静岡大学教育学部附属教育実践総合センター紀要　No.9 p.31～56 (2003)

〈論文・実践報告〉

学び方図を活用した数学授業に関する実践的な研究
――Ｖｅｅ図と論文の活用に着目して――

A study on mathematical class and typical student's activities
through using Vee Diagram indicated how to learn,
aiming to harmonize using Vee Diagram with Doing Mathmatical Activity
－Paying attention to practical use of Vee Diagram and Mathematical Report－

土屋史人*・両角達男**
Fumito TSUCHIYA・Tatsuo MOROZUMI

1．はじめに

生徒個々が自身の抱いた問いに対する数学論文を書き、価値ある数学を創り出す授業をつくる、そうした数学授業を志向しようとしてきた。静岡大学附属静岡中学校数学科で継続的に研究が行われている、生徒が「数学する」数学の授業の実践である。

しかし、授業の中で討論を続けていくと、授業者として何を中心的な価値と捉え、その価値を見出すためにどのような手だてをとるべきなのか、どこに向かうべきなのか、価値ある数学的活動とは何なのか等々が見えにくくなってきた。生徒が「数学する」授業の形態　ー生徒個々に発生した問いを中核において展開する授業ー　をとることにより、授業における願いやねらいを改めて検討し直す必要が生じた。すなわち、数学教師としての授業観、数学観、価値観が改めて問われ、明確なものを持つ必要を感じるようになった。

生徒も同様な思いであろう。例えば、討論の中で意見を言わなかった生徒は、どのような思いで数学する授業に参加し、どのような数学を自分の中でつくり上げているのだろうか。そして、どのように理解が深まり、数学に対する価値意識を持ったのだろうか。同じようなことは、生徒が「数学する」授業の形態をとらない場合でもいえるのかもしれない。しかし、生徒が「数学する」授業の形態を継続的にとることにより、生徒個々のつくる数学観、理解観、価値観などにも強い関心を抱くようになってきた。

教師主導型の数学授業を脱皮し、生徒個々の「問い」の発生のプロセスや「問い」を活かした授業展開を目指せば目指すほど、授業者の力量が問われていく。そのことをいくつかの授業実践を通して、強く感じるようになった。

一方、筆者は、Gowinらの開発したVee図（以下Ｖ図と略記）や概念地図を活用した数学授業のあり方について、現在まで岡本と継続的に研究を進めてきている。例えば、V図では価値主張、世界観など、主体の価値意識や意図が強く問われ、その図を作成することによって意識づけられていく。Ｖ図を活用した数学授業の中に、生徒が「数学する」授業を実践する上で

＊附属静岡中学校教諭　＊＊教育学部数学教育助教授

感じていた価値観や数学観などの欠如を克服する糸口があるのではなかろうか。すなわち、V図の活用と生徒が数学する授業とをうまく融合することにより、両者のよさが止揚し、教師に対してはしっかりとした授業観や数学観を形成し、生徒に対しては豊かで奥行きのある理解観や価値観を抱くのではないかと考える。

2．研究の目的と方法

本研究では、V図を活用した数学授業と生徒が数学する数学授業との融合と止揚について、双方の活動を織り込んだ一連の授業を実践し、その学習効果から考察することを目的とする。具体的には、中学１年の１次方程式の単元に焦点をあて、生徒個々に自身の「学びのプロセス」を強く意識づけるV図作成を節目ごとに織り込みながら、生徒個々の問いの発生、問いに対する考察を記述する数学論文作成などの「数学する」活動を行う。そのため、一連の授業の中で生じた特徴的な討論、生徒が作成した特徴的なV図の記述のあり方や変容の仕方に着目し、討論や記述にみられる価値観や数学観形成の活動　－内省的な活動－　を考察する方法をとる。以上の考察から、現段階での課題も明らかにしていく。

3．生徒が「数学する」数学授業について

附属静岡中学校数学科で継続的に行われている生徒が「数学する」授業とは、生徒個々の問いの発生とその問いを基に学びを進める「自ら数学を創りあげていく活動である」である。生徒の学習活動の形で述べれば、次の（ア）～（ウ）である。

（岡本，1998a，1998b，1998c，1999，　静岡大学教育学部附属中学校教育研究協議会・数学科研究発表資料，1998～2002）

（ア）　生徒のそれまでの経験や既有知識をもとに、事象の中に疑問を見つけだし、自分の「問い」を創る活動

（イ）　「問い」の解決に見通しをもち、見通しにそって各自の論を進め、得られた結果に「矛盾がないか」を吟味する活動

（ウ）　得られた結果から新たな疑問を見いだし、新たな「問い」を創る活動

また、授業者として、授業を構成していく段階で述べれば、次の(ａ)～(ｄ)の段階になる。

（ａ）　基本となる内容を概観する段階

（ｂ）　生徒が自分の「問い」をもつ段階

（ｃ）　「問い」を追究し、価値ある数学を創りあげる段階

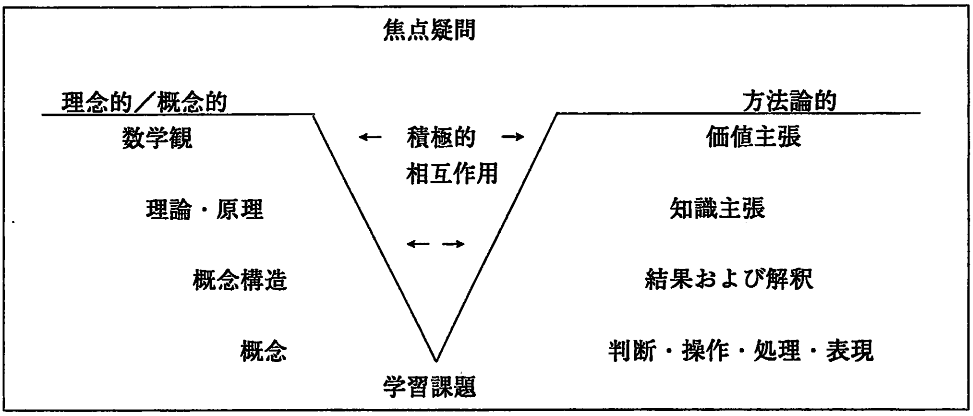
（ｄ）　新たな「問い」を見いだしていく段階

「概観→問いの形成→問いの追求→新たな問いの形成」という節目を経ていく学習過程である。この授業観の背景には問いの形成や追求を手がかりに、学びの共同体や資源などに学習者個々が参加していく協同学習理論がある。

4．V図を活用した数学授業について

Gowinらは主に理科の授業での活用した例をあげ、V図の学習効果や学習指導上での有効性を実証的に示してきている（1984，1992，1994）。しかし、Gowinらは、数学授業での実証的な活用についてほとんど言及していないし、事例をほとんど見出すことができない。

岡本・土屋（2000）は次の５つの観点のもと、「数学教育のための変形Ｖ図」を提案した。
「１．Ｖ図は、毎日の授業で手軽に使っていけるものであること
　２．Ｖ図は、問題解決的な形態をとる数学学習に使いやすく、かつ学習の意図、目的を明確にするのに役立つものであること
　３．Ｖ図は、知識の構造及び知識の構築過程のメタ認知に役立つものであること
　４．Ｖ図は、概念地図と併用しつつ、ディスカッションを有効に使えるものであること
　５．Ｖ図は、望ましい数学学習観の形成に役立つものであること」



このＶ図には、Ｖの字の右側に方法論的、具体的な行為に関わる言明や行為を起こす原動力となる言明が入る。１次方程式で考えれば、Ｖの字の右下の方には、例えば２ｘ－３＝５を解く手順などが入る。結果および解釈としては、等式の性質により同値変形が保障されていること、同値変形により得られた個々の式がすべて同一の解をもつこと、などが入る。Ｖの右上にある価値主張では、方程式を解く作業を起こす原動力にあたる言明として「未知の数量があっても、その数量に関する条件が方程式で表現できるならば、一定の手順に従って式変形することにより、その値を求めることができる」（岡本・土屋，2000）などが入る。
一方、Ｖの字の左側には理論的／概念的、あるいは思考に関わる言明が入る。例えば、一次方程式の解法に関わる数学観としては、「数学は、一定の条件を満たすならば、どんな場合でも確実に解決できる方法を考え出そうとする」（岡本・土屋，2000）などが入る。

なお、Ｖ図に登場することばの意味を生徒の学習進行を意識して述べると、次のようになる。ただし、実際の学習活動では、Ｖの字の左右を行き来しながら、徐々に下から上の方に移行していく。また、教師から発せられる学習課題が起点となることもあれば、前の授業からの焦点疑問が授業の起点になることもある。
○焦　点　疑　問･･･２つの領域（理念的／概念的，方法論的）の活動を創始するもの
　　　　　　　　　理論に埋め込まれているか、または理論によって生起するもの
　　　　　　　　　学習主体に対して、対象への注意を焦点化するもの
　　　　　　　　　（例：方程式はどのようにして解けばよいのだろう）

