

学ぶ意義を実感させる関数の指導に関する研究

熊倉啓之

要 約

数学の中でも、「関数は嫌い」、「関数は苦手」という生徒は少なくない。そこで、関数を学ぶ意義を実感させるような指導のあり方を追及することが研究のねらいである。まず、関数指導の問題点を明らかにし、生徒が学ぶ意義を実感できない実態を探った。次に、関数を学ぶ意義を「変化する2つの量の関係を調べて、未知の部分予測する」ことととらえて、そのことを実感させるためには、①導入で、比例や1次関数以外にも様々な関数を扱うこと、②表作成、グラフ表示、関数予想、式表現、未知の部分の予測、という手順に基づく活動を取り入れること、③特に、表をもとにして変化の特徴を調べる、という活動を積極的に取り入れること、が重要であることを指摘した。そして、「円の分割」や「ビデオテープの目盛り」等を素材にして、生徒に関数を学ぶ意義を実感させるような指導を実践し、一定の成果を得た。

キーワード：学ぶ意義，実感，関数，表

1. 研究の目的

数学の中でも、特に関数について、「嫌い」あるいは「苦手」とする生徒は多い。ある都立高校1年生(87名)を対象に実施した調査では、嫌いな分野として1番多かったのが「関数」の63.2%で、2番目に多かった「図形」と「確率」のそれぞれ33.3%を大きく上回っている(筑波大学附属駒場中・高等学校数学科, 1998)。関数が嫌われる原因は何であろうか。内容的に難しいということも考えられるが、それとは別に、学ぶ意義が感じられない、という生徒も少なくないと考えられる。では、生徒に「関数を学ぶ意義を実感させる」指導はどのように行えばよいのか。この指導のあり方を追求するのが本研究のねらいである。

2. 関数指導の現状と問題点

関数に関する内容については、現行の学習指導要領(中学校学習指導要領, 1998; 高等学校学習指導要領, 1999)によれば、次のように、中1より高校まで、多くの時間をかけて学習している。

中1 比例, 反比例

中2 1次関数

中3 関数 $y = ax^2$

数学Ⅰ 2次関数

数学Ⅱ 三角関数, 指数関数, 対数関数

3次関数(微分・積分)

数学Ⅲ 分数関数, 無理関数

n 次関数(微分・積分)

しかし、関数の指導についてはこれまでも問題点が指摘されている(梶外志子, 1995)ように、時間をかけている割には、効果は表れていない。

以前に、数学Ⅲまで選択し大学受験を控えた高校3年生に、「関数はなぜ学ぶのか」と問うたことがある。しかしその返答は「よくわからない」というものであった。さらに、「関数で学習したことは何か」と問うと、「グラフを描くこと」という返答であった。

実際、高校の教科書には、三角関数・指数関数・対数関数や分数関数・無理関数などの内容について、様々なグラフをかかせる問題が中心で、関数としての利用問題はあまり見受けられない。

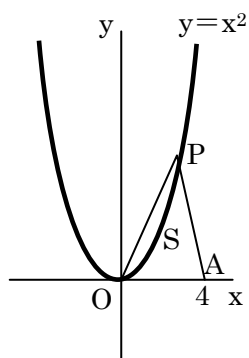
一方、中学の教科書には、中1～中3いずれの関数指導の場面でも、教科書によって軽重の差はあるが、関数の利用にページが割かれている。これらの学習を通して、関数を学ぶ意義を少なからず実感することはできるはずである。しかし、実態は必ずしもそうでない部分もある。

高校受験を経験したばかりの高校1年生に、「関数で学んだことは何か」と問うと、「グラフ上で図形の問題を考えること」という返答であった。たとえば、中学3年の教科書には、次のような問題がある(杉山吉茂他, 2001)。

$y = x^2$ のグラフ上の点 $P(x, y)$, 原点 O , 点 $A(4, 0)$ を頂点とする $\triangle POA$ の面積を S とします.

① S を x の式で表しなさい.

② $S=50$ のときの P の座標を求めなさい.



しかし、これは関数の問題というよりは、座標幾何（解析幾何）の問題といえる。なお、上記のような問題は、他の教科書にも載っている。

また、高校の数学Ⅱで学ぶ「図形と方程式」で、次のような教科書の問題（岡本和夫他，1997）も、関数の問題だと考えている生徒は少なくない。

点(1,2)を通り、直線 $y = -2x + 5$ に垂直な直線の方程式を求めよ.

