〈論文〉

中学校におけるノルムを用いた授業の実践

-高等学校におけるベクトル指導への一考察-

田開　伯幸*・大和田　智義**

Practice of classes using norm in junior high school

-A study on vector instruction in high school-

Noriyuki Tabiraki　Tomoyoshi Ohwada

Abstract

The authors planed a class to examine the figures with distances defined by a norm, which is different from the absolute values that are normally used, in the junior high school affiliated to National University. In doing so, the students also learned "vectors" that are handled by high school mathematics B, which is required as a preliminary knowledge. In this paper, we report the practical contents of classes using norms and vectors for junior high school students and the results of questionnaire survey after these classes. Furthermore, considering the findings obtained from it, the situation of the students in the classes, interviews with the teachers at the junior high school, etc., we suggest the possibility of vector guidance.

キーワード：中学校数学　距離　ノルム　ベクトル

1.　はじめに

数学の多くの分野，特に解析学において，その研究の土台となる空間に距離の概念は欠かせないものとなっている。それは中学校や高等学校で学習する絶対値（| |）の概念を抽象化したものであり，その空間における物差しの役割を果たしている。高等学校までに扱う距離は直観的にイメージしやすい絶対値のみであり，それ以外の距離を扱うのは大学へ進学した後である。しかし,「距離」は身近に存在するものであることから，その測り方を変えるという発想は，中学生・高校生であっても興味を持つことが予想できる。そこで，国立大学教育学部附属中学校第３学年の選択授業において，数学を選択した生徒に対し，「数学に対する興味・関心を高めるとともに，論理的に思考していくことの重要性を感じられる授業」を目指して，平面上に「絶対値とは異なる距離」として「ノルム（‖ ‖）」の概念を用いた授業を計画した。

ノルムを扱うためにはベクトルに関する予備知識が必要となるが，現行の学習指導要領では，ベクトルは高等学校数学Ｂで扱う内容である。しかし坂井(1975)は，ベクトルの中学校教育課程への早期導入に関して「中学校の中学年以下で幾何学的ベクトルを学習させ，中学校高学年または高校において成分表示等の解析的扱いに進ませ，そのあと公理的構成に発展させ，抽象化したり，あるいはベクトル空間の概念形成をさせたりするようなカリキュラム編成がよいと考える」と述べており，基礎概念に関しては中学校第３学年段階で十分に理解できることを実証的に明らかにしている。このことから，今回の対象生徒の状況を考えるとベクトルの基礎事項に関する理解は十分に得られるのではないかと予想した。

本稿では，中学校第３学年の生徒を対象にしたノルム及びベクトルの概念を用いた授業の実践方法の紹介と，アンケート調査の結果を報告する。さらにそこから得られた知見や授業中の生徒の様子，現場中学校教員に対する聞き取り調査等も踏まえて考察し，ベクトル指導の可能性について示唆する。

*　静岡大学大学院，静岡県立科学技術高等学校
**　静岡大学教育学部

2.　具体的な学習内容と留意点

（1）ノルムの学習について

> 平面上の点 $a=(x,y)$ に対して，aのノルム$\|a\|$を
> $$\|a\|=\max\{|x|,|y|\}$$
> としたとき，$\|a\|$は原点と点aとの（抽象的な意味での）距離を与える。この距離で原点からの距離がrである点の集合（授業では具体的に距離が２であるものを扱う）は，中学校や高等学校で学習する丸い形をした円と同様に「中心が原点で半径がrの円」と呼ばれるが，この円を図示すると正方形になる。ただし，「max｛ ｝」は｛ ｝内の最大の値をとるものである。

今回の実践で扱うノルムは「無限大ノルム」と呼ばれたり，「$\|\ \|_\infty$」の記号が用いられたりするが，混乱を避けるため，生徒に対しては「‖ ‖：ノルム」で統一した指導を行う。

実際に生徒が作図する目標の図，および作図の根拠となる記述は以下の通りである。（図 1，図 2）

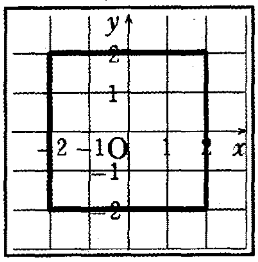
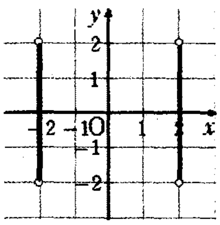


図 1　目標の図

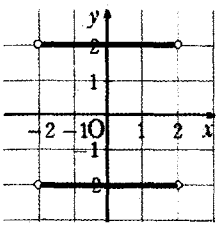
今回の実践において，全ての生徒に理解を求める学習内容は，前述のノルムを定義することで距離の測り方が変わることを理解し，それに基づいて帰納的に図 1 を描くことができるようになることとする。実践する対象は中学生であるため，全ての生徒が図 2 のような場合分けを理解したり，それを自力で記述したりすることは難しいと考えられる。また本来であれば，上述の「$\|a\| = \max\{|x|,|y|\}$」がノルムであることの条件を満たしている確認をしなければならないが，場合分けをしながら文字を含んだ絶対値の不等式を処理して論述を進めることは非常に困難である。そのため，作図の根拠となる記述に関しては考える時間を確保した後に図 2 の内容について説明をするが，ノルムの条件を満たしていることの証明に関してはその内容が記載されたプリントを配付して紹介するだけとする。ただし，本来は論述が必要であることを理解できるような補足説明はする。

「中心が原点で半径が2の円」は原点からの距離が 2（つまり，$\|a\| = 2$）の点の集まりである．
$\|a\| = max\{|x|,|y|\}$であれば，以下の3つの場合に分けられる．