○学　習　課　題・・・焦点疑問を通して具体化された場、問題場面
○概　　　　　念・・・学習課題を解決する上で必要な事柄
○操作・処理・表現・・・学習課題を解決する手だて，方法
○結果及び価値主張・・・課題を解決して得られた結果、それに対する解釈
○概　念　構　造・・・学習課題を解決する上で必要な事柄の関連図（概念地図など）
○知　識　主　張・・・学習課題を解決し、より一般的にいえる事柄や教訓
○価　値　主　張・・・学習課題の解決過程を通して、私にとってのよさを意識し述べること
○数　　学　　観・・・学習過程を振り返り、私の数学の観方や捉え方を意識し述べること

教師の視点、生徒の視点に立ってＶ図の特徴を述べれば、次のようになる。

○教師の視点からみたＶ図の特徴

（ａ）　Ｖ図の上部には一連の授業を通して獲得させたい「授業のねがい」が位置づけられ、その授業のねがいを徐々に具体化させていくものとして、一時間単位の「授業のねらい」がより下部の方に位置づけられる。

（ｂ）　一連の授業は、焦点疑問や学習課題を起点にスタートしていくため、数時間で一つの流れを創り出すテーマ性をもったＶ図全体の形成、大きな流れを産み出すようなよい焦点疑問や学習課題の設定が必要となる。

（ｃ）　あらかじめ教師がＶ図を作成しておくことにより、題材観、数学観、価値観などを自分なりに明確にしておくことができる。また、Ｖ図に記述される数学観、価値主張、理論原理などは、授業の進行をしていく上で指標となるものであり、授業の中での評価（意志決定）のために必要不可欠なものとなる。

○生徒の視点からみたＶ図の特徴

（ア）　Ｖ図の最下部にある「学習課題」からスタートして、授業のやりとりの中で「何を明らかにしたいのか」という「焦点疑問」が明確になっていく。または、前の授業の流れの中で生じた「焦点疑問」を詳しく解明するために、「学習課題」を設定する。その焦点疑問や学習課題を解決するため、既有の概念などを用いて自分なりに考察を進めていく。このように、生徒の学習はＶ図の下部の方から上部の方に進んでいく。上記（a）とは逆の方向性を持つ。

（イ）　それぞれの授業時間で解明したい焦点疑問は、徐々に理論・原理、数学観、価値主張に関わるような、数時間の授業全体を鳥瞰したものに変容していく。

（ウ）　一連の授業の節目ごとにＶ図に、自分の考えを「書き加えていく」ことにより、自分の思考の移り変わりをみることができる。また、一連の授業の中で知った「他者の考えや価値観」なども書き加えることにより、重層感あふれるものができあがる。その結果得られる成就感、新たな焦点疑問などは、内発的な動機付けを生徒に起こす。

端的に述べれば、次のようになる。

○教師の側　・・・　授業のねがい・ねらいの明確化，テーマ性を持つこと、意志決定の指標
○生徒の側　・・・　方向性のある学習、焦点疑問の変容（本質への追究）、内省的な記述としての効果

5．生徒が「数学する」活動とＶ図の活用を融合した授業構想　－１次方程式の単元－

生徒が「数学する」数学授業の大まかな流れは、次の通りである。

ａ．内容の概観　→　ｂ．問いの形成　→　ｃ．問いの追求　→　ｄ．新たな問いの形成

Ｖ図を活用した数学授業の大まかな流れは、次の通りである。

ａ'．焦点疑問あるいは学習課題の明確化
→　ｂ'．解決過程をＶ図の中に位置づけること
→　ｃ'．Ｖ図上部の記述による新たな焦点疑問の形成
→　ｄ'．一連の授業を鳥瞰したＶ図の作成

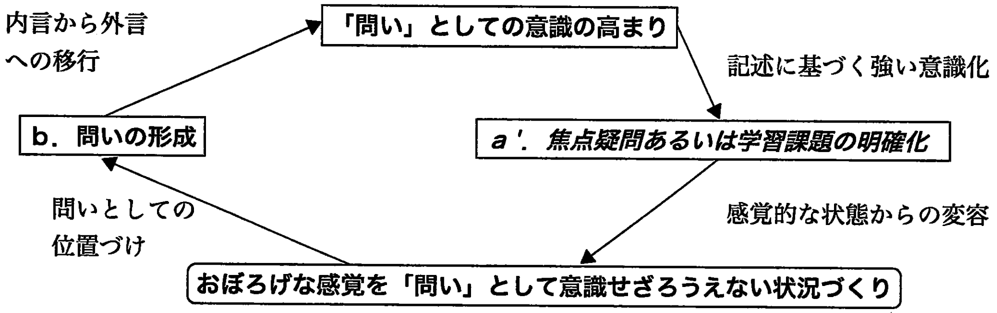
この両者の授業の系列を、次のように融合させて実践しようとした。

ａ．内容の概観　→　ｂ．問いの形成
→　*ａ'．焦点疑問あるいは学習課題の明確化　（ｂとａ'はほぼ同時）*
→　ｃ．問いの追求　（個人での追求，全体での協議と追求）
→　*ｂ'．解決過程をＶ図の中に位置づけること*
→　*ｃ'．Ｖ図上部の記述による新たな焦点疑問の形成*
→　ｄ．新たな問いの形成
→　ａ'～ｄのサイクリックな活動
→　*ｄ'．一連の授業を鳥瞰したＶ図の作成*

生徒が「数学する」数学授業の系列の中で、生徒個々が自らの「問い」を強く意識する段階、生徒個々が自らの「解決過程」を強く意識し、その活動をふりかえって捉える段階にＶ図の活用を位置づけようとした。自らの「問い」の意識のためには、それまでの生徒自身の既有の知識体系との比較対照が必要不可欠である。内容の概観を通して感じた「本当かな？」「不思議だなあ？」「すごいなあ」ということばで語れる感性を、より焦点化するためにＶ図の形成が役立つと考えた。なお、「ｂ．問いの形成」と「ａ'．焦点疑問あるいは学習課題の明確化」は、ほぼ同時的に行われるのではなかろうか。内容の概観から始まる授業の流れの中で、「本当かな？」などの思いが高まれば、その生徒にとっては疑問が焦点化されている。すなわち、問いの形成を促進するものとして、Ｖ図の「焦点課題」や「学習課題」の記入が関わる。

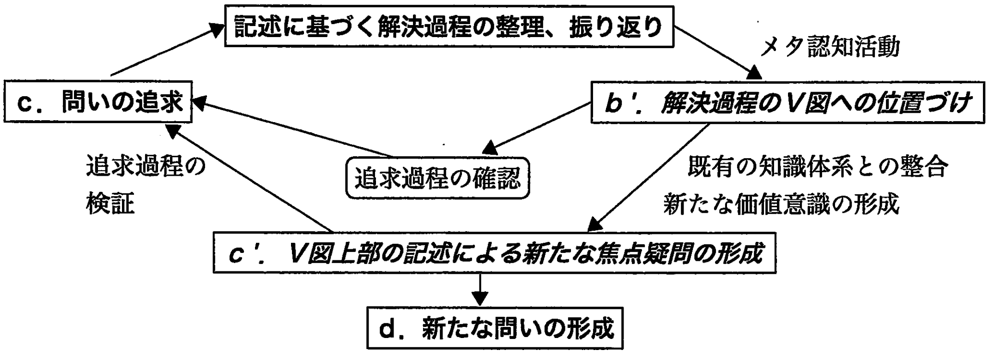
一方、内容の概観からの授業の流れの中で、今ひとつ「問い」が焦点化されない生徒にとっては、Ｖ図への記述を促されることのより、焦点化せざろう得ない状況が起きてくる。

○「問い」の形成　の過程での関連



また、生徒が自らの解決過程を振り返り、既有の知識体系との整合性を図ったり、新たな問いを形成する原動力を得る部分には、生徒が「数学する」活動とV図の活用が次のように関連している。

○　解決過程を振り返り、新たな活動の源となる過程での関連



「c．問いの追求」で生徒個人が行ったこと、他者との協議や他者の考えとの比較のもとに生じた考えなどを反省的に振り返ることにより、初期の焦点疑問や学習課題の解決から得られることがら（原理、数学観、価値意識）などが学習者なりに明確になってくる。また、V図の記述を通して、自分自身の追求の仕方が本当によかったのか、その意味は何だったのかなどの意識が出てこよう。上の図式では、追求過程の確認、追求過程の検証などのことばで、その辺りの学習者の活動を表現した。学習者が、サイクリックに自分の追求過程を振り返り、その意味を反省的に捉えることは、新たな焦点疑問の形成につながっていくのではなかろうか。

こうした活動を支えることは「記述をすること」であり、文章などで学習者自身が客観的に語ろうとすることにより、振り返ること、追求過程のプロセスを分節すること、追求過程の意味を自分なりに考えること、既知と新しいことの区別をすることなどが行われていく。