上記のような座標幾何の問題は、幾何の問題であり、座標平面上で代数的に処理するものである。関数とはそのねらいが全く異なるものであるが、混同している生徒は少なくないようである。

また、座標平面における x 軸と y 軸の 1 目盛りの長さは、関数としてのグラフを描く上では、必ずしも等しくなくてもよいが、座標幾何として考察する上では、長さは等しくなければならない。そうでなければ、円の方程式のグラフが楕円になったり、垂直な 2 直線が垂直にならなかったりする。この違いについて、少なくとも高校ではしっかり指導すべきと考えるが、この点を明示している教科書はあまりない。

もちろん、上記の点に関して、本来異なるものを同じように処理できるところに数学のよさがあるといえるのだが、少なくとも初期の指導に際しては、その違いを理解させることは大切であろう。違いを明確にすることで、座標幾何とは異なる関数を学ぶ意義を、より強く実感させることができるからである。

3. 関数を学ぶ意義と関数の学習目標

(1) 関数を学ぶ意義

「中学・高校生が関数を学ぶ意義は何だろうか」この問いに対する答えはいくつか考えられるが、

筆者は、「変化する 2 つの量の関係を調べること」と考える。そしてその応用として、「未知な部分を予測すること」ととらえている。具体的には、既知のいくつかの (x, y) の値をもとに、ある x に対応する未知な y の値を求めることであり、また逆に、ある y の値に対応する未知な x の値を求めることである。特に最大・最小となる y の値を求めたり、そのときの x の値を求める場面は多い。

(2) 関数の学習目標

関数を学ぶ意義を(1)で述べたように考えるとき、関数の学習目標は、「変化する 2 つの量の関係を調べ、未知の部分を予測できること」といえる。具体的には、次のような手順で、未知の部分を予測できるようになればよいと考える。

① x, y の関係で、わかっている（求められる） x, y の値を調べ、表を作成する。

② 表を分析して、変化の特徴を調べる。調べたことから、どのような関数（知っている代表的な関数のいずれか）になるかがわかれば、その式を求める。

③ 表だけからでは関数がわからない場合、②で作成した表をもとに、グラフを作成する。現実の事象では、正確に当てはまる関数式は存在しないことも多いので、必ずしも表だけから関数がわかるとは限らない。

④ グラフを観察して、知っている代表的な関数のいずれに最も近似できるかを予想する。

⑤ ④で予想した関数となることを仮定して、その式を求める。

⑥ ⑤で求めた関数の式を利用して、未知の部分を予測する。

現行の中学・高校の学習指導要領によれば、関数の目標に関連して、次のような記述がある（中学校学習指導要領，1998；高等学校学習指導要領，1999）。（下線は、筆者による。）

< 中学 3 年の目標 > (3)

具体的な事象を調べることを通して、関数 $y = ax^2$ について理解するとともに、関数関係を見だし表現し考察する能力を伸ばす。

< 数学 I > (2) 二次関数

二次関数について理解し、関数を用いて数量の変化を表現することの有用性を認識するとともに、

それを具体的な事象の考察や二次不等式を解くことなどに活用できるようにする。

いずれも、「それぞれの関数について理解」(〃部分)し、「関数関係を見だし表現し考察する」「具体的な事象を考察する」(〃部分)とある。

実際の指導においては、前者の部分の目標は比較的達成されているが、後者の部分については必ずしも十分でないと感じている。

そのためにも、後者の部分について、より具体的に述べるのが重要であると考え、上記のような目標を設定した。

特に、上記⑥のみを、⑤までと切り離して扱いがちだが、①～⑥をまとめて扱うことが大切であり、そのことが関数を学ぶ意義を実感させることにつながると考える。

4. 学ぶ意義を実感させる指導を行うための留意事項

筆者は、関数に限らず、数学を学ぶ意義を実感させる指導について、次のような事項に留意して指導することが大切であることを指摘した(熊倉啓之, 2000)。

- (1) 新しい数学の知識・考え方をを用いることにより、これまでと比べて何が異なるのか、どのように世界が広がるのかを明確にすること
- (2) 新しい数学の知識・考え方が身の回りで使われる場面を、数多く伝えること
- (3) 新しい数学の知識・考え方をを用いることにより、ものの見方・考え方が変わる、あるいは深まる場面を設定し、提供すること
- (4) 新しい数学の知識・考え方が「きれい・美しい」、「楽しい・うれしい」と感じる場面を設定し、提供すること

学ぶ内容が、生活に直接役立つような場面はそう多くはない。しかし、上記の点に留意して指導すれば、生徒に学ぶ意義を実感させることはできると考える。これについて筆者は、三角比の指導を通して、指導を試みた(熊倉啓之, 2000)。

関数の指導においても、上記の点に留意して指導することが重要であると考え。

しかし、関数の場合は、具体的な事象を取り上げる場面が比較的多く、上記の(2)については、従来

の指導ですでに留意して指導されているといえる。にもかかわらず、関数を学ぶ意義を実感できない生徒が少なくないのはなぜだろうか。具体的な事象を扱った課題を解決しても、関数のよさがその解決にどのように生かされたのかが、生徒に伝わっていないのではないだろうか。そのためにも、(1)の視点をより強調して、指導していくことが重要であると考え。実際そのような実践もいくつか報告されている(柳本哲, 1996; 松崎昭雄他, 1999; 田辺章子, 2000)。