（i）$|x| > |y|$のとき
$\|a\| = |x|$となるから，$|x| = 2$．つまり，$x = \pm 2$である．
ちなみにyは，
$|x| > |y|$の場合で考えているので，$-2 < y < 2$である．
したがって，
xが2または-2で，yが$-2 < y < 2$
となる点をグラフに描くと右のようになる．



（ii）$|x| < |y|$のとき
同じように考え，
$\|a\| = |y|$となるから，$|y| = 2$．つまり，$y = \pm 2$である．
ちなみにxは，
$|x| < |y|$の場合で考えているので，$-2 < x < 2$である．
したがって，
yが2または-2で，xが$-2 < x < 2$
となる点をグラフに描くと右のようになる．



（iii）$|x| = |y|$のとき
$\|a\| = |x| = |y|$となるから，$|x| = |y| = 2$である．
つまり，
$(x,y) = (2,2),(2,-2),(-2,2),(-2,-2)$
の4点である．

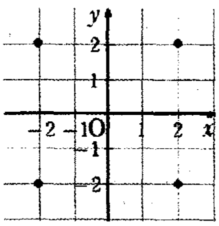


図 2　授業で配付したプリントの「作図の根拠となる記述」の抜粋

（2）予備知識の学習について

今回の実践では，予備知識として三平方の定理をもとにした距離の測り方や高等学校数学Ⅱで学習する円の方程式は最低限必要になる。また，一般的にノルムがベクトル空間の元に対して定義されるものであることや，高等学校数学Ｂで扱うことの多い円のベクトル方程式（$|\vec{a}| = 2$ など）が今回目標とする学習内容を理解する助けとなるものであることから，ベクトルについても必要な範囲のみ学習する。しかし，ベクトルの学習に関しては，筆者はこれまでの高等学校での指導において，理解し難いと感じている生徒が多いという印象を受けており，実際，ベクトル学習の困難性については山口(1995)，白川(2005)らも指摘している。そこで，特に以下の 3 点に留意した。

(i)　ベクトルの理解に関して

高等学校におけるベクトルの導入は，有向線分を用いた幾何的なものが一般的である。この具体的な方法は，ベクトルがどのようなものか理解しやすく意義も

実感しやすいが，図形の印象が強過ぎると，後の学習において混乱を招くことも考えられる。これには，ベクトルの実態の理解，すなわちベクトル空間の元であるという感覚を少しでも持たせることが有効ではないかと考えられる。実際，山口(1995)も，「有向線分を考えるためのベクトルではなく，ベクトルを表現するものとして有向線分を用いる，ということに注意しなければならない」と述べている。今回の授業対象生徒の状況を考えると，ベクトル空間など抽象的な概念であっても説明していきたいところではあるが，船山(1961)は，ベクトルを抽象的に扱うまでには，多くの数学的な背景を学習する必要があることを指摘している。よって，抽象的な概念までは深入りせず，導入の最初に「既存の概念とは異なる」ということを強く印象付けた上で，ベクトルの指導に入るのが有効ではないかと考えられる。

(ii) 位置ベクトルに関して

白川(2005)は，位置ベクトル導入時の問題点として，自由ベクトルとの違いが把握できないことによって混乱が生じている点を指摘している。筆者は，明確に理解し難い理由の 1 つとして，生徒は例えば「点$A(\vec{a})$」という表示の「$\vec{a}$」がどういったものであるかが具体的に把握できておらず，説明することができないからではないかと考えた。そこで，平面上の点の「座標表示」と「ベクトル表示」の持つ情報を文字で表すことによって，その違いが明確になり理解が深まるのではないかと予想した（詳細は図 4)。さらに，位置ベクトルの定義に沿うような作図を行うことで，平面上の任意の点に対して位置ベクトルが存在することを理解できるのではないかと考えた（詳細は図 6)。

(iii) ベクトル方程式に関して

今回の実践では，最終的にノルムを用いた表記である「$\|a\| = 2$」を提示して作図を行うため，ベクトル方程式「$|\vec{a}| = 2$」を事前に学習しておくことは大変有効である。高等学校でベクトル方程式を扱う場合，直線と円を学習することがほとんどであるが，白川(2005)は，直線のベクトル方程式の理解が困難であることを幾つかの観点から指摘している。そこで今回の実践では，直線については省略し，円のベクトル方程式のみを扱うこととした。特に今回の対象が中学生であることから，高校生に比べてグラフの方程式に対する理解が浅いと考えられるため，ベクトル方程式が表す図形的な意味を把握しやすくなるように注意を払った（詳細は図 7)。

3. 実践の概要

授業の流れ，および，その詳細は以下の通りである。

(1) 日時

平成 28 年

4 月　28 日

5 月　12 日，19 日，26 日

6 月　9 日，16 日，23 日

7 月　14 日

9 月　15 日

いずれも木曜日第 6 時間目（14：20～15：10)

(2) 対象

国立大学附属中学校第 3 学年のうち数学選択者 12 名

(3) 内容

- 第 1 回（4 月 28 日）授業者：田開伯幸
  - ■ 数学における定義や概念の拡張，一般的な「空間」について説明
  - ■ ベクトルについての学習
【基本概念，加法，減法，定数倍，成分表示】
- 第 2 回～第 8 回（5 月 12 日～7 月 14 日）
授業者：松本匡由（対象中学校教員）
  - ■ ベクトルについての学習
【表現の一意性，大きさ，位置ベクトル】
  - ■ 高等学校数学Ⅱ『図形と方程式』で扱う「円の方程式」についての学習
  - ■ 上記の後，「円のベクトル方程式」についての学習
- 第 9 回（9 月 15 日）授業者：田開伯幸
  - ■ ノルムと距離について説明
  - ■ 座標平面上の点a（座標は(x,y)）のノルムを $\|a\| = \max\{|x|,|y|\}$ と定義した場合に，この距離で「中心が原点で半径が 2 の円」を描く