以上のことより、中学1年「1次方程式」の単元において、次のような授業を想定した。

単元を概観する授業
↓算術的な解法と方程式による解法との比較，紹介
明らかにしておきたいことを「疑問」として各自が書き上げること
↓疑問集の作成，他者のもつ疑問を知ること
「明らかにしたい疑問」の焦点化← →V図の「焦点疑問」の意識
↓授業の中での話し合い，教師の意図，生徒の雰囲気
今日の問題
↓
解決← →「大切な言葉」の抽出
↓V図「概念」「判断・操作・処理・表現」の意識
答とその意味← →マップ（概念地図）の作成,
↓V図「概念構造」「結果および解釈」の意識
答えからいえること← →もとになる重要な考えや方法の抽出
↓V図「結果および解釈」「知識主張」の意識
数学としてのよさ← →「数学」って何だろう
↓V図「数学観」「価値主張」の意識とV図の作成
さらに調べたいことや新たな疑問の形成

単元を概観する授業としては、次の問題を基点にして算術的な解法と方程式による解法を比較させること、方程式による解法の簡潔さ、思考の省略化などのよさを感じさせようとした。

【問題】２種類のお茶A，Bがある。それぞれの原価は、Aが100ｇで500円、Bは100ｇで700円。この２種類のお茶をブレンドして、100ｇで1000円の銘茶「土屋茶」をつくって売りたい。このとき、320円の利益をあげるようにするためには、A，Bのお茶のブレンド比率をいくらでブレンドすればよいか。

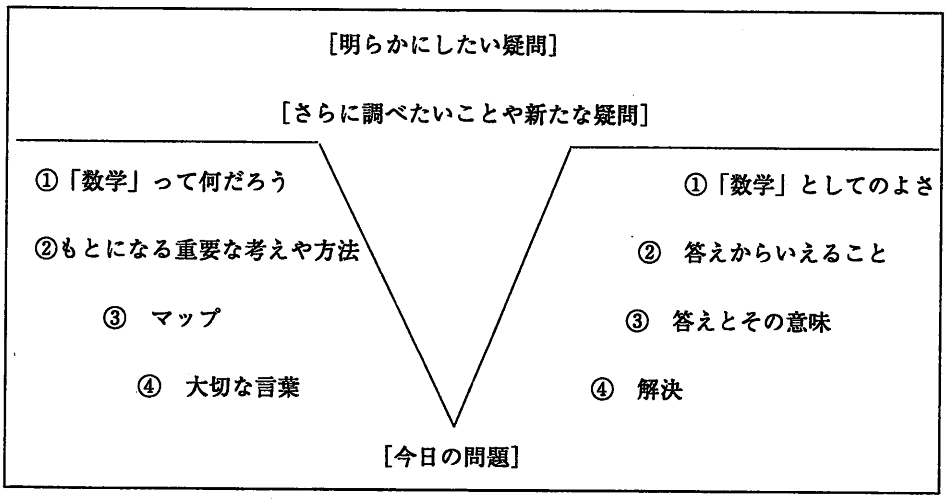
この問題の解決を通して生じる疑問を「論文のテーマ」として、生徒に文章化させる。
学級全体の「論文のテーマ」集（疑問集）を鑑賞しあい、その中から共通に解決していきたい疑問、すなわち「明らかにしたい疑問」を焦点化する。その明らかにしたい疑問と教師の意図が加味されたところに「今日の問題」が創られていく。

この辺りまでは、「a．内容の概観→b．問いの形成」という「生徒が数学する」数学授業の系列をとっている。V図の活用を強く意識するのは、次の点である。

○今日の問題や明らかにしたい疑問を解明していく中で、「大切な言葉」と思われる事柄をキーワードとしてあげていく。また、授業の中で「大切な言葉」を確認していく。
○解決ができたところで、解や解を導くプロセスについて、振り返りマップ（概念地図）を作成する。
○生徒が自分のつくったマップと、他者のつくったマップを比較しあうことにより、その時点での「数学としてのよさ」という数学観や「数学って何だろう」という価値主張を行う。この段階で、本格的なV図の作成を行う。

すなわち、解決過程を振り返り、新たな活動の源となる過程でのV図の活用である。

実際に生徒には、次のような「わかりやすい言葉」にかみ砕いた図をプリントとして渡し、節目ごとに記入をさせていた。(岡本・土屋，2000，pp.64)



教師側が１次方程式の一連の授業を行う上で作成したＶ図は、**（資料１）**の通りである。
例えば、１次方程式の授業を通して生徒に身につけさせたい数学観として、次のことを挙げた。

［数学観（数学って何だろう）］

（ア） 数学の記号にはいろいろな意味がある → 記号化の仕組みを知ること

（イ） 数学とはいろいろなものを省いて、なるべく簡単にする学問なんだ
→ 省略化、簡潔性を意識すること

（ウ） 数学は、確実に解決できる方法を考え出そうとするんだなあ → 確実性の意識

（エ） 等式の性質という当たり前のことを性質として認め合うことがあるんだ
→ 前提条件の意識、協定を図ること

（オ） 数学とは条件を追求する学問なんだなあ → 整理して思考することの必要性

（カ） どういう条件があるか明らかにして、それを数値化して式で表せたらとってもいい。どうやったら、どういう状況を式で表せるかを考えるのが数学なんだなあ。
→ 式に表す、式を読むことのよさを知ること

（資料１）は、Ｖ図のもつ「授業のねがい・ねらいの明確化，テーマ性を持つこと、授業の中での意志決定の指標」という教師側の特徴を加味したものである。しかし、生徒が数学する授業では、次のような問題が生じる。

① 生徒個々の問題意識に基づく「多様な」数学論文に対して、どのようにつながりをつけていけばよいのか。

② 「多様な」数学論文に対して、つながりを導く観方、即ち生徒同士に共有される思いは何か。

生徒が数学する数学授業では、教師の意図するような単線型で進むことはまれである。
生徒の作成した数学論文、生徒間の解釈や議論によって、複線型で進むことがほとんどである。
そこで、上記の問題に対して次のように捉え、**（資料２）**のような授業構想図を考えた。

②→多様な数学論文に対して、つながりを導く観方は、Ｖ図上部に書かれる数学観や価値主張である。Ｖ図上部に挙げた数学観や価値主張がしっかりとしていれば、多様な数学論文に対して、論文同士の関連を見出すことができる。

生徒にとっては、複数の論文を比較してその異同を検討することにより、数学観や価値主張をつくっていくことができる。

①→Ｖ図の上部で挙げた数学観や価値主張を基に、あらかじめ想定される数学論文どうしのグループをつくっておくと、イメージ豊かに授業に望むことができる。

ただし、実際の授業進行と同時に、フレキシブルに**（資料２）**のグルーピングは変更できるようにしておく。

以上のように、**（資料１）**のＶ図、数学論文どうしのつながりを意識した授業構想図**（資料２）**の双方をあらかじめ作成し、１次方程式の授業を行っていった。

６．授業構想図を基にした「１次方程式」の授業実践

６－１．１次方程式の授業の概略

１次方程式の授業の概略は、次の図式の通りである。

単元を概観すること

○お茶のブレンドの仕方を考える問題
　→算術的な解法（試行錯誤、見当づけ、面積図の活用、式の活用、表の活用など）
　方程式による解法の提示と比較
○「つりあう」ことに関する議論
　→つりあう状態と上皿てんびんのイメージとの関連
　→上皿てんびんで「つりあう」問題場面を互いにつくり、その問題を解き合うこと

↓

自分の「問い」をもつこと

○方程式に関する情報をある程度収集してから、自分の「問い」を形成すること

↓

「問い」に基づく数学論文づくり

○生徒個々が、自分の「問い」をもとに数学論文を創っていくこと

↓

班で数学論文を紹介しあい、討論すること

○他者の数学論文を知ること
　自分の数学論文と比較すること

↓

班で話題になったことの発表,「問い」の共有化・焦点化

数学論文が基調にある活動

↓

討論１　等式は両辺に同じことをするならば、何をやってもいい

数学論文に基づく討論と討論後のＶ図への記入

（討論２～討論５でも同様）

↓

討論２　等式の両辺に同じ数をかけてもいいとなっているが、同じ式をかけてもいいのか

↓

討論３　求める数が２つある場合、答えは本当に出ないのか

↓

討論４　移項するとなぜ、符号が変わるのか

↓

討論５　方程式さえあれば、何でもできるか

↓

討論６　数学としてのよさは何だろう

一連の討論を経たＶ図への記入
振り返りの活動

一連の授業の動きを、（資料２）に位置づけると次のように表せる。（詳細部分は省略）

数学って何だろう　･･･　数学観や価値主張の形成　討論６

↑

方程式のよさって何だろう　･･･　討論６

↑ ↑ ↑ ↑

図に表せない方程式をどうやって解いたらよいか	新しい等式の性質をつくろう …討論1,討論2 討論3	移項って何だろう…討論４	算数と方程式とはどういう関係か …討論５

数学論文どうしのつながりを意識した構造図（**資料２**）の左下から、ゆったりと迂回して進むような状況となる。また、討論３では、生徒の作成した数学論文の中に２元１次方程式に言及したものがあり、「求める数が２つある場合、答えは本当に出ないのか」という問いが生じた。これは、授業者の意図していなかったものであるが、授業の流れとしては自然な形で生じていた。