5. 関数を学ぶ意義を実感させる指導とは

(1) 関数の導入

4で述べた留意事項(1)に留意した指導を行うには、特に関数の導入場面が大切であると考え。教科書には必ずしも明確に記述していないが、関数を学ぶことで、今まではできなかった「未知な部分の予測」ができるようになることを、具体場面を通して指導することが大切であると考え。

さらに、変化を調べる際にいくつかの代表的な関数のモデルを知っておくことは意味があることも付け加える。実際の変化は複雑で、正確に関数のモデルの通りになるものは少ないかもしれないが、知っているモデルに近似できるものは結構あるであろう。そのモデルとして、これから、1次関数、2次関数、三角関数、…、といった関数を学習する、ということを伝えていくことは、学ぶ意義を実感させる上で、意味のあることである。関数の名前は出さないにしても、グラフを示すことはできるはずである。このような指導は、中学、高校いずれでも実施すべきと考える。

(2) 表、グラフ、式

「変化を調べるためには、どのような方法があるか」と問う中で、表・グラフ・式を登場させる。表は、初期の段階で変化を調べるのに適しているといえる。グラフは、変化を視覚的に観察するのに適している。式は、未知の部分を正確に予測するのに適しているといえる。それぞれの特徴を理解させた上で、具体例を通して、変化を調べる。特に、「表をもとにして変化を調べて未知な部分を予測する」というような活動は、積極的に取り入れるべきであると考え。

(3) 変化の割合, 平均変化率, 微分

高校生で, 2 次関数と指数関数の増加部分の違いを正しく理解していない生徒がいる。

実際, 2 つのグラフを一緒に描かせると, 図 1 のようなグラフを描く生徒をよく見かける。グラフのおよその形だけを覚えていたのであろう。少なくとも, 2 次関数と指数

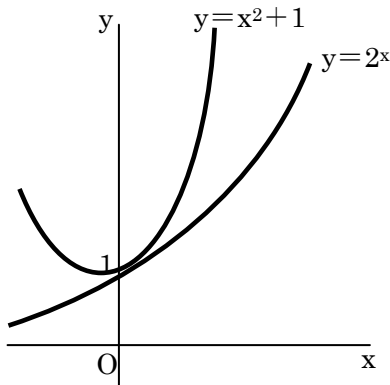


図 1 2 次関数と指数関数のグラフ

関数の変化の特徴の違いを理解していれば, もう少し違う形に描けるはずである。

変化の特徴を, グラフや式とは違う手段で, より分析的に調べる方法が, 変化の割合・平均変化率であり, 微分である。

中学の段階では, 変化の割合を通して, 1 次関数と関数 $y = ax^2$ の変化の特徴の違いを理解する。高校の段階では, 平均変化率, 微分を通して, それぞれの関数の変化の特徴を理解する。しかし, 特に高校では, この点について教科書の記述は必ずしも十分でない。たとえば次のように表をもとに, それぞれの関数の変化の特徴を理解させる指導を重視すべきと考える。

< $y = x^2$ の場合 >

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	1	4	9	16	25	36	49	64
		+3	+5	+7	+9	+11	+13	+15

< $y = 2^x$ の場合 >

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	2	4	8	16	32	64	128	256
		+2	+4	+8	+16	+32	+64	+128

(4) 関数の利用

ここでは, 学習した関数に関連して, 「未知の部分を予測する」ような課題を提示することが重要であると考え。前述したように, 中学では, 教科書にその類の問題はあるが, 高校では数少ないので, 多くの具体例を取り上げたい。特に, 三角

関数, 指数関数, 対数関数は, 様々な分野で登場する関数であり, 利用場面を取り上げて, 関数を学ぶ意義を実感させるようにする。

6. 関数を学ぶ意義を実感させる指導の実際

以下では, 関数を学ぶ意義を実感させる指導の実際として, 関数の導入 (中 2), 関数の利用 (数学 I), 関数の利用に関するレポート課題 (中 3) について述べる。

(1) 関数の導入

関数の導入場面では, ここで扱う「比例・反比例」と「1 次関数」に限定せず, 様々な関数を扱い, 関数を学ぶ意義を実感させる指導を試みた。

なお勤務校では, 中 1 の「連立方程式」と中 2 の「比例・反比例」を入れかえたカリキュラムを実施しているため, 中 2 の関数では, 「比例・反比例」と「1 次関数」の両方を指導する^{注 1)}。

関数の導入に対しては, 次のように 4 時間かけて実施した。(2001 年 3 学期実施)