第 9 回の授業に関しては授業記録（VTR，音声）をとり，授業後にはアンケート調査を実施した。また，授業を実施した中学校教員に対し，聞き取り調査も行った。

4. 実践の結果

授業の実態およびアンケートに関しては以下の通りである。

(1) 第 1 回

授業の冒頭では，距離空間を例に数学における一般的な「空間」について簡単な説明を行った。ここでは，定義や根拠に従って考えていくことの重要性と，これから学習していくことが新しい概念であることを意識させた。

次にベクトルの導入を行った。ここではまず，高等学校で通常行うような「向きと大きさをもった量」と

いう幾何学的な性質を用いて説明をした。そのうえで，「ベクトルを要素に持つ集合（空間）について考えていく」という表現をして，これまでに学習してきたものとは異なる新しい内容であることを強調した。その後，ベクトルの表記の仕方や逆ベクトル，和や差の概念，零ベクトル，成分表示などの具体的な指導に入った。

(2) 第2回〜第8回

第2回から第8回はプリントを用いて授業を実施した。以下は，その中でも主なものとして「ベクトルの大きさ」，「位置ベクトル」，「（座標平面における）円の方程式」，「円のベクトル方程式」を学習した際に使用したプリントの抜粋である。なお，これら以外の内容に関する考察やベクトルに慣れるための問題演習は適宜行っている。

■　ベクトルの大きさ

ベクトルの大きさに関しては，まだ三平方の定理を学習していないため，図 3のように式をこちらから提示し，成分表示されたベクトルの大きさを求める計算演習を行った。

そこで，ベクトルの大きさを表す場合は，ベクトルを｜｜で挟んで表す決まりがあります．つまり，$\overrightarrow{AB}$の大きさを表す場合は，

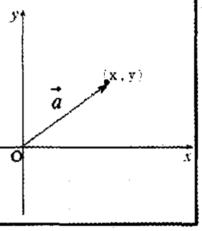
$|\overrightarrow{AB}|=3$　といったような書き方をします．ちなみに，$\vec{x}$などの場合は，その大きさを$|\vec{x}|$と表します．

成分表示されたベクトルは，その成分を用いて大きさを求めることができます．例えば，図のような

$\vec{a}=(x, y)$

の大きさは

$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$



で求められるという公式があります．

図 3　ベクトルの大きさ

■　位置ベクトル

位置ベクトルの学習に関しては，まず座標平面上の点の座標表示とベクトル表示の違いが明確になることを目指し，図 4のような表を用意して両者を比較した。

点の表し方の比較

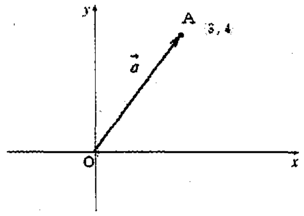
	点を表す情報	表し方
座標表示	x軸 y軸 での位置	(a, b)
ベクトル表示	原点からの向きと大きさ	$(\vec{a})$

ポイントは，x座標とy座標の2つの情報か，向きと大きさの2つの情報かの違いです．

図 4　点の表し方の比較

次に，図 5を示して対応を確認したうえで，位置ベクトルの導入を行った。

例えば図のように，$\vec{a}=(3, 4)$とします．



点Aを座標で表す場合，A(3, 4)と書きますが，ベクトルを使って表す場合は，$A(\vec{a})$と書きます．

図 5　点の表し方の対応

ここでは，平面上の任意の点に対して「原点を始点とした有向線分が存在すること」を強調するために，生徒各自が自由に点をとる活動を取り入れた（図 6の19①〜③）。なお，点Pを原点Oに重ねた場合に有向線分が描けないが，それが $\vec{0}$ に対応していることは授業者に補足してもらった。

19 位置ベクトル

18を踏まえて「位置ベクトル」と呼ばれるものを説明します．簡単な作図をしてもらいますが，手順は

①原点Oを適当に定める

②点Pを適当にとる

③$\overrightarrow{OP}$を描く　だけです．

①②の操作は，誰がどのようにやっても必ず③の$\overrightarrow{OP}$が存在します．（存在しない場合が本当にないのか確認してみてください）

$\overrightarrow{OP}$を$\vec{p}$と表すことにします．今やってもらったことを視点を変えて言い換えると，**「平面上で原点Oを定めると，どんな点Pも$\vec{p}$（つまり$\overrightarrow{OP}$のこと）によって決まる」**ということがいえます．このようなベクトル$\vec{p}$を点Oに関する点Pの位置ベクトルと呼びます．分かりにくいと思うので，「点Pの位置ベクトルの成分が点Pの座標」というくらいのイメージでも大丈夫です．

図 6　位置ベクトルの導入

■　円の方程式

円の方程式に関しては，その一例として「中心が原点で半径が2の円の方程式は$x^2+y^2=4$である」ということを提示し，その式が得られる理由について考えさせた。円の方程式の初出は高等学校数学Ⅱであり，通常は三平方の定理を学習しているため，すぐに「中心は原点で半径がr」など一般的な式を扱うことが多い。しかし，先述の通りの状況であるため，今回の実践では具体的な数のみを扱い，半径にrなどの文字を含むものは扱わないこととした。ただし，最終的に円が「中心からの距離が等しい点の集合」であることを正しく把握しておく必要があるため，式の考察を行う時間を十分に確保した。なお，中心が原点以外にある場合に関しても簡単に紹介している。