この一連の授業の系列のうち、生徒個々の作成した数学論文が討論の中で大きな役目を果たす討論１、討論２、討論３、およびＶ図の活用が討論の中で大きな役目を果たす討論６について述べていく。（討論４については（**資料３**）を参照のこと）

６－２．討論１「等式は、両辺に同じことをするなら何をやってもいい」について

Ｔは自身の論文「等式は、両辺に同じことをするなら何をやってもいい」を発表した。その論文の中には、両辺に同じ数を足したり、ひいたり、かけたり、割ったりするなら、何をやっても等号の関係は変わらないという、等式の性質が４つ出ていた。

そのＴの発表に対して、「何をやってもいい」という点が討論の論点となる。

「何をやっても許されるのか」という意見に対し、Ｍが「今まで習ってきたことをめちゃくちゃにしてはいけない。今まで習ってきたことと、矛盾が出てこなければ、何をやってもいい」という意見を主張した。その意見に生徒達は納得した様子であった。

授業者は、「矛盾があるかないかで、議論を判断しよう。矛盾がないような世界を創っていこう」と述べ、「何をやってもいい」の議論は収束したようにみえた。

しかし、続いて「０をかけること・０でわること」が議論の遡上にのぼる。０に関わる議論の中で、Ｔは「何をやってもいい」という言明を「何をやっても**つりあう**」という表現に帰ることを提案する。

まとめると、討論１では次のような議論が行われた。

（ア）「何をやってもいい」ことの妥当性に対する議論

（イ）等式の性質の意識化

（ウ）無矛盾の追求

（エ）０を意識したときに適応可能かどうかの議論

（オ）「何をやってもいい」という曖昧な表現から、一般化を意識した「つりあう」とい

う表現への移行

（カ）「つりあう」ことの意味の追求

・・・等式の両辺に同じ数をかけてもつりあうのか

（キ）「つりあう」ことの意味の拡がり

・・・等式の両辺に同じ式をかけてもつりあうのか　（討論２）

なお、「何をやってもいい」,「０をかけること・０でわること」への着目は、生徒の数学論文に記載された言葉がもとになっている。そうした記載への着目が、等式の性質をより正確に述べる言明へ、一般化を意図した言明へと生徒の関心を高めていた。

６－３．討論２「等式の両辺に同じ数をかけてもいいとなっているが、同じ式をかけてもいいのか」について

等式の両辺に同じ式をかけてもいいのか、という新たな問い（共有化された問い）について、次の２通りの意見が対立した。

（否定派）等式の両辺に同じ数をかけた場合には等号の関係が成り立つ。しかし、等式の両辺に同じ式をかけた場合には、答えが変わってきてしまう。または、答えが出せない方程式ができてしまうことがある。それゆえ、等式の両辺に同じ式をかけてはいけない。

（肯定派）等式の両辺に同じ数をかけるのと同じように、同じ式をかけても等号の関係は成り立つ。

同じ数という部分を「同じ式」に変換することにより、予想以上に多くの生徒が（否定派）となっていた。その論拠として、「答えが変わる」「答えが出せない」という方程式の解に依拠した理由を挙げるところに特徴がある。討論２における特徴的なやりとりを抽出すると、次のようになる。

【討論２における（肯定派）と（否定派）のやりとり】

Ｓ：「$2x=5$をつくり、両辺に（３－４）をかける。結局$x=5/2$となるから、両辺に同じ式を書けてもいい。」　（肯定派）

Ｄ：「（３－４）は、式であり、数である。つまり、数をかけているのと同じだから、教科書の記述の方が正しい。」　（肯定派）

Ｉ：「数にならない（$3-x$）をかけたらどうか、やってみた。$11x-2x^2=15$となり、２次になって答が出せなくなる。答が出てこないときがあるから、式をかけてはだめだ。」　（否定派）

Ｔ：「$11x-2x^2=15$は解ける。因数分解を使って。だから、式をかけてもいい。」　（肯定派）

教師：「因数分解は、まだみんなが知らないこと。できるかもしれないけど、今は答を出すことができない。でも、$11x-2x^2=15$はつりあっている。式をかけてもいいの？」（議論の整理，方向付け）

Ｍ：「両辺に式（４－４）をかけると、$2x(4-4)=5x(4-4)$となり$0=0$となって、変になる。ｘがなくなっちゃう。だから、式をかけてはいけない。」　（否定派）

Ａ：「×（４－４）は×０と同じ。だから、数だからこれは０を無理やり、（４－４）の形にしているだけで、式をかけてはだめ、という理由になってはいない。」　（肯定派）

M：「例外があるから、やっぱりだめだと思う。」　（否定派）

教師：「前時でやったように、0をかけてもいいんだよね。」　（既習事項との関連づけ）

I：「2x＝5に式（3－2）をたすと、2x＋（3－2）＝5＋（3－2）

たしても、ひいてもかっこはいらないけど、かけるとかっこがつく。

2x×（3－2）＝5×（3－2）かっこは1つの数量だから数。（3－x）も数である。だから、両辺にかけてもいい。」　（肯定派）

K：「かけた式によって、答が変わってきてしまうので、これは矛盾ではないか。

2x＝5	**2x＝5**
2x（3－4）＝5×(3－4)	**2x（4－4）＝5×(4－4)**
x＝5／2	**0＝0**

このように矛盾が起こるから、式をかけてはだめだ。」（否定派）

T：「今、考えていることは、両辺に同じことをするなら何をやってもつりあうか。

で、答は違ってきているけど、両辺はつりあっているからいいじゃないか。つりあうことに、矛盾は生じていない。」　（肯定派）

K：「式の中で、答が出ちゃうもの　×（3－4）と、式の中では答が出ないもの

×（3－x）がある。今、答が出ないから、式をかけてはいけない。」　（否定派）

A：「最終的には答が出るということで、2x＝5は、方程式。0＝0は恒等式。この恒等式が等式だったら、つりあっているといえる。」　（肯定派）

教師：「0＝0は等式っていっていい？」

全員：「いい」

Y：「つりあっているから、等式だ。」

M：「すべて答が出ないといけない。答が出ることも、等式の性質の重要な条件だ」

T：「11x－2x²＝15は解ける。因数分解なんて使わないで、解ける。

11－2x＝15／x

11＝15／x＋2x

11／15＝x＋2x／15

11＝x＋2x

3x＝11

x＝11／3

O：「おかしい。11／15＝1／x＋2x／15　じゃないの」

T：「ほんとうだ」

I：「xじゃなくて、aだったら、答が出ないんじゃないか。例えば、×（3－a）のとき。」　（否定派）

M：「もし、ax＝6だったら、aには、いろいろな数が入るから、xには、いろいろな答が出てしまう。aにしても、どっちみちxの答は出てこない。だから、式をかけてはいけない。」　（否定派）

この議論では、否定派のMの意見が次のように変遷していることが特徴的である。

（ア）　方程式を同値変形により解くことと、方程式の両辺に0をかけることに伴う「通常の方程式を解く作業ができなくなること」との不整合

（イ） ０をかけることの特殊性から、例外があるため命題（同じ式をかけても等号の関係が変わらない）不成立という考え

（ウ） 方程式の解はただ一つという信念から、複数の解をもつ方程式の存在があるから命題不成立という考え

式の形を変えることから、方程式の解の個数への着目、に論拠を移してきている。その変遷には、Ｍの意見を受けて補強するＫの存在、方程式と恒等式の違いを指摘するＡの意見、およびＡの意見を授業の流れの中に再度位置づけようとする教師の発話（０＝０は等式っていっていい？，Revoicing)、肯定派に流れそうな雰囲気を何とか引き戻そうとするＩの意見などが、巧みに関わってきている。

Ｍの「もし、ａｘ＝６だったら、ａには、いろいろな数が入るから･･･」という意見に対して、「文字が２種類だったら本当に答えが出るのか」という共有される問いが生まれてくる。

こうした動きの中で、Ｎの数学論文「求める数が２つある場合、方程式は成り立つのか」にスポットがあたっていく。

Ｎによる論文の説明･･･15ｘ＋10ｙ＝2100の場合、ｘやｙに数をあてはめると、いくつも答が出て１つに定まらない。１つの式では、答が求まらない。
ここでｙに条件を付け加える。その条件は　ｙ＝ｘ－30。
その条件を付け加えると15ｘ＋10（ｘ－30）＝2100となり、ｘ＝96がわかる。結局、１つの式で２つのわからないものを求めるのは無理。ｙに条件を付け加えたときのみ、答が１つに決まる。

このＮの数学論文の説明を起点に、討論３のステージに移行していく。討論２の結論は、討論３の中で（肯定派）の考えに収束していく。

６－４．討論３「求める数が２つある場合、答は本当に出ないのか」について

方程式の中に２つ文字がある場合、即ち求める数が２つある場合は、答が決まらないということは、Ｎの数学論文の説明の後、皆納得したと思われた。しかし、討論２の結論が出ていないこと、（否定派）のＭの論拠を論駁したことに今ひとつなっていなかった。そこで、討論２の結論を出す手がかりを増やすために、等式の性質を新しく創ろうとしていた生徒が２人いたため、彼らにその論文を説明させる。