1 時間目: 関数の意味と学ぶ意義

2 時間目: 関数の具体例～円の分割

3～4 時間目: 表をもとに, 変化を調べる

1 時間目は, 身の回りにある様々な変化する 2 つの量を, 生徒にあげさせたり, 教師の方で提示しながら, 5(1)で述べたように, 「変化を調べて, 未知の部分を予測する」という関数を学ぶ意義を生徒に強調した。「関数」の言葉の意味については, この段階では「x と y の関係が定まるとき, この関係を関数という」という程度の表現にとどめ, 正式な定義 (x を 1 つ決めると, y が 1 つに定まるとき, y を x の関数という) は, 3 時間目に指導した。

2 時間目は, 弦で円を分割する課題を通して, 未知の部分を予測する活動を実施した。

3～4 時間目は, いくつかの表を示して, これらの関数について, 未知の部分を予測する活動を実施した。ここで, 比例関数, 1 次関数を定義した。

以下では, 2～4 時間目の内容について述べる。

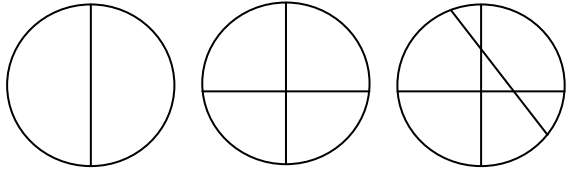
① 2 時間目

次の課題を提示した。

円に、弦を1本、2本、3本引くと、それぞれ最大で2分割、4分割、7分割される。

では、弦を10本引くと最大で何分割されると予想できるか？

弦	1	2	3	10
分割数	2	4	7	?



上記の課題は、高校の数学Ⅱの「数列」の中の漸化式を利用した問題として登場するものである。しかし、あくまでも、変化の特徴（規則性）を調べて、10本のときの分割数を予想すればよいので、中学生でも十分に組み立てる課題であると考えた。実際に生徒は、次のような様々な方法で、課題を解決した。

ア. 実際に、10本の弦を引いて数えた。

イ. 4本程度まで弦を引いて数え、次に分割数の増え方の特徴をもとにして、順に調べた。

弦	1	2	3	4	5	...	10
分割数	2	4	7	11	16	...	56
		+2	+3	+4	+5	...	+10

ウ. イと同じ増え方の特徴をもとに、次のように計算式を作って求めた。

$$2 + (2 + 3 + \dots + 10) = 56$$

なかには、次のように、文字を使ってx本引いたときの式を求め、xに10を代入して求めた生徒もいた。

$$\text{エ. } 2 + (2 + 3 + \dots + x) = 2 + (2 + x)(x - 1) \div 2$$

$$x = 10 \text{ を代入して, } 2 + 12 \times 9 \div 2 = 56$$

アの方法は、簡単に思いつくものではあるが、大変で、しかも間違いやすい方法であるとした。それに比べて、イやウのように変化の特徴（規則性）を調べる方法は容易であることを強調した。つまり、変化を調べることで、「未知の部分予測する」という活動を通して、関数を学ぶ意義を再確認した。

さらには、エの方法を全員に紹介した。式の変形については中学生には難しいので深入りはしなかったが、文字を使って一度式を求めておくと、

弦が10本以外の場合でも、すぐに求めることができることを強調し、式のよさを実感させた。

なお、この課題では、解決に際して、正式には増加分が1ずつ増える理由を述べる必要があるが、授業の中では、予想させるにとどめた。ただし、理由がわかった場合は、レポートにして提出するように指示したところ、数人から提出された。

② 3～4時間目

まず、次の課題を提示した。

2つの量x, yの間に次のような関係があるとき、x=10のときのyの値を予想しなさい。

1)

x	1	2	3	4	5	10
y	3	6	9	12	15	?

2)

x	1	2	3	4	5	10
y	2	5	8	11	14	?

3)

x	1	2	3	4	5	10
y	8	5	2	-1	-4	?

4)

x	1	2	3	4	5	10
y	1	4	9	16	25	?

5)

x	1	2	3	4	5	10
y	2	5	10	17	26	?

6)

x	1	2	3	4	5	10
y	1	2	4	8	16	?

7)

x	1	2	3	4	5	10
y	2	3	5	9	17	?

