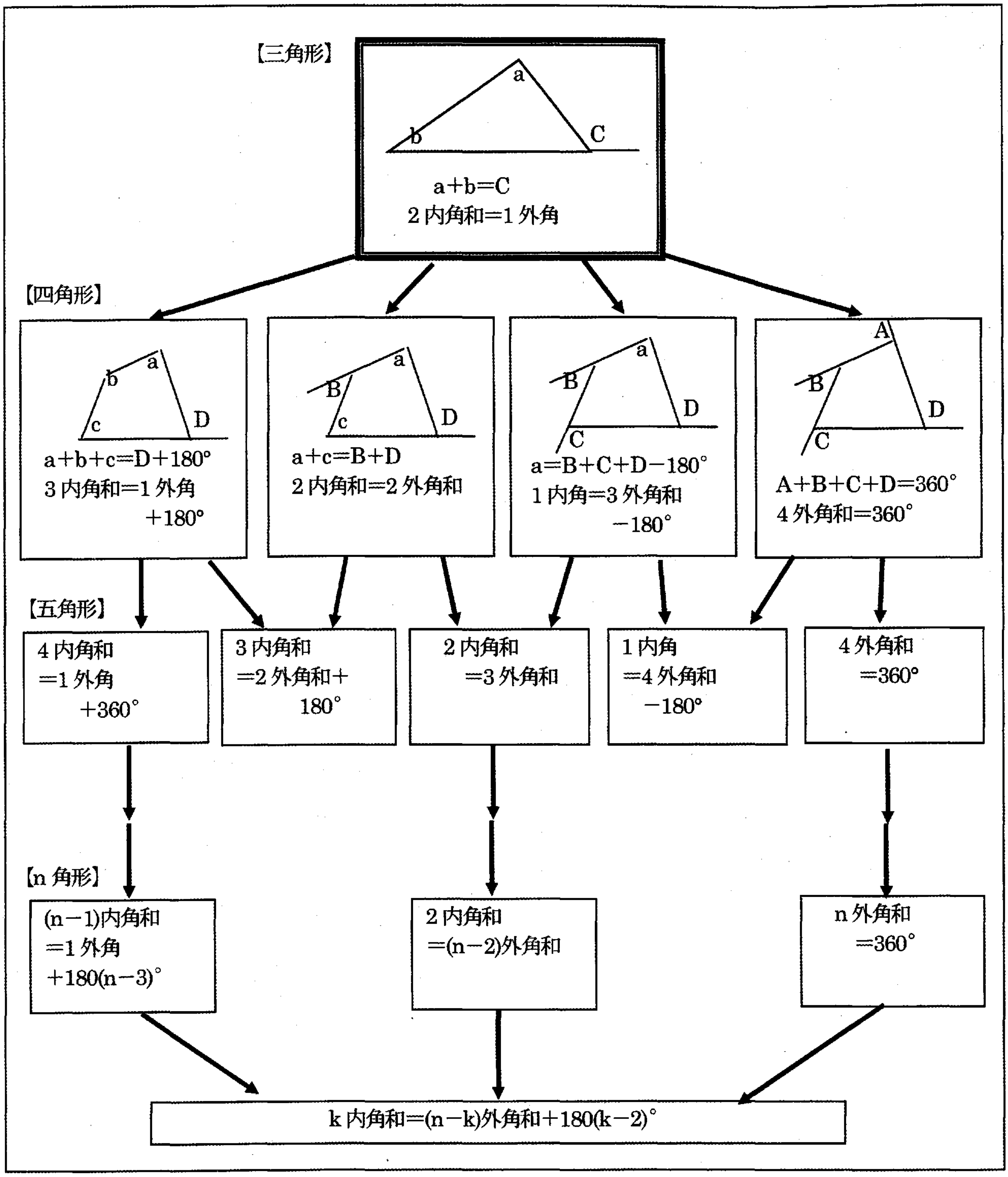


図7　多角形の外角の性質の体系化

宮崎樹夫(2002)「局所的準体系で演繹の基になる命題の正しさを探る活動-中学校数学の図形領域における活動の様相-」筑波数学教育研究，21，pp.21-30.

太田伸也(1991)「生徒が幾何の世界を構成すること」をめざす中学校の幾何教育」第24回数学教育論文発表会論文集，pp.121-126.

佐々木陽平(2015)「学校数学における公理的構成に焦点を当てた教材開発とその実践に関する研究」学芸大数学教育研究，27号，pp.97-104.

赤攝也(1988)『数学と文化』筑摩書房，p.25

柴田翔(2009)「体系のよさに焦点をあてた図形教材の開発」第42回数学教育論文発表会論文集，pp.529-534.

杉山吉茂(1986)『公理的構成に基づく算数・数学の学習指導』東洋館出版.

土屋史人(2006)「定理地図を創る過程で生まれる「問い」とその成果～ユークリッド原論を手立てとした授業構成～」第39回数学教育論文発表会論文集，pp.571-576.