Ｏによる論文の説明･･･等式の５つ目の性質として、両辺を２乗するとどうかなということをやってみた。$(x+2)=2$　$(x+2)^2=4$　$x^2+4=4$
あれ、わからなくなっちゃった。

結局、自分で説明してわからなくなってしまい、Ｏはそのままになる。

Ｏは、$(x+2)^2=x^2+4$と一般化させようとしたところに「そのまま」の原因がある。

このＯの意見に対しては、深入りすることなく、次のような発問を通して討論２の収束を図ろうとした。

教師：「等式の両辺に式をかけてもいいのか、に戻ろう。もう１度教科書を見て。等式の性質は、てんびんなんだ。つりあうか、つりあわないかを問題にしているのが等式の性質な

んだ。等式の両辺に式をかけてもいい？」
H：「式をかける必要がないから、かいていなかったんだけだと思う。」
I：「この前いったように、（3－x）を式と見ないで、1つの数量だから数なんだ。そう考えると、式をかけるとかいてなくても、矛盾が生じない。」

授業では、このIの意見に討論2の結論を見出すこととなる。（3－x）を式と捉える見方、そして文字xを数の代表とみて「1つの数量」と捉える見方、文字式の見方の拡がりを確認し、等式の性質の意味を掘り下げていくこととした。授業者としては、討論3を経て、討論2の議論が収束したようにみえる。しかし、Mの思考が納得いくものに変容したか否かに関して、詳細な分析が必要といえる。

また、討論2と討論3は、数学論文をつくることによって議論の深まりをみせた。

6－5．討論6「数学としてのよさは何だろう」について

議論が進むにつれ、方程式のよさについての生徒なりの思いが共有されつつあった。

例えば、（資料4）における生徒AのV図では、数学としてのよさが次のように記述されている。この生徒は、授業の中で積極的に発言をしようとしないが、他者の考えをよく聞き、自分なりの解釈している様子がみえる。

（ア） 方程式があればどんな問題でも解けちゃいそうな気がする。
（イ） 同じ式を両辺にかけても良いのか。
式をかける必要自体がないのではないか。xの値を出す上で必要がない。
必要がないことをするな!!
（ウ） 必要性はないけど、見方によってはどうにでもなる。
（エ） 等式の性質があることを、小学校ではわからなかった「なぜ？」までもわかってしまうぞ。すごいぞ、性質。
（オ） xというのは、求めたい数（答え）を表すもので、それを使うことでどんなに今までむずかしかった問題も、どうしてそうなるか、考え方を表しながら解けるのが方程式だ。

生徒Aの洞察が徐々に深まってきている様子がみえる。

また、授業を経るごとに、「数学としてのよさ」に記述する分量が増え、その内容も方程式をできる限り異なる観方でとらえようとしている。さらに、算数で学んだこととの異同にも着目するようになってきている。

生徒個々の「方程式のよさ」や「数学としてのよさ」などの意識が高まっていると判断し、V図を前面に打ち出した授業を行っていった。今までの学習活動の振りかえりを促進する反省的活動である。さらに自分の思考過程をたどる内省的な活動であり、価値の追求である。

具体的には、次のような指示をしていった。

○自分のV図に今まで書き足してきた「数学としてのよさ」の部分をもう1度読み返す。
今までの記述をまとめると共に、他者への伝達を念頭に、最も主張したいよさを文章で書く。もし、すでに書かれているもので最も主張したいものがあれば、赤い枠で囲む。

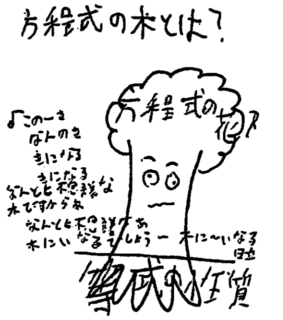
○「数学としてのよさ」に対する自分の考えが整理できたところ、班ごとに自分の考えを発表する。
○班ごと、話題になったことをまとめる。
○班で話題になったことの共有化、すなわち全体での代表者による発表を行う。

以下は、各班ごとの「方程式のよさ（数学としてのよさ)」である。

（1班）方程式は、式の中に入っている、わからない数を出せる。でも、算数でやった○や□でも、わからない数を出せるではないか。○や□は文字ではないのか。

（2班）移項は、いろいろな見方があっておもしろかった。移項のもとは、等式の性質であることがわかった。

（3班）方程式は木である。
根っこに等式の性質があって、
根をもとに大きくなっていく。



（4班）つりあいという関係があるからこそ、矛盾なく成り立っている。算数での疑問を数学で、メカニズムを明らかにし、世界を広げていくことだ。

（5班）方程式は、そのまま表せて、矛盾のない自分の考えを創っていける。数学の世界が広がったということが話題になり、それは、どういうことかを議論した。今までの表し方から、表す方法が増えた。算数でのたくさんの式が、方程式では、たった1つである。

（6班）式を立てると、関係がわかる。

（7班）「矛盾がない」がキーワードだった。

（8班）1班と同じように、方程式は、わからない数を出せる。また、6班のように、方程式を立てると、仕組みや関係がわかるということから、私たちは、数学の世界が広がったと判断した。

（1班）から（8班）の「方程式のよさ（数学としてのよさ)」を特徴づける言葉は、討論1から討論5の中で話題になった「移項、つりあい、矛盾がない、関係がわかる」などである。興味深い見方は、（3班）の方程式を「木」というメタファーで捉えているところである。次のやりとりのTの発言にみられるように、他者の意見から「木」から「茎、花」という類推をしていく点は、生徒の思考の柔軟さやセンスのよさを感じる。

【方程式を「木」と捉える考えに関わる意見のやりとり】

教師：「この中で、賛成や反対、もっと聞いてみたいことはある？」

I：「6班の「式を立てると関係がわかる」という意見で、関係がわかってこそ、方程式が立てられるのではないだろうか」

Y：「Ｉ君の言うように、方程式を立てるには、２つのつりあうという関係から式をたてることができる。でも、方程式から、２つのつりあうという関係も知ることができる。例えば、２ｘ＝100という方程式だったら、りんごが２個で100円という関係がわかる。そんなことを言おうとした。」

Ｔ：「３班の方程式は木であるということに賛成。でも、ぼくは、茎かもしれないと思う。方程式を茎として、新しい他の花が咲くかもしれない。」

Ｏ：「ぼくも、方程式は木であるという考えに賛成です。」

教師：「数学の構造というのは、根っこである等式の性質をもとにして、当たり前のことだけど、誰もが納得のいくことをもとにして、それを根っこにして、新しい花を咲かせることなんだね。先生も根っこであり、木であることに賛成。」

Ｎ：「これが数学の世界を広げていくということ、だと思う。つりあいという関係をもとに、等式の性質を創って、矛盾がないように、花を咲かせること。そうすることで、メカニズムを知ることができる。」

上記の意見のやりとりが、生徒個々のＶ図への記入にも変化が生ずる。方程式を木と捉えた（３班）の意見に対して、次のような新たなＶ図への記述が生徒にみられる。

【討論６を終えてのＶ図への記述】

（S）これからやっていくうえで大切なのは、木の根を探すと、その数学の世界が広がることを発表してくれた３班はすごいです。

（O）３班の木は、等式の性質をもとにして、方程式をつくっていくからいいと思う。でも、もっと、言葉を付け加えるとするなら、移項は水だと思う。

（T）方程式は、木であるということについては、ぼくもびっくりしました。もっとよく考えてみると、植物だと思う。その花から、新しいものが生まれる。ということは、それをふまえて、できていくのではないかと思う。木という見方もいいけれど、植物という見方の方がいい。そして、その植物が生きるにも、その条件、土地、水、光など。だから、そこまでに、等式の性質の条件があるのではないかなあ。

（M）「方程式は木である」で、数学の方程式の「移項」という複雑な式でも、等式の性質というもと（根）になる方法があるように、どんなに複雑な式でも、必ずもとになる方法がある。それが、認められることで、その方法は、花を咲かせる。つまり、どんな当たり前のことでも、それを認めることで、そのもとを見ることで、その当たり前のことはどんどん発展していって、すごい方法になり、花を咲かせる。他にもいろいろな花を咲かせるかもしれない。そういったものが、数学の方程式の世界を広げたり、意味を探るカギになると思う。

「方程式は木である」というメタファーに対して、情緒的な面で共鳴をするＳ、等式の意識を持って方程式を見直すよさを言及するＳやＯ、根（等式の性質）をもとにして次々に方程式をつくること、考えることができる生成の可能性を語るＴやＭなど、メタファーを手がかりにして想像力を豊かにしている様子がみられる。

３班の代表として「方程式は木である」と主張したＫは、Ｔの意見を聞いて、さらに次のようにＶ図に書き加えている。

討論７を終えて

（Ｋ）方程式は木だ！という自分の意見は変わらなかったが、また、新しいことが証明されるにつれて、枝分かれして、新しい木ができると思った。

生徒の価値主張に関しては、我々の想像を超えるものがあり、その価値主張の中でメタファーや類推的な思考がどのような役目を果たすのかなど、今後の実践を通して実証的に明らかにしていく必要がある。

