静岡大学教育学部附属教育実践総合センター紀要　　No.9 p.57～75 (2003)

〈論文・実践報告〉

テクノロジーを活用した「生徒が数学する」円の探求的学習に関する研究

A Study about Student's Doing Mathematical Activity during Inquiring Properties of Circle used by Technology (Geometric Constructor) in Secondary School Grade

武藤寿彰*・両角達男**

Toshiaki MUTO, Tatsuo MOROZUMI

【要約】

日々の数学授業の中で、個々の生徒が自分の追求したい問いを持つこと、その問いの解明に向かって数学的活動を豊かに行うことは、多くの数学教師の願いである。

本稿では、テクノロジーの活用による中学2年の「円」の授業実践（2002）に焦点をあて、その授業実践にみられる生徒の数学的活動の諸相を分析すると共に、GCの活用と「生徒が数学する」数学学習の融合にみられる可能性を考察する。特に、「持続性のある追求を生む問いの生成」と「問いをもとにした追求課程を促進するもの」として、テクノロジーと数学論文の双方を活用した学習活動が有効であるのかを、一連の授業実践を通して明らかにする。そのため、内省的な記述の側面を強くもつ数学論文の記述と、授業での生徒の特徴的な活動や変容を分析する。研究の結果、明らかになった点は、主に次の2点である。

① テクノロジーと数学論文を融合した数学的活動は、図形学習に関わる題材に対して「一方を変えたら他方はどうなるか（結果は同じになるか）」という関数的な見方、「みえた状況以外の場所ではどうなっているか」という一般性や全称性を生む見方などを強く誘発する。そうした見方の深まりが、「持続性のある追求を生む問いの生成」につながる。

② テクノロジー活用を前提として数学論文を書くことは、それまでの自分とは異なる「私」を意識し、自分の活動を内省的にみる可能性が高い。こうした観方の変換は「問いをもとにした追求活動を促進するもの」の重要な要素となり得る。

テクノロジー活用と「生徒が数学する」数学学習理念の融合には、新たな図形学習の可能性がみられる。今後はそうした知見を、実証的に検証していく必要がある。

キーワード：生徒が数学する，Geometric Constructor（GC/JAVA），円の探求，内省的記述

1．はじめに

数学の学習と聞いて、生徒達はどんなことを感じているだろうか。

「学ぶべきものが決まっているものであり、原理や法則を覚えればよいもの、後はいかに覚

＊静岡市立南中学校教諭　　＊＊数学教育助教授

えたことを使って効率よく問題を解いていくかにつきる。だから数学は暗記科目。パターンを覚えて処理さえすればいい。」ということになっていないだろうか。どのぐらいの生徒が、数学の学習に対して、創造的なものを感じて学習しているだろうか。

これに対して、岡本 (1998) は「生徒が数学する」数学授業というスタイルの授業を提唱している。このスタイルの授業は、次のような段階で行われる。

段　階	内　容
①学習内容の概観	生徒が自らの問いを持つための契機となる単元の導入を教師がする。
②自分の問いを持つ	学びたい・追究したいこと（問い）を生徒が出し、共有化する。
③問いの追究	個々が問いを追究し論文を作成するor全員で同じ問いを追究する。
④新たな問いを持つ	新たに問いを持ち、追究する。

生徒一人一人に「問い」を持つ機会を与えることや、一人一人が本当に追究したいと思ったことを追究できる時間を設けることなどから、今までの数学授業観を生徒・教師ともに大きく変える可能性がある。近年、静岡市では多くの教員がこのスタイルの授業を試みている。
本実践は、基本的にこのスタイルを踏襲している。

しかしながら、このスタイルで授業を進めることの問題点もある。以下は筆者自身のこれまでの実践から特に気になっているものである。

A　追究に値する問いを生徒が持てるのか
B　生徒個々に学習をゆだねて、数学的な追究が可能なのか
C　追究した結果が拡散し、中学校での学習内容を著しく逸脱しないか
D　時間がかかりすぎるのではないか

「③問いの追究」の段階では、生徒一人一人が追究した結果を論文（レポート）という形でまとめることが多い。自分でテーマを決め、自分で追究できるという自由度が「生徒が数学する」数学のダイナミックな展開を支えているのは間違いない。