■　円のベクトル方程式

最後に円のベクトル方程式（$|\vec{p}|=2$など具体的なもの）について学習した。ここでは最終目標であるノルムを用いた表記を理解する準備として，ベクトル方程式と図の対応が明確になることを目指した。実際，すでに学習した$|\vec{p}|=\sqrt{x^2+y^2}$ や $x^2+y^2=4$ などの結果を用いれば，形式的な計算だけで $|\vec{p}|=2$ を導くことができてしまう。そこで，まず円の方程式「$x^2+y^2=4$」からベクトルを用いて簡潔に表現する方法を考えさせ，円のベクトル方程式「$|\vec{p}|=2$」を導いた。次に，得られた「$|\vec{p}|=2$」が表しているベクトルの「向き」と「大きさ」に関する条件について考えさせた。この活動を通して，条件として「原点からの距離は 2」だが「向きに関する条件は無い」ことを理解させ，このベクトル方程式が円を表していることを確認した。

さらに，中心が原点ではないような場合の例を提示した。図 7のような「$|\vec{p}-\vec{a}|=2$」を求める活動を通し，式と図の対応をより明らかになるようにすることで，ベクトル方程式の理解を促した。

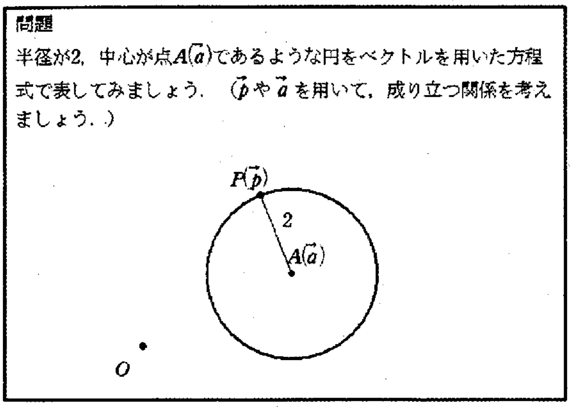


図 7　円のベクトル方程式

(3) 第9回

第9回の授業の流れは大きく以下の2つの場面に分けられる。

(ⅰ) 復習およびノルムについて説明する場面

(ⅱ) ノルムを$\max\{|x|,|y|\}$ で定義し，それを利用して円を考察する場面

時間は(ⅰ)は約 10 分，(ⅱ)は約 25 分であった。授業の説明は主にスライドを用い，定義等の記述や作図等はワークシート（巻末資料 1参照）を配付して行った。授業形態に関しては，(ⅰ) では全体に対して一斉説明のみだが，(ⅱ) では一斉説明の他に各自で作業を行う時間（授業者は机間支援）もある。今回の実践では，第 1 回の授業より個別作業の時間は周囲と自由に相談しながら考えることを許可している。

(ⅰ) 復習およびノルムについて説明する場面

最初にこれまでの復習として，$\vec{a}=(x,y)$のとき，$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$であることと，中心が原点で半径が 2 の円は$|\vec{a}|=2$や$x^2+y^2=4$ で表すことができたことなどを確認した。第 8 回の授業から 2 カ月程経っていたが，これらの内容は覚えている様子であった。

次にノルムの説明を行った（巻末資料 1$\boxed{23}$)。ここでは，平面上の任意の点に対し，ノルム記号（$\|\ \|$）が原点からその点までの距離を表すということと，今回の実践では「ベクトルの大きさ」という形で学習した通常の距離との関係を明らかにした。

(ⅱ) ベクトル$a=(x,y)$のノルム$\|a\|$を$\max\{|x|,|y|\}$で定義し，それを利用して円を考察する場面

まず，本時の授業において「$\|a\|=\max\{|x|,|y|\}$」と定義することを示し，この式について説明するとともに，理解を深めるために意味も含めて定義した式をワークシートに記入させた（巻末資料 1$\boxed{24}$)。さらに補足説明として，「$\max\{a,b,c,\cdots\}$」を例示し，{　} 内の「,」で区切られたそれぞれが独立した数値であるということと，その最大の値を$\|a\|$ の値にするということを確認した。さらに具体例として，点aの座標を$(1,-1)$とした場合の距離について，通常の測り方による距離と比較して考えさせた。（図 8）

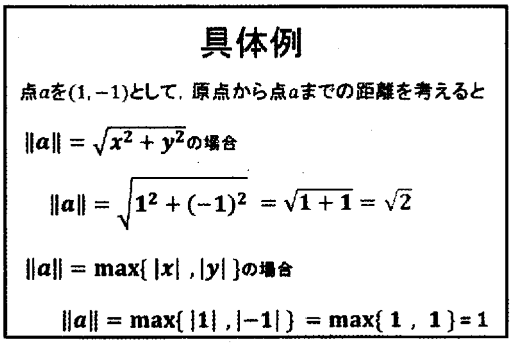


図 8　実際に使用した授業のスライド(1)

図 8の説明時には，すでに$\|a\|=\max\{|x|,|y|\}$ の意味が理解できている生徒も数名おり，この場合の距離が 1 となることを周囲と話している声が聞こえた。図 8の確認が済んだ後，この距離の測り方で「中心が原点，半径が 2 の円」の作図を行うように指示をした。