７．生徒が「数学する」活動とＶ図の活用との融合を図った授業実践を通して
ー継続的な１次方程式の授業実践より得られることー

生徒が「数学する」数学授業とＶ図を活用した数学授業の融合を図る上で、授業構想上では次の３点に効果があると考えていた。

① 教師の構え －授業の中での意志決定や言語活動のよりどころ－ を形成する上での効果
② 生徒の「問い」の形成過程での効果　－今までの「私」の意識化－
③ 解決過程を振り返り、新たな活動の源となる過程での効果　－新たな「私」の意識化－

今回の１次方程式の授業実践は、６で述べたように「内容の概観→問いの形成→問いの追求→新たな問いの形成」という生徒が数学する活動の流れを基にしつつ、教師、生徒共々、授業の節目ごとにＶ図の作成を行っていったものである。一連の授業実践の結果、次の２点に顕著な特徴が表れた。

○ 授業の中での教師の意志決定や言語活動の「よりどころ」を強く意識すること
　－授業の中で「これは伝えたい」という価値主張を強く持つようになること－
○ 生徒自身が振り返りの活動により、自分自身の思考の変容を知ろうと意識すること
　－メタ認知活動の重視による「自分の考えとその変化」を意識すること－

この２点（教師側、生徒側）を詳しく述べれば、次のようになる。

○ 授業の中での教師の意志決定や言語活動の「よりどころ」を強く意識すること
・授業の願いやねらいをより明確にしようとする意識の強化
・生徒の思考をより正確に読み取ろうとする意識の強化
・生徒の思考のつながりをできる限り図ろうとする意識の強化

1次方程式の授業を行う前に、授業者は1次方程式の価値を次のように考えていた。

（ア）　方程式の文字xに数値を代入することにより、解を求めることができるよさ

（イ）　算数の逆算のように意味を考えなくても、式変形により自動的に解を求めることができるよさ

（ウ）　分解式にはない、複数の条件を合併した一つの式で表せることのよさ

（エ）　方程式の世界に変換すれば、形式的に解けることの便利さ・よさ

算術的な解法との違い、形式性、思考の省略、一つの式で必要なことを表せることに価値をおいていた。授業者がこうした価値を1次方程式という題材に持つことにより、生徒のV図の記述にも影響が出てくる。

例えば、**（資料4）**の生徒が作成したV図では、生徒の価値観は次のように変遷していく。

（ア）’ 方程式の可能性

（イ）’ 討論2に対する主張　・・・「必要のないことをするな！」というメッセージ

（ウ）’ 討論2に対する自分の捉え方の変容　・・・「見方によってはどうにでもなる」

（エ）’ 等式の性質の捉え直し　・・・「等式の性質があること、小学校ではわからなかった『なぜ？』までわかってしまう。すごいぞ、性質」

（オ）’ 方程式が考えを代表している（条件を反映）ことの意識

（カ）’ 関係を保つ（つりあう）という観点での方程式の捉え直し

（資料4）を作成した生徒の記述からは、授業者の意図した（ウ）の見方が（オ）’ に反映されていることがわかる。生徒自身の気づきもあろうが、授業内での教師の言語活動や授業の流れが（オ）’ の見方を生徒に形成させているといえよう。

一方、授業者は（ア），（イ），（エ）に挙げたように、方程式を解くことにおける「形式性」や「自動性」に強い価値を抱いていた。これに対して、**（資料4）**における生徒は、授業の討論で話題となった「等式の性質のもつ意味」「つりあいや関係を保つという、等号を意識して方程式を捉え直すこと」に価値を強く持つようになる。教師、生徒双方の強調したい価値のずれがみられる点である。学習が深まれば多様な価値が生じたり、個人によって力点のおくところは変わってくる。それゆえ、V図の活用により、授業者自身も「こういう価値の置き方もあるんだなあ」と再認識することができる。その姿勢が、生徒の思考をより正確に読み取ろうとする意識の強化につながっていく。

生徒の思考をより正確に読み取る媒体としてのV図の役目は、次のような場面でも生じる。

○　議論を共有していこうとする中で、意見を積極的に発言しない生徒は一見すると全体の中に埋没しているようにみえる。その生徒の折々の思考状態を知る上で、節目ごとに書くV図が大きな役目を果たしている。

○　教師の伝えたい事柄をどのように生徒が取り入れようとしているのか、さらに変容されていくのかについて、数学論文とは異なる媒体で見いだすことができるようになる。

数学論文にはテーマに対する個々生徒の思考が表れ、V図には継時的に変遷していく生徒の思考過程が表れる。それゆえ、内省的な思考を促す記述が、V図には大変多くみられる。例えば、教師の伝えたい事柄に対する生徒の思考として、次の生徒Oの記述が挙げられる。

「未知の数にxという代数を入れたり、いろいろな部分の答が出なくても、それが等式で成り立たせて答を出す。答は1つでも、そこへ向かう道は、土台が小4の算数であったり、新

しく習った方程式であったり、いろいろな方法で解けるのが数学のよさだと思う。
また、そんないろいろな方法「あーしよう」「こーしよう」という議論こそが、土屋先生がそうであったように、私たちを数学の魅力に引き込ませるのではないか。」

内容の概観、という生徒が数学する数学授業の前段階で、授業者は自分の教材観などを語ることがある。その語りなどの生徒への影響がＶ図により異なる形でみえるのではないだろうか。

○ 生徒自身が振り返りの活動により、自分自身の思考の変容を知ろうと意識すること
　－メタ認知活動の重視による「自分の考えとその変化」を意識すること－
・一連の授業を通して自分の創ってきた数学を知ること、さらに構成し直そうとすること
・他者の価値観で共鳴するものを受け入れようとすること、さらに自分なりに解釈して表現すること，他者とのやりとりを強く意識すること
・教師の伝えたい価値観を意識すること、それに対する自分の考えを持つこと

生徒の側の視点でみたときに、特徴的なことは「他者の意識」を強く持つことといえる。その他者の意識には、他者を通して「今の自分自身」を知るということも含まれる。生徒が数学する数学授業では、数学論文作成において「問い」に対する自分の考えを強く意識すること、「問い」の解明に向かって論を踏まえて創っていくことが要求される。学級全体の問いの追求のプロセスでは、他者の書いた数学論文の内容を用いて議論するといった活動がなされる。しかし、そうした議論を踏まえて、もう一度「同じ問い」に対する論文を書くということは時間的に厳しい。

数学論文を用いた議論のプロセスを経て何を得たのか、同じ問いに対してどのような思いを改めて感じているのか、同じ問いに対して「新たな私」としてどのようにアプローチをするのか、など議論を踏まえての指針を意識する上でＶ図が役立つ。

例えば、「他者の価値観で共鳴するものを受け入れようとすること、さらに自分なりに解釈して表現すること，他者とのやりとりを強く意識すること」により、新たな指針を意識した生徒の記述として次のものがある。

【他者の数学論文に対する端的な記述】（他者の意識）

（K）Ｒ君の論文には、疑問をもった。Ｉ君の方程式の仕組みは、わかりやすかった。みんなの論文を聞いて、意見は変わらなかったけど、０を消す理由は、自分への疑問かもしれない。

（Y）わかりやすくまとめてある人がよかった。私のは、長すぎてくわしいけど、まとめた方がいいと思った。

（N）移項の意味ということが自分の論文には書かれていなくて、M君の移項の意味をプラスした。

（A）自分は、M君の等式の性質が合っていると思う。それは、両辺から同じ数をひくという行為は、明らかに移項と同じことをしている。

また、「一連の授業を通して自分の創ってきた数学を知ること、さらに構成し直そうとすること」として、次の記述が挙げられる。特に、Ｅの記述は生成しつつあるものとして数学を捉

え、自身の内的な世界の拡がりを感じるという意味で 「教師の伝えたい価値観を意識すること、それに対する自分の考えを持つこと」ともいえる。

【授業を通しての自分の意識】

（K）数学というのは、決められたきまりを使って解くだけではなく、自分でなんでそのきまりができたのか、考えていくことが大事だと思った。自分できまりを考えて、それがあっていても間違えていても、1人1人の思いをもつことが大事だと思う。

（O）この題材を通しての答は、何かを決めるときに、矛盾してはいけないのだということがわかった。

（E）今までの数学を思い出してみると、小学校のとき以上に、方法、文字、規則が増え数学の考え方がたくさんできる様になり、1つの問題にもたくさんの見方ができるようになった。これが、数学の世界が広がったということでは・・・？でも、実は数学の世界が広がっただけではなく、自分の世界が広がったということに、気が付きました。

V図の活用により、生徒は自分の継時的な思考過程 －学びのプロセス－ を意識しつつ、その中で行われてきた他者の意識、他者と自分とのやりとり、過去の自分とこれからの自分などを強く意識するのではないだろうか。

8．まとめと今後への課題

本稿では、協同学習理論に基軸をもつ「生徒が数学する」数学授業とV図を活用した数学授業との融合を構想し、1次方程式の授業実践を通して、両者の数学授業の融合の可能性と効果について考察した。1次方程式の授業実践の結果得られた、特徴的な生徒の活動や筆記物による変容を踏まえ、次の3点が明らかになってきた。