1)は比例する関数、2), 3)は1次関数、4), 5)は2次関数、6), 7)は指数関数である。

いずれも、2時間目で学んだことをもとに、変化の特徴を調べて、yの値を予想させた。このとき、yをxの式で表すことにも挑戦させた。

式で表すことにつまづいている生徒には、2)は1)をもとに、5)は4)をもとに、7)は6)をもとに考えるようにヒントを提示した。

生徒は、変化の特徴を調べる際には、表を横に

見て変化に目を向けたり，式で表すのに，表を縦に見て対応に目を向けたりしていた．これらはそれぞれ，「水平分析的な見方」，「垂直分析的な見方」と呼ぶこともある（古藤怜，1991）．これら両方の見方があることを生徒全員に強調した．関数指導において，次のように変化と対応の両方に目を向けることは大切であると考える．

<変化に目を向ける>

x	1	2	3
y	2	5	8

$\xrightarrow{+3}$ $\xrightarrow{+3}$

<対応に目を向ける>

x	1	2	_____
y	2	5	_____

$\downarrow \times 3 - 1$ $\downarrow \times 3 - 1$

さらに，ここでの学習を通して，「関数」の定義および「比例する関数」，「1次関数」の定義をした．また，4)，5)は2次関数といい，中3・高1で，6)，7)は指数関数といい，高2で学ぶ関数であることにも触れた．

さらに，次の課題を提示した．

比例する関数，1次関数について，気が付いたことをあげなさい．

この課題に対して，生徒からまず，両方に共通する性質として次のような反応があった．

ア．xが1ずつ増えるときのyの増え方（減り方）は一定である．

イ．アの一定な数は，式に表したときのxの係数に等しい．

ウ．xの係数が正のとき，yは増加し，負のとき減少する．

また，異なる性質としては次のものがあがった．

エ．比例する関数では，xが2倍，3倍になると，yも2倍，3倍になるが，1次関数では一般にはこのことは成り立たない．

上記ア～エで，比例する関数，1次関数に関するほとんどの特徴をあげることができた．1次関数以外の関数を一緒に考察したことが有効であったと考えられる．ここでの考察は，後にグラフの傾きを考えたり，変化の割合を考えたりするときに，役立ったといえる．

さらには，次のような課題も提示した．

他に，気が付いたことをあげてみよう．

これに対しては，次のような反応があった．

オ．4)，5)のような（2次）関数の場合は，xが1ずつ増えるときのyの増え方（減り方）は，1次関数になる．

カ．6)，7)のような（指数）関数の場合は，xが1ずつ増えるときのyの増え方（減り方）は，同じような（指数）関数になる．

上記のことは，高校で扱う「2次関数を微分すると1次関数になる」，「指数関数を微分すると指数関数になる」ことにつながる内容である．

授業ではこのことに深入りするつもりはなかったが，生徒から「オについて，いつも正しいといえるのか」という疑問が出たので，他の場合についても少し考えさせた．すると，2時間目に扱った課題について，オが成り立っていることに何人かの生徒が気づいた．証明はしなかったが，事実として正しいことを生徒に伝えて授業を終えた．

なお，「2次関数であることがあらかじめわかると，別の方法で関数の式を求めることができる」ことにも触れたところ，後日，2時間目に扱った円を分割する課題について，次のように式を求める方法を考えてきた生徒がいた．

弦	1	2	3	4	5	...	10
分割数	2	4	7	11	16	...	56
		+2	+3	+4	+5	...	+10

弦をx，分割数をyとする．x=0のときを考えると，y=1だから，この関数の式は，

$$y = ax^2 + bx + 1$$

とおける．x=1のときy=2，x=2のときy=4だから，

$$a + b + 1 = 2, \quad 4a + 2b + 1 = 4$$

この連立方程式を解いて， $a = b = \frac{1}{2}$

よって， $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$

表にある値だけを用いると，3元連立方程式を解くことになるが，x=0のときのyの値を調べることにより，上のように2元連立方程式で解くことができる．

ちなみに，この問題を「数列」の問題として解くと，次のように階差数列の公式を用いる．

$$y = 2 + \sum_{k=1}^{x-1} (k+1)$$

$$= 2 + \frac{1}{2}x(x-1) + (x-1) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$$

しかし、上記生徒の考えてきた方法で解けば、中学生でも十分理解できることがわかる。

関数の導入で、4時間をかけたことは、後の指導時数を考えると多少きつかったといえる。しかし、この導入を通して、ある程度関数を学ぶ意義を実感させることができたという点では、有効に時間を活用できたと考える。

(2) 関数の利用

数学Iで扱う2次関数の利用としては、最大・最小問題が教科書によく載っているが、ここでは変化を調べる活動を含んだ課題として、「ビデオテープの目盛り」(森口繁一、2001年)を取り上げた。この課題についての授業は1時間で実施した。