個別作業に入ってすぐ，「通常の距離の測り方（$\|a\|=\sqrt{x^2+y^2}$）によってできる円（丸い形）ではない」ということを全体に伝えた。先程の既に理解ができていた生徒を含め，「通常の距離とは測り方が違う」ということが理解できた生徒が約半数おり，距離が 2 になる点（例えば(2,2)など）をプロットし始めた。その他の生徒は，最初に注意したにも関わらず普段描くような半径 2 の円を描き始めたり，$\|a\|=\max\{|x|,|y|\}$ の意味が理解できずに手が止まっていたりしていた。

作業が早い生徒は開始1～2分程度で正しい図(図 1)が描けていたため，作図が終わったら「作図の根拠となる記述」をするように声をかけた。しかし，作図に

至らない生徒も多かったため，開始5分程度で補足説明を行った。(図 9)

$\|a\| = \max\{\,|x|\,,|y|\,\}$の補足説明

例えば，点aが$(2,-3)$の場合

$\|a\| = \max\{\,|2|\,,|-3|\,\} = \max\{\,2\,,3\,\} = 3$

つまり，
原点から点$(2,-3)$までの距離は3である

原点からの距離が2の点とは，どのような点か？

図 9　実際に使用した授業のスライド(2)

補足説明でほとんどの生徒は理解ができたようで，正しい図を描き始めていた。

この段階で分からなかった生徒が2名(席が隣同士)いたため机間支援中に確認したところ，$\|a\| = \max\{|x|,|y|\}$ の意味がよく分からないということであった。そこで，「通常の距離で測れば，原点から $(2,-3)$ までの距離は $\sqrt{13}$ だが，この距離の測り方をすれば，$(2,-3)$ までの距離は 3 であるという見方をする」ということを説明し，「距離が 2 である点はどういう点か」ということを再度尋ねたところ，2 人で相談しながらすぐに理解し，正しい図を描くことができた。

作業開始から 10 分もしないうちに全員が正しい図を描くことができたため，全体に対し再び「作図の根拠となる記述」を考えるように指示した。ちなみに，開始後すぐに正しい図が描けていた生徒の内の1名は，この段階で以下のような記述ができていた。

$x = 2$のときは，$-2 \leqq y \leqq 2$
$x = -2$のときは，$-2 \leqq y \leqq 2$
$y = 2$のときは，$-2 \leqq x \leqq 2$
$y = -2$のときは，$-2 \leqq x \leqq 2$

この生徒に，以前にこのような問題に取り組んだことがあるかどうかを尋ねたが，やったことは無いとの返答であった。

ほとんどの生徒が，「作図の根拠となる記述」として何をどのように書けばよいのかが分からない様子であった。これまでの学習経験を考えれば当然であるが，グラフを描く際になぜそのような記述をしなければならないのかが理解できていない様子であった。そこで，高等学校以降の学習において，いくつかの点の様子から帰納的に考えて結論を導くだけでは不十分である場合がある（例えば，高等学校数学Ⅲにおける「漸近線を求めた上でグラフの概形を描く活動」など）ということを説明した。実際には，「具体的に点$(2,0)$,$(2,1)$,$(2,-1)$,$(2,2)$ ・・ などの点を幾つか考えると直線 ($x = 2$) が得られそうではあるが，全ての点について確認したわけではない。そうではない点があるかもしれないと考え，根拠を明確にするのが数学である」ということを補足した。

作図の根拠となる記述をするために，まずは場合分けをする必要があることから説明を始めた。(図 10)

⇒ $max\{\,|x|\,,|y|\,\}$は
$|x|$と$|y|$ のどちらの値をとるのか？
（どちらが大きいのか？）

(ⅰ)$|x| > |y|$の場合　　(ⅱ)$|x| < |y|$の場合

(ⅲ)$|x| = |y|$の場合

図 10　実際に使用した授業のスライド(3)

図 10 の（ⅰ）～（ⅲ）の場合に分かれることは，容易に理解できた様子であった。しかし，先程の1名以外はそこから先に自力で取り組んでいくのは難しいと感じられたため，続けて説明を行った。スライドを用いて「(ⅰ) $|x| > |y|$の場合（図 2 参照）」について細かく説明を行った。絶対値を外す計算などは高等学校での学習内容であるが，具体例を挙げながらyの範囲を確認し，座標平面上のどの点に対応しているのかを考えさせた。説明を聞けば記述の内容を理解できている様子であった。(ⅱ) 以降の場合に関しては 図 2 が印刷されたプリントを配布し，一通り目を通して確認する形をとった。

$\|a\| = \max\{|x|,|y|\}$ がノルムであることの条件を満たしていることの確認は，内容をプリントに記載して配付した。記述量が多く内容も煩雑であるため，難易度が高いということは生徒も実感できたようで，説明は省略するが興味があれば別途聞きに来るように伝えた。さらに口頭で，通常の距離である $\sqrt{x^2+y^2}$ も，ノルムであることの条件を満たしており，それも同じように示すことができるということを補足した。

(4) アンケート調査

第9回の授業後にアンケート調査を実施した。内容は，選択形式で理解や興味などに関する質問Ⅰ～Ⅶと，自由記述形式で授業に対する感想や意見を書かせることとした。質問項目，回答段階（質問ⅡとⅣの選択肢は（　）内）および結果は以下の通りである。

【質問項目】

I.　授業全体の理解
II.　授業全体の感想
III.　ノルムの定義の仕方によって、長さの測り方が変わるということの理解
IV.　ノルムの定義の仕方によって、長さの測り方が変わるということの興味
V.　$\|a\| = \max\{|x|,|y|\}$の意味
VI.　$\|a\| = \max\{|x|,|y|\}$のとき、「円」が「正方形」になる理由