しかし、ともすると自分で思考した結果を論文にまとめていくのではなく、参考文献を探して写して終わりというケースが見られる。どんなに意欲があっても、生徒たちの数学的経験は少なく、未知の問題の解決方法を見出すことは一般的にはとても難しい。問題解決のパターンを習得し、それを活用するのが数学だと思っている生徒も多いので、数学を得意だと思っている生徒であっても、自分で追究する手段（手がかり）すら見出せず、結果として本を調べることに終始してしまうのである。もちろんそれが全てよくないことではないのだが、こういった参考文献調べがメインの学習は、数学の学習があまりに味気ないものになると感じるのは筆者のみではあるまい。

また自分で組み立てたものではない、借り物の知識の積み上げげによる論文の作成は、上記のＣで挙げた「中学校での学習内容を著しく逸脱すること」の一因になり得る。

さらに「①学習内容の概観」の方法にもよるが、論文のテーマを設定する段階から、行き詰ることを恐れて、塾等の先行学習で得た知識を元に、既に自分の中で解決している問題をテー

マとして選んだり、文献を読んで解決方法がわかるもの（論文が書きやすいもの）を選んだりしてしまい、生徒自身が本当に、そのとき追究したいと思うことをテーマとして選ばないことさえある。

生徒が真に追求したい問いを持ち、その問いに対する追求活動を生徒個々が深めていくために何をしたらよいのだろうか。例えば、借り物の知識の積み重ねで数学論文を作成している生徒に対し、問いに対する追求心をもとにして、自らの力で考えオリジナルの数学論文を作成するためにはどうすればよいのだろうか。

そこで、本稿では、「持続性のある追求を生む問いの生成」「問いをもとにした追求過程を促進するもの」として、テクノロジーを活用した数学的活動を取り上げてみたい。「持続性のある追求を生む問いの生成」のためには、生徒が「おや？」「本当かな？」などの言葉に代表される不思議さ、意外性、葛藤、既知にはない見方などが内在した事象などに出逢うことが必要である。例えば、テクノロジーの活用により動的に問題場面を提示する場合などでは、不思議さ、意外性などが顕著に表れることがある。また、生徒個々がテクノロジーを操作することを通して、当初予測していなかった事柄に出逢う可能性も高まる。テクノロジーを操作し、実験を繰り返すことにより、生徒が当初立てていた予想が検証されたり、反証するような事例が生じたりする。これは「問いをもとにした追求過程を促進するもの」としての機能を持つ。

現在まで、生徒が数学する数学授業とテクノロジーを活用した数学授業の融合を図った実践例はなく、本稿では２つの授業とその理念の融合による考察が期待できよう。

２．研究の目的と方法

本稿では、「持続性のある追求を生む問いの生成」「問いをもとにした追求過程を促進するもの」として、テクノロジーを活用した数学的活動が有効であるかどうかを、「円」に関わる一連の授業実践を通して実証的に明らかにする。その方法として、「円」に関わる一連の授業実践の中での特徴的な生徒の活動に着目し、その変容や特徴などを明らかにしていく。特に、生徒が自分自身の学習活動を客観視し得る、内省的な記述の側面をもつ数学論文の記述などに着目する。この考察を通して、生徒が数学する数学授業とテクノロジーを活用した数学授業との融合の可能性と課題についても、考察する。

３．テクノロジーの活用の可能性について

両角（2002）は、過去10年間の日本数学教育学会・数学教育論文発表会論文集での関数領域の研究動向を次の８点に集約している。

（ア） 事象、日常生活場面とのつながりを強く意識すること、新たな知見を得ることなどへの学習者の現状に関する知見
（イ） 事象に内在する関係を考察する手だてとして「関数の有用性を知ること」に関する研究
（ウ） テクノロジーなどの道具の進化に伴う関数学習の可能性に関する研究
（エ） 関数そのものの構造や関数の性質を、より高い数学の立場や歴史的な観点から捉え直す研究
（オ） 学習指導要領変遷や独自の関数カリキュラムの変遷史などの思潮を分析する研究
（カ） 関数の働きや関数の性質を、学習者がどのように理解し、その変容を図っていくかに関する研究

（キ） 学校種間の関数学習での接続のあり方に関する研究
（ク） 関数的な見方をすることにより、他領域の数学の内容を洞察・理解することに関する研究

テクノロジーの活用を前提にした一連の「円」の授業実践は、上記の（イ），（ウ），（ク）に関連する。特に、図形の学習に対してテクノロジーを使うことは、静的なものとしてでなく動的なものとして図形を捉えるというよさがある。それゆえ、（ク）の「関数の投影」の側面が大変強いものといえる。