(2002年1学期実施) 課題は、次の通りである。

ビデオテープについている目盛りと、テープの回転の中心からの距離との間には、どのような関係があるだろうか。

120分のビデオテープについている時間を表す目盛りのシール(図2のようなもの)をコピーして、グラフ用紙と一緒に生徒に渡した。

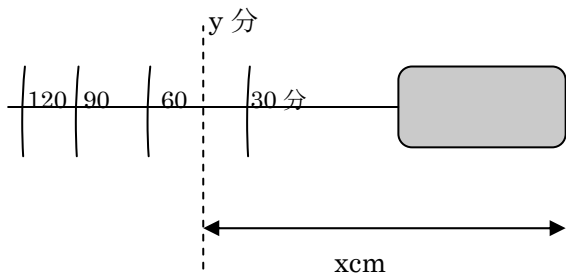


図2 ビデオテープのシール

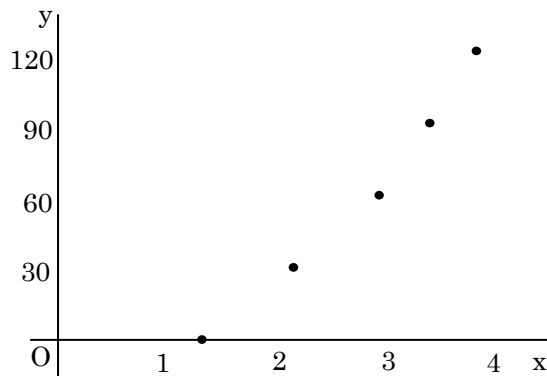
まず、生徒にどのような関係になるかを予想させた。見た目には、1次関数にはなりそうもないので2次関数ではないか、と予想した生徒が約半数であった。

次に、距離を x cm としたときの時間の目盛りを y 分として、定規で測って次のような表を作成した。

x	1.3	2.2	2.9	3.4	3.8
y	0	30	60	90	120

x の間隔が一定ではないので、表を見ただけでは、その変化の特徴はよくわからない。そこで、

表をもとに、次にグラフを作成した。



グラフを観察して、何となくではあるが、これまで学習してきた中で2次関数に近い、という予想を立てた。

そこで、次にこれを式に表現するように支持した。正確には、最小2乗法などの方法を使うのであるが、ここでは、およその式ができればよいとした。したがってどのデータを使うかによって、異なる式がでてきたが、それはすべて認めることにした。

ただし、この関数のグラフは「 y 軸に関して対称になりそうだ」という予想(ビデオテープは円周上に巻きついているので、 $-x$ のときの y の値は、 x のときの y の値と同じになるはずである)から、式は、次のようになることを確認した。

$$y = ax^2 + c$$

以下に、生徒の解答例の1つを示す。

$x=1.3$ のとき $y=0$, $x=3.8$ のとき, $y=120$ だから,

$$1.96a + c = 0, \quad 14.44a + c = 120$$

これを解いて, $a=9.4$, $c=-15.886$

よって, $y=9.4x^2-15.886$

この後、この課題を次のように理論的に導いて、2次関数と予想したことが正しいことを確認した。

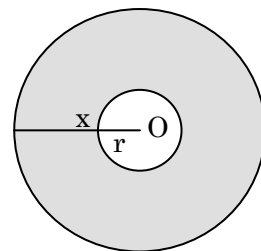
中心 O からのテープの巻かれた部分の距離が x cm のときの時間を y 分とする。

テープの厚さを h cm, テープの回転する速さを v cm/分として, $x=r$ cm のとき y を 0 分とすると,

x 分で巻かれた部分のテープの断面積は

$$\pi x^2 - \pi r^2 \quad (\text{cm}^2)$$

一方、巻かれた部分を広げて考えたとき



に、この断面積は $vyh(\text{cm}^2)$ とも表せる。

よって、 $\pi x^2 - \pi r^2 = vyh$ より、

$$y = \frac{\pi}{vh}(x^2 - r^2)$$

理論と予想があっていたことに対して、生徒は少なからず驚き、感動していた。なおこの後、よくある場面として、具体的な x の値を与えて「あと何分録画できるか」という課題を提示し、求めた式を利用して解決した。これらの活動を通して、関数を学ぶ意義を実感できたと考えられる。

(3) 関数の利用に関するレポート課題

中3での関数学習を終えた後に、生徒に次のレポート課題を出した（冬休み課題）。

日常の事象の中から、関数を見つけ出し、表とグラフを作成して、可能ならば式で表してみよう。また、変化の特徴について考察してみよう。

レポートで取り上げた題材は、大きく次の4つに分類できた。

- ① 実験したデータに基づいたもの
- ② 調査したデータに基づいたもの
- ③ 数学的に考察したもの
- ④ その他

たとえば、次のような題材を取り上げていた。

<①の題材例>

- ・ ストーブをつけてからの時間と、室温
- ・ 水量と、沸騰するまでの時間
- ・ 水温と、氷1個がとける時間
- ・ シャープペンを押した回数と、出た芯の長さ など

<②の題材例>

- ・ 営団地下鉄のキロ数と、運賃
- ・ 赤信号の長さ、青信号の長さ
- ・ 吉祥寺駅における時刻と、乗車客数
- ・ 預けた年数と、貯金額 など

<③の題材例>

- ・ 新聞紙を折った回数と、その厚さ
- ・ 自分の年齢と、自分の年齢に対する親と自分の年齢差
- ・ ケーキを切った回数と、食べた量
- ・ 自然数と、それを2進法で表したときの1の数 など