VII. 定義や根拠にもとづいて考えていくことの重要性

【回答段階】
1. よく分かった（とてもおもしろい）
2. 少しは分かった（少しはおもしろい）
3. あまり分からなかった（あまりおもしろくない）
4. 全く分からなかった（全くおもしろくない）

【結果】　　（数値は人）

質問項目\回答段階	1	2	3	4
I	5	7	0	0
II	9	3	0	0
III	8	4	0	0
IV	8	4	0	0
V	9	3	0	0
VI	11	1	0	0
VII	12	0	0	0

表 1　選択式アンケート結果

5. 考察

授業の様子やアンケート結果，中学校教員への聞き取り調査等から，今回の実践に関して次の(1)～(3)が考えられる。

(1) ノルムを用いた授業に関して，ある程度の理解と興味が得られた

第9回の授業において，全ての生徒が作図までの内容は十分に理解し，前向きに取り組んでいるように感じられた。これは，円のベクトル方程式の学習の際に，式の意味と図の関係を考察する時間を十分に確保したことによる影響が大きいと考えられる。

アンケート調査の質問項目III，V，VIの結果からも，異なる距離の存在や，それを扱うことによって身近な図形である「円」の形が変わることについて，多くの生徒が理解できたと判断することができる。実際，以下のような感想を記述した生徒もいた。

> **生徒A**
> 「円」という表記のしかたでも「正方形」という形が答えだったことがおもしろかった。初めはよく分からなかったけど，後で理解できてよかった。

内容理解の観点において，Iは他よりも低い結果であった。これは，作図の根拠となる記述（図 2）やノルムであることの条件の確認なども含めたためではないかと考えられる。しかし，I，III，V，VIの回答段階が上位項目のみであったことから，「正方形の作図」に関しては理解が得られたと判断してもよいであろう。

次に，質問項目II，IVの結果などから，難しい内容であるにも関わらず多くの生徒が内容に興味が持てている様子が伺える。実際，以下のような記述もあった。

> **生徒B**
> 内容はとても興味がわくものだったけど，難しかった。
> **生徒C**
> 難しくても少しずつ丁寧にやればわかるのが，とてもおもしろいです。

さらに，以下のような記述をした生徒もいた。

> **生徒D**
> 知らない単位，それについての意味，それを活用する方法など，新しいことを知ることができ，とても面白かったです。$\|a\| = \max\{|x|, |y|\}$ のときに円が正方形になるということが今までの授業の中で一番面白かったです。$\|a\| = \max\{|x|, |y|\}$ 以外の $\|a\|$ の定義にしたときのことが気になりました。
> **生徒E**
> 円の定義に従って書いたら，距離のがいねんが違うだけで正方形になってしまうということがおもしろかった。（中略）$\|a\| = \max\{|x|, |y|\}$ の距離が用いられる分野があることにおどろき，どのように使うのか興味をもった。他の定義での長さの測り方も知りたい。

生徒Dおよび生徒Eの記述内容からは，通常とは異なる距離の測り方に対して興味を抱いている様子が分かる。これは，距離空間やノルム概念の理解への第一歩であるといえるのではないだろうか。

(2) 論理的に思考することの重要性や面白さを気付かせる（再認識させる）ことができた

アンケート調査の質問項目VIIの結果は，全員が「よく分かった」という回答であった。第1回の授業からこの点に関しては意識させるようにしており，第9回の授業においても定義した距離に従って考察したり，作図の根拠となる記述やノルムであることの条件の確認の必要性を説明したりした結果ではないかと考えられる。実際，先述の生徒Cの感想も，根拠に基づいて順に思考したことで，論理的に考えることに面白さを感じたものであるといえる。さらに別の生徒は，以下のように今回の活動を通して「論述すること」自体を前向きに捉えるようになったと判断できる感想を記述した。（波線は筆者による加筆）

> **生徒F**
> 「中心が原点で半径が 2 の円」という問題で答えが正方形の図形になることが最初は不思議だったけれど，$\|a\| = \max\{|x|, |y|\}$ の場合が=2 になるところを当てはめていくと，しっかり正方形になったので，とても面白いと思いました。どんな問題も，しっかりと「型」にはめて，うまくきれいに証明していきたいです。

今回の教材は，作図対象である「円」やその結果として描かれる「正方形」は単純な図形であるにも関わらず，論理的に考えなければ結論は得られない。直感的には分からないような教材で，しかも興味を持って取り組める題材を選定することで，生徒たちは論理的に思考することの重要性や面白さを感じやすいのではないかと考えられる。

(3) ベクトル指導に対する示唆

(i) ベクトルの早期導入について

授業を実施した中学校教員からは，「ベクトルの概念に興味を示す生徒が多かった」という感想を頂いた。これまでに学習したことのない概念に興味を抱き，基礎的な内容については理科で学習した力の合成と絡めながら理解を進めることができたようである。これは，坂井(1975)の「中学校教育課程への早期導入」の可能性を感じさせる結果であった。しかし，同教員は中学校教育課程への導入に関しては否定的な見解で，その理由として「全生徒を対象とするには難易度が高いこと」や「ベクトル指導の位置付けの不明瞭さ（領域や学習意義等）」などを挙げていた。やはり難易度に関しては今回の対象生徒が特殊な状況であることや，坂井(1975)の対象も偏差値 56～67 の生徒に限られていたことなどからも，今後の検討課題であるといえる。