① V図の活用は、教師には授業の中での意志決定や言語活動の「よりどころ」を強く意識するものとなり、生徒には自分自身の学びを振り返り、他者や過去の自己との比較を通して学びの変容を意識する機能を持つ。

② 今回の授業実践では、V図の活用が、生徒が個々の「問い」をもつ過程よりも、解決過程を振り返り、新たな活動を生成する場面で効果的に扱われた。

③ 個々の生徒が問いを持ち、それぞれの問いに対して固有の展開をしていく「生徒が数学する」活動の多様さや発散の可能性、これに対するV図のもつ作成者の意図へ近づけようとする収束性とを結びつけるような、中間的な学習段階が必要となる。

この3点に対する今後への課題は、次の通りである。

①' 内省的な記述（メタ認知活動を促進する記述）としてのV図の機能が、生徒の学習および教師の指導にどのような影響を与えるのかについて、さらに詳細な実証的考察が必要となる。

②' 生徒が個々の「問い」をもつ過程において、V図の活用がどのような役割を果たすのか、この点についてもさらに詳細な実証的考察が必要となる。

③' 「生徒が数学する」数学授業を行う上での課題は、その学習スタイルの持つ多様性、授業内容の発散性（教師のねらいとの整合の意味での発散性）である。また、生徒の個性や学習集団の特性によっても、授業の進行がかなり変わる。「生徒が数学する」数学授業がうまく機能するためには、多様性、発散性を活かしつつ、ある程度の収束を図らなければ

ならないという高度な技量が教師に必要とされる。

その高度な技量を形成する手だてとして、Ｖ図の活用と生徒が数学する活動を結ぶような「中間的な学習構想や学習段階」が必要となる。

本稿での**（資料2）**はその試みであるが、改良を重ねる必要がある。

中学校段階で数学論文はどのくらいまで書けるのか、そしてどのくらいまで生徒に要求すべきなのか、数学論文の作成が最適なのか・・・そうした自問を繰り返している。Ｖ図を活用した授業、生徒が数学する授業、それぞれの特性を具体的に見極めつつ、さらに上記の課題について考察を深めていきたい。

【附記】本研究は、平成14年度静岡総合研究機構・学術教育研究推進事業費補助金「数学学習における内省的な記述の効果に関する実証的研究」（研究代表者：両角達男）、
平成14～16年度科学研究費補助金　若手研究Ｂ「範例的教授・学習理論に基づく数学授業の教授と数学的活動に関する研究」（研究代表者：両角達男）の支援を受けて行われている。

【引用・参考文献】

岡本光司・静岡大学附属静岡中学校数学科（1998a）．
「「生徒が数学する」数学の授業　ーわたしも「論文」を書いたー」．明治図書

岡本光司（1998b）．「「状況的学習」論に基づいた数学学習のパラダイムと数学授業のフレームワーク」．日本数学教育学会，第31回数学教育論文発表会論文集．pp.335-340.

岡本光司（1998c）．「「状況的学習」を志向した数学学習」．静岡大学教育学部研究報告（教科教育学篇）第30号．pp.23-48.

岡本光司（1999）．「状況的学習論に基づいた数学授業のカリキュラム（試案）」．静岡大学教育学部研究報告（教科教育学篇）第31号．pp.11-26.

静岡大学教育学部附属中学校数学科（1998，1999，2000，2001，2002）．「研究協議会資料・数学編（当日資料）」

福岡敏行・弓野憲一監訳（1992）．「子どもが学ぶ新しい学習法ー概念地図法によるメタ学習」．東洋館；J.D.NOVAK and D.B.GOWIN，"LEARNING HOW TO　LEARN"，Cambridge University Press，1984.

遠藤公夫監訳（1994）．「認知構造と概念転換」．東洋館；
Leo West and Leon・Pines（1985），"Cognitive Structure and Conceptual Change", Academic Press.

岡本光司・土屋史人（2000）．「D.B.GowinのVee図を活用した数学授業」．静岡大学教育学部研究報告（教科教育学篇）第32号．pp.59-76.

岡本光司・土屋史人（1997）．「「概念地図」を活用した数学学習における生徒の意識と理解の変容」．静岡大学教育学部研究報告（教科教育学篇）第29号．pp.15-34.

長洲南海男編（1996）．「理科授業における構成主義に基づいた新しい指導と評価のプログラムの開発と試行」．平成６年～７年度科学研究費補助金（一般研究C）研究成果報告書.

齋藤昇（2001）．「構造的思考と創造力・表現力との関係」．平成10年度～平成12年度科学研究費補助金（基盤研究（C）（2））研究成果報告書

両角達男（2002）．「範例的教授・学習理論に基づく数学授業の教授に関する研究」．静岡大学教育学部研究報告（教科教育学篇）第33号．pp.49-70.

両角達男（2003）．「範例的教授・学習における価値の追求と数学授業への活用」．静岡大学教育学部研究報告（教科教育学篇）第34号．pp.45-64.

（資料１）

１次方程式　学び方図

［明らかにしたいこと］

(№１）ブレンド比率を求めよう
(№２）方程式ってなんだろう
(№３）重さを求めるにはどうしたらよいか
（論文）図で表せない方程式をどうやって解いたらよいか
（論文）新しい等式の性質をつくろう
（論文）移項って何だろう
（論文）算数と方程式はどういう関係だろう。

［さらに調べたいことや新たな疑問］

①「数学」って何だろう。
(№２）数学の記号にはいろいろな意味がある。
（論文）数学とはいらないものを省いてなるべく簡単にする学問なんだ。
（論文）数学は、確実に解決できる方法を考え出そうとするんだなあ。
（論文）等式の性質という当たり前のことを性質として認め合うことがあるんだ。
（論文）数学とは条件を追究する学問なんだなあ
（論文）どういう条件があるか明らかにして、それを数値化して、式で表せたらとってもいい。どうやったら、そういう状況を式で表せるかを考えるのが数学なんだなあ。

②もとになる重要な考えや方法
（論文）等式の性質

③マップ
（別紙）

④大切な言葉
等式、左辺、右辺、両辺、方程式
方程式の解、方程式を解く、成り立つ、成り立たない
未知数、等式の性質、移項

①「数学」としての「よさ」
(№２）未知なるものを求めるには、ｘを使って式を立てて代入して求められる。
（論文）算数と数学ではもとになるものが違う。数学のよさはもとになる等式の性質がある。算数の逆算と違って、いちいち式の意味を考えなくても、式さえ立てれば機械的に求められる。
（論文）方程式は、一つの式で算数でいちいち考えていたすべての意味を含むなんてすごいなあ。
（論文）未知の数量があっても、その数量に関する条件が方程式で表現できるなら、一定の手順に従って式を変形することによってどんな方程式も機械的に解けてしまうのだなあ

②答えからいえること
(№２）＝には、つりあうという意味の＝がある。
（論文）等式の性質には４つある。
（論文）等式の性質を使って方程式が解ける。
（論文）等号をこえると符号が変わることを移項という。移項は等式の性質がもとになっている。
（論文）小学校の解き方と中学の解き方は違う。

③答えとその意味
（プリントやノートに記入）

④解決
（プリントやノートに記入）

［今日の問題］

(№１）算数で解いてみよう。方程式を紹介して、その思いを語る。
(№２）つりあわせるには、何kgのおもりをのせればよいだろう。
(№３）野菜の重さを求めよう。自分で絵を描いて、方程式をつくって、絵から重さを求めよう。
わからないことや疑問に思ったことを出そう。

（資料２）

［問いを追究し、価値ある数学を創りあげ、新たな問いを見いだしていく段階］

数学って何だろう

・どういう条件があるかを明らかにして、それを数値化して、式で表せたらとってもいい。どうやったら、そういう状況を式で表せるか、考えるのが数学なんだなあ。
条件を満たすのが方程式で、つりあうという意味なんだなあ。
条件が方程式で表せれば、一定の手順に従えば、どんな方程式も機械的に解けてしまうのだなあ。
・数学とは、条件を追究する学問なんだなあ。
・方程式は、一つの式で算数でいちいち考えていたすべての意味を含むなんてすごいなあ。
・数学とはもとになるものがある。もとになるものがあるからこそ、確実に解決できるし、誰もが納得できる。数学の構造はもとになるものを使って、広がっていくんだなあ。
・数学は、確実に解決できる方法を考え出そうとするんだなあ。
・数学とは、いらないものを省いて、なるべく簡単にする学問なんだなあ。

方程式のよさって何だろう

追究に値する　予想される共有される
新たな問い

共有された
問いの発表会　意見交換会

すべて、天秤の図で表せるなんておもしろいなあでも、条件によって解けるときと解けないときがあるのだなあ	結局この４つに集約されてるのか、よくできてるなあ	移項って等式の性質がもとになっているんだなあ	方程式の機械的に解く部分が、算数でいうと、いちいち意味を考えていたことにあたるのか

予想される　共有される問い

図で表せない方程式をどうやって解いたらよいか	新しい等式の性質をつくろう	移項って何だろう	算数と方程式はどういう関係だろうか

追究に値する
予想される　共有される問い

天秤の図をかいて方程式をつくって、楽しむことから矛盾のない世界を創ろうとしているグループ	等式の性質から、矛盾のない世界を創ろうとしているグループ	方程式の計算を追究しているグループ	方程式をつくって、文章題を解いているグループ