生徒のレポートの1つを資料1に掲載する。

このレポート課題は、生徒にとって、必ずしも取り組みやすいものではなかったようである。実際レポートの中に「日常の事象の中から関数を見つけるというのは、結構難しい。何でも良いのだ、と思ってもなかなか見つけることができない」という記述も見られた。中には、教師の要求したようなレポートになっていないものも一部あった。

一方で、「(前略)関数は、このようなメカニズムの原理を解明したり、説明したりするのにいい道具であるということがわかった。特に、グラフはその原理を解釈するのに必要なものだと思った」のような記述も見られた。多数の生徒のレポートの内容から、この課題を通して、関数を学ぶ意義を実感できたものと考えられる。

7. まとめと今後の課題

関数を学ぶ意義を実感させるような指導のあり方を追及するために、まず関数指導の問題点を明らかにし、生徒が学ぶ意義を実感できない実態を探った。次に、関数を学ぶ意義を「変化する2つの量の関係を調べて、未知の部分を予測すること」ととらえて、そのことを実感させるためには、次のような点が重要であることを指摘した。

① 導入で、比例や1次関数以外にも様々な関数を扱うこと。

② 表作成、グラフ表示、関数予想、式表現、未知の部分の予測、という手順に基づく活動を取り入れること。

③ 特に、表をもとにして変化の特徴を調べる、という活動を積極的に取り入れること。

そして、「円の分割」や「ビデオテープの目盛り」等を素材にして、生徒に関数を学ぶ意義を実感させるような指導を実践した。授業中の生徒の反応やレポートの内容から、生徒は、関数を学ぶ意義を実感できたものと考えられる。

今後の課題としては、次の点があげられる。

ア. 関数を学ぶ意義を実感させるような教材をさらに開発し、実践する。

イ. 統計の内容を関数の指導の中に組み込んだ教材を開発する。

ウ. 関数のカリキュラムについて、見直しを検

討する.

イ. については, **6(2)**で報告したビデオテープの実践に関連する. ここでは2量の関係を2次関数で近似した. 他にも, 中2の1次関数の利用の学習場面で, 「桜の開花日と3月の平均気温」を1次関数で近似するという授業を行った. このとき, 関数の式を求める前の段階で, 2量に関係があるかないかを調べる活動が入るが, これは統計の「相関」に関する学習内容である. これらの統計の内容を, 関数の指導の中に積極的に取り入れることを検討してもよいのではないかと考える.

ウ. については, 容易にグラフの概形がわかるグラフ電卓等の機器の使用に関連する. 実際そのような実践報告も少なくない(西村圭一, 1998; 久保良宏, 1995). 現在の関数指導は, 関数の種類に応じて, 学年毎に指導することになっているが, 関数を学ぶ意義を実感させるには, 様々な関数を同時に扱う方がよい. 特に中学における関数指導について, カリキュラムの見直しを検討する時期にあるのではないかと考える.

注

1) 本校(筑波大学附属駒場中学校)では, 中学の各学年の内容を入れかえた独自のカリキュラムを実施している. 連立方程式と比例・反比例を入れかえたのは, 文字を未知数として扱う方程式を中1で扱い, 変数として扱う関数を中2で扱う, という考えに基づいている.

引用・参考文献

- 梶外志子. 1995. 「戦後50年, 関数の指導はどう変わったか」. 日本数学教育学会誌. 第77巻第6・7号. pp.56~59
- 古藤怜. 1991. 新・中学校数学指導実例講座4数量関係. 金子書房. pp.20
- 久保良宏他. 1995. 「中学校数学科におけるグラフ電卓利用の視点と授業例」. 日本数学教育学会誌. 第77巻第5号. pp.2~10
- 熊倉啓之. 2000. 「学ぶ意義を実感させる数学の指導に関する研究」. 日本数学教育学会誌. 第82巻第11号. pp.2~10
- 松寄昭雄他. 1999. 「数学的モデリングにおける理解深化に関する一考察」. 日本数学教育学会誌. 第81巻第3号.

pp.20~25

- 文部省.1998.中学校学習指導要領解説—数学編—.大阪書籍.
- 文部省.1999.高等学校学習指導要領解説—数学編—.実教出版.
- 森口繁一.2001.数理つれづれ.岩波書店.pp.53~57
- 西村圭一. 1998. 「CBL/CDAを利用した三角関数の指導に関する研究」. 日本数学教育学会誌. 第80巻第7号. pp.11~19
- 岡本和夫他.1997.数学II.実教出版.pp.26
- 杉山吉茂他.2002.新しい数学3.東京書籍.pp.137
- 田辺章子. 2000. 「問題理解を重視した楽しい数学の授業」. 日本数学教育学会誌. 第82巻第1号. pp.2~9
- 筑波大学附属駒場中・高等学校数学科. 1998. 「中・高6ヵ年における数学的能力の発達・変容の分析」. 筑波大学附属駒場中・高等学校研究報告第38集. pp.51~95
- 柳本哲. 1996. 「中学校における数学的モデリングについて」. 日本数学教育学会誌. 第78巻第5号. pp.2~9