(ii) 数学Bベクトル方程式の指導順序について

聞き取り調査の中で最も興味深かったのは，ベクトル方程式に関する点である。これまでの高校生に対する指導経験からは，中学生のベクトル方程式の学習は難しいと予想していた。しかし，今回扱った内容（円のベクトル方程式，詳細は図 7）について，多くの生徒が積極的に取り組み，式と描かれた図の関係に納得している様子であったとのことであった。

現在のベクトル方程式の扱いは，学習指導要領解説において，ベクトルの演算理解の題材の1つとして「ベクトル方程式を扱うことも考えられる」といった記述がある程度である。実際の教科書(1)を見ると，ほとんどがベクトル方程式を扱っており，「ベクトルの応用」などの単元で位置ベクトルの学習の次に，幾何学的な捉え方の1つとして取り上げている。単元内の指導順序は，まず直線のベクトル方程式を学習し，次に円のベクトル方程式の学習を行っている。

直線のベクトル方程式は「位置ベクトルと，方向ベクトルのスカラー倍の和（$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{d}$など)」として導入されるが，生徒は把握し難く混乱を招くことが多い。実際，白川(2005)も「ベクトル方程式を図示できても，それを構成要素から説明する際に必要な事柄を的確に理解しているわけではない」と，その前提の欠落を指摘している。

しかし，円のベクトル方程式（例えば，図 7 の $|\vec{p}-\vec{a}|=2$など）は「距離」を表す式であり，実際に中学生でも理解できることが分かった。つまり，同じ「ベクトル方程式」としてまとめられていても，両者が表すものは大きく異なり，その困難性を一概に示すことはできないのではないだろうか。

円のベクトル方程式（主に$|\vec{p}|=r$など簡単なもの）は,「ベクトルが図形を表す方程式として利用できること」を生徒が理解し,「式が表している意味」に納得しやすい内容であることから，この学習には以下の2つの有用性があるのではないかと考える。

(ア) ベクトルを学習する意義を感じやすい

(イ) ベクトル自体に対して興味を抱きやすい

円のベクトル方程式にはこれらの効果を得る題材として，もっと有効に活用することが期待できる。

さらに，ベクトル方程式自体にも「平面で直線や円を表す方程式が，空間で直線や球を表す際も同じ形で表されること」など，ベクトルを学習する意義が実感できる要素がある。しかし現行の指導順序では，直線のベクトル方程式が複雑であるという印象が根付いてしまい，円のベクトル方程式の有効な活用や，ベクトル方程式自体に対する興味・関心が薄れてしまっているように感じる。そこで，以下の2点を提案する。

① 直線のベクトル方程式と円のベクトル方程式の指導順序を入れ替える

調査した教科書を見る限り，直線と円のベクトル方程式はそれぞれ独立しており，入れ替えることに問題は無いと考えられる。実際，今回の実践においても何の支障もなかった。ベクトル方程式の学習の最初に円について考察することで，ベクトル方程式そのものに対する興味・関心を高めることができるのではないだろうか。

② 円のベクトル方程式の指導を直線のベクトル方程式と切り離す

先に述べた「円のベクトル方程式の有用性」をより際立たせるために，直線のベクトル方程式とは別の場面で扱う方法も考えられる。これは，ベクトル学習の中でもなるべく早い段階で扱うことで，よりその効果が得やすいのではないかと予想できる。しかし，円のベクトル方程式を扱うためには位置ベクトルの学習が必須であることを踏まえると，今回調査した教科書の流れでは前述①が限界である。しかし熊倉(2005)は，ベクトル学習の意義を生徒に実感させるためにも「図形への応用を分散し,成分に関する内容を後半で扱う」ことが望ましいと述べ，以下の指導順序を推奨している。

1)ベクトルの意味	2)ベクトルの演算
3)位置ベクトル（図形への応用含む）	
4)ベクトルの成分	5)ベクトルの内積
6)内積の図形への応用	7)ベクトル方程式

円のベクトル方程式は両辺の平方などを考えれば内

積を利用した式に変形することは可能であるが，今回の実践のように位置ベクトルの教材の1つとして扱うことも可能である。つまり，上記のような指導順序の中でも，7) ではなく 3) において円のベクトル方程式を紹介することができる。これにより，ベクトル学習の早い段階で，円のベクトル方程式の持つ有用性を発揮することができるのではないかと考えられる。

6. 今後の展望

今後，以下の2点に取り組んでいきたいと考える。

(1) ノルムの指導

今回の実践から，中学生であってもノルムの概念を取り入れた授業に対し興味を抱く生徒がいることが分かった。これを踏まえて，今後はベクトルの学習が済んだ高校生を対象に，第9回で実施したような授業を実践していきたいと考える。対象が高校生であれば授業を通して数学に対する興味・関心を高めるだけでなく，円の方程式や図 2のような絶対値の場合分けなど，他分野の復習を取り入れた内容の実践も可能である。このような授業によって得られる効果についても検証していきたい。

また，生徒の状況（理系の生徒など）によっては，学習内容をさらに深めることも考えられる。筆者自身，高校数学と大学数学のギャップを感じており，理系の生徒であれば高校段階でもその溝を埋めるような授業を取り入れていくことは重要であると考えている。数学学習における高大接続の橋渡しの可能性の1つとして，ノルムの紹介を皮切りに，以下のような内容に取り組むことが考えられる。