また、図形学習におけるテクノロジー活用の可能性として、宮崎（2002a）は次のように述べる。

「幾何領域カリキュラムでは、図形の概念形成に関して、動的幾何ソフトで、図形と図の間にあるギャップの低減が試みられている。また、証明に関しては、動的幾何ソフトによって、生徒は推測の成り立つ範囲を理解すること／推測の真を確信することが容易となり、証明の役割が、推測を定理とするための手段、推測がなぜ真であるかを説明するための手段、さらなる一般化を可能にするための手段に変化すると指摘する。（中略）

この場面が、生徒に実証的に納得できないというジレンマを生み、証明の必要性を芽生えさせるという。」(pp.178)

上記の宮崎（2002a）の指摘は、Hershkowitzら（2002）によるコンピュータ活用を前提した図形学習に関する知見でもあり、重要な示唆を与えている。動的幾何ソフトによる図形と図のギャップの軽減という機能は、問題場面や事象と生徒との間を親近感あふれるものにすることができる。問題場面などとの距離感が身近なものになればなるほど「おや？」「本当かな？」という感性も生じやすい。これは、動的幾何ソフトにより、「持続性のある追求を生む問いの生成」の場が生じやすいということではなかろうか。また、推測の妥当性を検証し、さらなる一般性を図る上での動的幾何ソフトの機能も述べられている。これは、「問いをもとにした追求過程を促進するもの」としての機能といえないだろうか。宮崎（2002b）は、中学校数学図形カリキュラムにおける「局所的な組織・体系の構成にかかわる内容や活動」を強調している。宮崎が「局所的な組織・体系の構成にかかわる内容や活動」の実現のために、コンピュータ活用を踏まえた図形学習にかかわる多くの先行研究にあたっている点は注目に値する。

海外のみならず、我が国においても動的幾何ソフトなどテクノロジーの活用を前提にした数学授業の試みが数多くみられる。さらに、テクノロジーの活用を前提にした中学校数学のテキスト（中高一貫を念頭においたテキスト）も開発されている。

例えば、東京書籍から刊行された「幾何学Ⅰ，幾何学Ⅱ」のテキスト（2002）では、次の順序で図形学習が進んでいく。

「円→相似→２つの図形の関係→三角形の特殊な点→点の位置→最終楽章　（幾何学Ⅰ）
→直交座標による幾何学→分度器を使わず角を自由に操る　（幾何学Ⅱ）」

この教科書は、グラフ電卓の使用を前提にして実際の操作や実験を踏まえながら、概念的な理解を図る段階が前半部にあり、その学習を素地としてさらなる追求をグラフ電卓の活用により実施していく後半部がある。前半部と後半部の２部構成により教科書が作成される。前半部では読み物的な要素を込めながら「持続性のある追求を生む問いの生成」がなされ、後半部で

はさらなる課題を次々に追求しながらの「問いをもとにした追求過程を促進するもの」が意図されていると捉える。

総じて、数学学習におけるテクノロジーの活用には次のような活動が期待できる。

○ある条件下でのデータや検討の結果を次々と画面上に導き出せる「実験」ができること
○操作を通して様々なデータから「予想」ができること
○画面上で次々と新たな試行を行い、考察を進めていける「修正」ができること
○予測や予想の妥当性を複数のデータから確かめられる「検証」ができること
○事象からグラフ、式からグラフなど「多様な表現」が使えること、そして自在に変換できること
○動きの中に普遍なるものを追究するといった「動的に考える」ことができること
○具体化、特殊化など多様な数学的考えのもととなる「測定」が自在にできること
○「黒板ー紙ー鉛筆」では味わえない、生徒の「学ぶ意欲」が高められること

「実験、予想、修正、検証、多様な表現、動的に考える、測定、学ぶ意欲」などのことばで語ることのできるテクノロジーの機能が、豊かな数学的活動を誘発し、推進するといえるのではないだろうか。