論文を次のようなグループ化する
各自の論文

［子どもが自分の問いをもつ段階］（追究に値する価値ある問いを個人で持つ）
自分でテーマを決めて、論文をつくろう

［基本となる内容を概観する段階］
（No.１）算数で解いてみよう。方程式を紹介して、その思いを語る。
（No.２）つりあわせるには、何kgのおもりをのせればよいだろう。
（No.３）野菜の重さを求めよう。自分で絵を描いて、方程式をつくって、絵から重さを求めよう。
わからないことや疑問に思ったことを出そう。

（資料３）
討論４「移項するとなぜ、符号が変わるのか」について

この「問い」については、かなりの生徒が関心のある問いとして数学論文を書いていた。
そこで、「移項するとなぜ符号が変わるのか」に関する論文を書いた生徒すべてに発表させた。
発表を通して、次の３グループに論拠が分けられていった。

① 等式の性質から成り立っているのが移項だ。移動ではなく、両辺を同じ条件にすること ② 移項とは逆算していること。 ③ 符号を変えないと矛盾するから、符号を変えるべきだ。

①～③の３つの論拠に対する議論が、次の通りである。

教師：「これらについて、賛成、反対の意見をどうぞ」
Ｋ：「③は、符号を変える証拠としては弱いと思う。」
Ｅ：「５ｘ＋５０＝１５０　左辺から５０をひくことは、つりあわせると、
５ｘ＋５０－５０＝１５０－５０
５ｘ＝１５０－５０　　　両辺に－５０をしてるから、③もいい。」
Ｍ：「証拠として弱いということがわからない」
Ｋ：「Ａがいえるから、Ｂだっていうわけにはいかない。」
教師：「②で逆算という言葉が出てきているけど、逆算って、確かめ算と考えていい？」
Ｏ：「いい」
Ｋ：「方程式はｘを求めていることだから、確かめ算ということはおかしい。」
Ｉ：「②はつり合いから考えると、数学の世界では、確かめ算というのはおかしい。」
Ｔ：「移項というのは、移すように見えるということだから、確かめることではない。」
Ｏ：「Ｔ君は、言葉がよくないっていってるの？」
Ｔ：「言葉だけの問題ではない」
Ｎ：「②に賛成。昔習った、たしかめ算が、今やっている方程式と考えればいい。たしかめ算で求めたのは、
もとの数ｘだから、やっていることは同じ」
Ｏ：「３＋□＝５　□＝５－３　この□をｘに変えると
３＋ｘ＝５　ｘ＝５－３　逆算の方法と似ている。やっていることは同じ。」
Ｔ：「５００－１００＝４００のとき、４００＋１００＝５００にするのもたしかめ算。
だから、方程式とたしかめ算は違う」
Ｏ：「今、Ｔ君が言っていることって－１００が＋１００になって、逆算していることじゃないの。
符号が変わるということは、たしかめ算じゃん。」
Ａ：「５ｘ＋５０＝１５０－ｘで、－ｘを移項するときは、たしかめ算でどうやって説明するの？」
Ｏ：「ｘをひいていたのが答の１５０だから、たしかめ算で６ｘ分わかればいい」
Ｋ：「よくわからない」
Ｉ：「３＋ｘ＝５　ｘ＝５－３　左辺から３が消えるのはなぜ？」
Ｏ：「小学校のときは３消してるって考えなかったでしょ。それ（等式の性質）は、中学校からの考え方で、
小学校は答えからひけばいいという考え方でしょ。」
Ｓ：「たしかめ算というのは、最初の式まで戻っていくような計算をすることで、ゴールからスタートみたい
感じ。方程式は、ｘを求めに進めていく計算だから、スタートからゴールみたい感じ。全く逆のことを
やっているのじゃないか。」
Ｋ：「移項とは式を解く１つの方法だから、スタートからゴールまで示していることとは違う。」
Ｍ：「小学校の段階は、まだつりあいの考え方ができていないので、ただ、ひけばいいって習ったけど、
中学校では数学の世界を広げ、なぜ、ひくのかメカニズムを知ること」
Ｉ：「Ｏさんのは、算数の世界であって、数学の世界とは違う。数学では、等式は両辺に同じことをすること
で答を求めることができる。算数では、ｘは５－３で表せますよっていうこと。」
Ｅ：「方程式のもとは等式の性質にある。たしかめ算のもとはない・・・のかもしれない。」

討論の結果、結論は出なかったが、それぞれの子どもに、自分なりの数学の世界が小学校の算数と比較しながらできたようである。

(資料4)

1次方程式　学び方図

1年　組　番　名前

[明らかにしたいこと]

(No.2) 方程式とは、どのようなものか。 (12/12 論文)「数学」としての良さとは何か？
(No.4) みんなの論文
(論文) 等式の性質③に式を入れて良いか。
(12/3 論文) 移項するとなぜ符号が変わるのか。
(12/5 論文) 移項とは逆算か？
(12/9 論文) 方程式さえあれば何でもできるのか？

[さらに調べたいことや新たな疑問]

- 方程式さえあれば、どんな問題も解けるのか？
- どんな式でも ＝（イコール）さえあれば、方程式なのか？
- 今まで習った 1+1=2 とかも方程式か？

① 「数学」って何だろう。

(No2) 今まで ＝（イコール）はふつうに使っていた。小学校から、算数や数学にはなくてはいけないものだった。しかし、今になって、「＝」の意味をしっかりと知った。てんびんの役目である。数学は、なんだか算数の復習にも感じるし、もっともっと奥深く掘り下げている気もする。

算数の世界と、どう変わっていくのか 解の世界と みていくとおもしろい

(No4) 数学と算数はちがう!!

(論文) 結局、1次方程式は、4つの等式の性質があれば解けてしまうのだと思う。でも1歩ちがった見方をすれば、式でもいい。すごいと思った。

等式の性質ってすごいんだ

(12/5 論文) 私は、なぜ小学校で「方程式」という言葉が出なかったかがすごく不思議だった。「逆算イコール「方程式」」だと思っていたから。でも違う。"等式の性質"が数学を動かす重要なカギだ。

② もとになる重要な考えや方法

(No.2) ＝ は、つり合うという意味である。

- x の値によって成りたったり成り立たなかったりする等式を方程式という。
- 左辺と右辺がつり合うことを等式は成り立つ
  左辺と右辺がつり合わないことを等式は成り立たない

(論文)
- 矛盾がなければ数学は成り立つ
- 1次方程式は 1つの答えを出す場合は使える。
- x と y を求めたい時はどちらかに条件を入れる。

(12/3 論文)
- 等式の性質から成り立っているのが移項だ。
- 移動ではなく両辺を同じ条件にすること。
- 移動しているように見えるだけで、実は逆算だ。
- 符号が変わらないと矛盾する。

③ マップ
(別紙に記入)

④ 大切な言葉

(No2) ●＜x＜▲ → 不等式
＜ 不等号

左辺　右辺
$x+2=5+3$　＝で結ばれた式を等式。
両辺

(12/3 論文) 移項　メカニズム　(12/5 論文) 等式の性質　原理・逆算
(12/9) "つり合っている"　(12/12) 関係

① 数学としての「よさ」

(No2) 方程式があればどんな問題でも解けちゃいそうな気がする。 これが予測できる根拠ってすごいんだろうね

(ノート) 同じ式を両辺をかけても良いのか。
式をかける必要自体がないのではないか。x の値を出す上で必要がない。必要のないことをするな!!

(論文) 必要性はないけど、見方によってはどうにでもなる。

(12/5 論文) 等式の性質があること、見通しを持つことが必要だね 小学校ではわからなかった「なぜ？」までもわかってしまう。すごいぞ 性質。

(12/9 論文) x というのは、求めたい数(答え)を表わすもので、それを使うことでどんなに今までむずかしかった問題も、どうしてそうなるのか、考え方を表わしながら解けるのが方程式だ。

(12/12 論文) 算数と数学の違いを知るにあたって、数学上、「関係」というものがある。何かを解くには、つり合うこと（イコール）がなくてはならない。その関係があることで問題文などを式として表すことができる。それを組み立てることに数学は重点を置いているんだと思う。

② 答えからいえること

(No2) $x+2=3+5$ $\xrightarrow{\text{方程式を解く}}$ $x=6$ 方程式の解

(ノート) 式だと答えが出てこない時があるからだめ。

(論文) 式を入れても良い(成り立つ)が、文字式を答え(数)と見れば必要性がない。方程式は1つの答えを求めるのが前ていである。

(12/5 論文) 数学とは、等式の性質を使って成り立つ世界だ。算数から数学へと世界を広げていく。

(12/9 論文) 方程式というのは、「つり合っている」という考えをもとに成り立っている。

(12/12 論文) 関係を式で表すことが数学。

③ 答えとその意味
(プリントやノートに記入)

④ 解決
(プリントやノートに記入)

[今日の問題]
(プリントやノートに記入)