① 様々なノルムの例があり，それに応じて様々な距離が存在することの紹介や，それらが実際にノルムであることの条件を満たしていることの論述などを学習する。

② ノルムや絶対値が「もとの空間から0以上の実数への写像」であることを学習し，体系的な理解を促す。

③ 一般的な距離空間やベクトル空間について紹介する。

今後の授業において上記の内容を扱うことで，生徒の数学に対する興味関心の高まりや，数学の体系性の理解などがどのように変化するかを明らかにしていきたい。

(2) ベクトルの指導

(i) ベクトルの早期導入について

坂井(1975)も述べているように，中学校から高校にかけてベクトルをスパイラルで学習することは大変魅力的ではあるが，早期導入に関しては不明瞭な点が多いことが分かった。今後の課題として，以下の3点を明らかにする必要があると考えられる。

① 現行の高等学校数学 B のベクトルの内容について，どこまでの範囲であれば中学生が理解できるのかを明確にする。

② ベクトルを中学校で学習する意義や有用性と，中学生が実感できるような教材を見出す。

③ 領域の位置付けや他教科（主に中学校理科や高等学校物理）との関わりを明確にする。

(ii) ベクトル方程式の指導順序について

今回の授業実践では，一部の生徒であるとはいえ中学生でも円のベクトル方程式に興味を抱き，その式とグラフの関係に納得することが明らかになった。これを踏まえ，今後「5.考察(3)(ii)」で提案したような順序で指導した場合に，生徒の興味や理解がどのように変化するのかを明らかにしていきたい。特に提案①であれば簡単に実践することができると考えられるため，今後は現場教員にも協力を依頼し，調査を続けていきたい。

謝辞

今回の実践にあたり，附属静岡中学校の松本匡由教諭には大変御尽力をいただきました。他にも御協力いただいた先生方，授業に対し前向きに取り組んでくださった生徒の皆様にも，この場を借りて心より御礼を申し上げます。

註

1) 平成25年度用高等学校教科書「数学B」，東京書籍 301,302，実教出版 303,304,305，啓林館 306,307,308，数研出版 309,310,311,312,313，第一学習社 314,315

引用・参考文献

熊倉啓之(2005)「中学との接続を重視した高等学校の幾何教育に関する研究」静岡大学教育学部研究報告（教科教育学篇）第36号，pp.101-116.

坂井裕(1975)「ベクトルの基礎的内容の早期導入の意義とその可能性」『日本数学教育学会誌数学教育学論究』28，日本数学教育学会，pp.1-22.

白川嘉子(2005)「高等学校数学におけるベクトルの理解に関する研究(2)」『第38回数学教育論文発表会論文集』，日本数学教育学会，pp.709-714.

船山良三(1961)「高校数学の実験研究：ベクトル指導の失敗例と成功例」『日本数学教育会誌』数学教育第43巻第5号，pp.10-15.

山口潤一郎(1995)「線形理論に関する基礎的研究」『第28回数学教育論文発表会論文集』，日本数学教育学会，pp.449-454.

文部科学省(2009)「高等学校学習指導要領解説　数学編理数編」平成21年12月

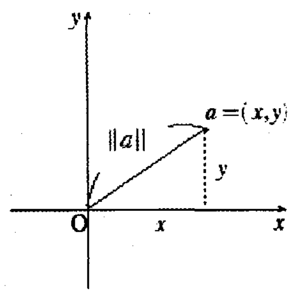
23 **距離**

新しい距離の表し方

例えば右図のような場合は，原点Oから点aまでの距離は

$\|a\|$：ノルム

で表されます．



以前学習したことを踏まえると，

2次元の平面では点 aの座標が(x,y)ならば，

$$\|a\| = \sqrt{x^2+y^2}$$

です．

また一方で，「円」は中心から等しい距離の点の集まりなので，

例えば「中心が原点で半径が2の円」の方程式は

$x^2+y^2=4$　$(\sqrt{x^2+y^2}=2)$　または　$\|a\|=2$

と表すことができます．

24 **異なる定義の距離**

ここでは，原点からの距離を以下のように定義します．

$$\|a\| = max\{|x|,|y|\}$$

↑

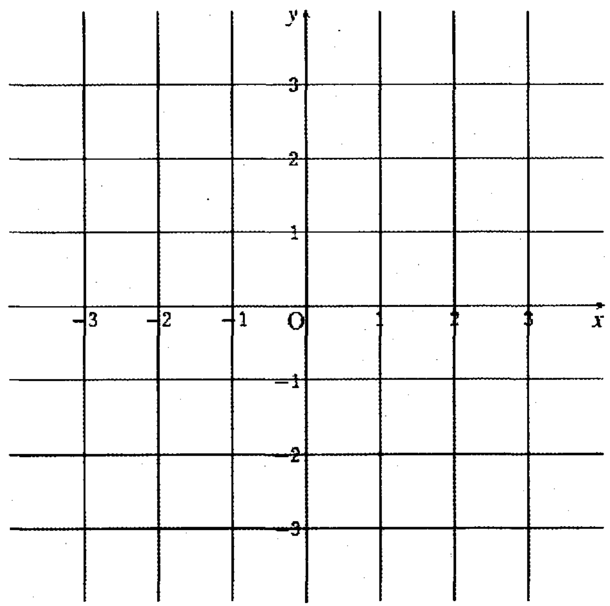
（{ }の中(ここでは$|x|$と$|y|$)の最大の値を$\|a\|$の値にする という意味）

例．原点から(1，−1)までの距離の測り方の違い

$\|a\| = \sqrt{x^2+y^2}$　の場合は，$\|a\| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$

$\|a\| = max\{|x|,|y|\}$　の場合は，$\|a\| = max\{|1|,|-1|\}=1$

このように距離を定義した場合，「中心が原点で半径が2の円」はどのような図形になるか考え，作図してみましょう．



巻末資料 1　第9回のワークシート