資料1 生徒レポート (T.M.君)

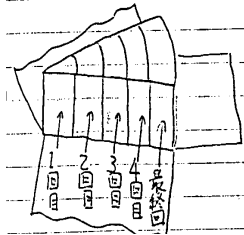
※ レポートの前文のみ打ち直した。

＜事象の中から関数を見つける＞

日常の事象の中から関数を見つけるというのは、結構むずかしい。べつに何でもよいのだ、と思っても、なかなか見つけることができない。

僕は関数を見つけることに疲れ、父の買ってきてくれたケーキを食べ始めた。すぐに食べ終わったが、僕はなぜか満腹感のようなものを感じていた。「むむむ、大して大きくなかったのになぜだ！」と1人悩んだ末、見つけた答えはこうだった。

僕は図のようにケーキをほぼ等間隔で1回ずつフォークを入れて切って食べていたのだ。そのため、食べる毎に大きな切れはしを食べることとなり、そのどんどん

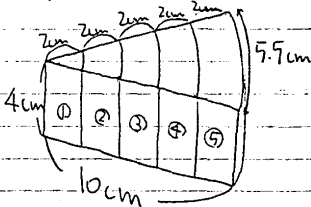


増えていくような感覚が僕を圧倒していたらしいのだ。(よく考えるとばかばかしい。)

それを知った僕はそれを関数化してやろうと考えた。前置きが長かったですが、以下からが本題です。

～ケーキと関数～

ケーキの寸法 & 食べ方



まず各回ごとの切れはしの体積を求める

① $5.5 \times \frac{1}{5} = 1.1$

底面積 $2 \times 1.1 \times \frac{1}{2} = 1.1 (\text{cm}^2)$

体積 $1.1 \times 4 = 4.4 (\text{cm}^3)$



② $\frac{2}{5} \times 2.2 \times \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{3}{5} = 13.2 (\text{cm}^3)$

③ $\frac{3}{5} \times 3.3 \times \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{2}{5} = 22 (\text{cm}^3)$

④ $\frac{4}{5} \times 4.4 \times \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{1}{5} = 30.8 (\text{cm}^3)$

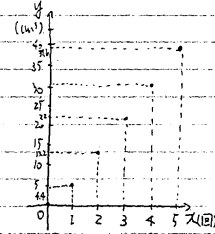
⑤ $5 \times 5.5 \times \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{0}{5} = 39.6 (\text{cm}^3)$

① 4.4 ② 13.2 ③ 22 ④ 30.8 ⑤ 39.6 $z (\text{cm}^3)$

回数を x 回、各回の体積を $y (\text{cm}^3)$ とすると、

$y = 4.4x$ という式ができる。

グラフ上に表すと……



1次関数であるが、整数回しかないので、直線が結ぶことはできない。

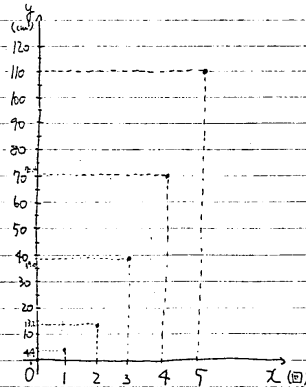
1次関数だけではつまずくので、今度は、各回の体積ではなく、その累積、つまり、各回を食べ終わった時点での腹の中に入ったケーキの体積を関数で表す。

0回目	①回目	②回目	③回目	④回目	⑤回目
0 (cm^3)	4.4 (cm^3)	13.2 (cm^3)	30.8 (cm^3)	70.4 (cm^3)	110 (cm^3)
(0+0)	(4+4.4)	(13+13.2)	(30+30.8)	(70+70.4)	(110+110)

回数を x 回、各回を終わった時点での腹の中に入ったケーキの体積を $y (\text{cm}^3)$ とすると

$y = 4.4x^2$ で表される。

グラフ上に表すと……



これは2次関数であるが、まっすぐに結ぶことはできない。

グラフに表すと、いかに急激に腹の中のケーキが増えていくかわかる。

(やはりこれが満腹感の原因とわかった)

※ このレポートでは、ケーキを食べるという日常の場面において、満腹感を感じることを理由を追求することをきっかけに、切った回数と食べた量(体積)の関係を調べている。学習した1次関数と2次関数が登場しており、このレポート課題を通して、関数を学ぶ意義を実感できたものと考えられる。