4. Geometric Constructorについて

今回の授業で活用したテクノロジー：GC（Geometric Constructor）は、愛知教育大の飯島康之[注]が開発した作図ツール（パソコンソフト）で、2次元の図形を自由に作図、変形、測定でき、動点の軌跡を残したり、拡大縮小、回転移動したりして、保存することができる。GCには、研究用には無料で使用できること、さまざまなＯＳ（NECの９８時代の DOS FMTOWNS DOS/V Windows）で使え、それぞれのデータを共有できること、実践例がたくさんあること、ＧＣのメーリングリストがあり、困ったときには気軽に相談できるなど環境がある等の利点がある。また、2005年までの「教育の情報化」（ミレニアムプロジェクト）に向けて、GC/JAVAも開発されている。このソフトは、コンピュータ個々にソフトをダウンロード（インストール）せずとも、インターネットに接続すればそのまま使用できること、さらに学校内のコンピュータの負担を軽減するために作品などをサーバー（現在は愛知教育大学内のコンピュータ）に保存できる点などが特色である。

GCについて、開発者の飯島（2002）はユーザーの立場に立ち、次の３点を強調する。

（ａ） ブラウザ内の部品としてソフトを開発すること，使用すること
（ｂ） ツール型ソフトにすることによる、教室内でのプレゼンテーションを行うこと
　　探求としての側面だけでない、動的幾何ソフトの活用の可能性
（ｃ） ユーザーの多様なニーズに会わせたコンテンツの開発と、ユーザーの自由度の拡大

5．一連の「円」の授業の概要

中学２年生に対する一連の「円」の授業を、次のような段階で構想した。
○の印は生徒が数学する数学授業に関わる活動であり、●はテクノロジーの活用に関する活動である。生徒が数学する数学授業の４つの枠組みのポイントにあたる部分に、GCの活用を位置づけると共に、自然な形で双方の活動の行き来が行われるようにした。

【授業の流れの概要】

準備段階：GCを用いて授業者が円にかかわるコンテンツ（プログラム）を開発すること … 前述の（a），（c）に該当

①「学習内容の概観」の段階

● 課題提示の際に問題場面や条件の理解のため、教室内でのプレゼンテーションを行うこと … 前述の（b）に該当

○ 課題に対する予想を、それぞれの意見として出し合うこと … 課題に対する追求

● 課題に対する予想の検証を動的にみせることで、課題に対するさらなる洞察を行うこと … 動的な見方を高めること

② 自分の問いをもつ段階

○ 課題に対して、疑問に思ったことやさらに追求してみたいことを挙げること

③ 問いの追求の段階

○ 各自の問いを発表しあい、互いの問いを知ること

● 各自の「問い」に対して、GCを活用して追求すること … 前述（a）に該当

○ 各自の追求過程を近隣の者同士あるいはテーマが近い者同士で議論しあうこと … 協同的な追求の場

○ クラス全体の場で、問いに対する答えや見方・考え方を話し合うこと … 協同的な追求の場

● 教室内でのプレゼンテーションを通して、生徒の発言の意味をおさえたり、さらなる洞察を促すこと … 前述の（b）に該当

○ 学級内あるいはペアのメンバーとの話し合いを通して、さらに追求してみたいことを「問い」として挙げること … 「自分の問い」を持つ段階

○ 各自の「問い」を疑問集としてまとめると共に、他者の問いを知ること … 他者の問いを通して「自分の問い」を強固に持つこと

● 各自の「問い」に対して、GCを活用してさらに追求すること

○● GCを活用しながら、自分の「問い」に対する考えを数学論文としてまとめること

○ 数学論文を踏まえた議論を学級内で行うこと

● 学級内での議論を通して、疑問に感じた点を教室内でのプレゼンテーションなどを通して「動的に検証する」ことなどにより、さらに洞察を深めること

● 他者の問いや数学論文などでの考察に対して、GCの活用により検証したり、確

認すること。また、検証や確認をさらに補う証明を考えようとすること。

④ 新たな問いをもつ段階

○ 疑問に思ったことやさらに調べてみたいことを「問い」として書くこと。

● GCを用いての検証　等々

「①学習内容の概観」の段階（本単元の授業の第1時）では、教師用コンピュータでGCを操作し、その画面を28型ＴＶに映した。生徒がパソコンを操作する際には、NECの9801DX４を２人で１台（計20台、全てスタンドアロン）使用し、DOS版のGCを使用した。これは2001年時点で静岡市の中学校には一人一台操作できるWindowsのパソコン教室が完備されているが、通常は技術家庭科で年間を通して使用するので、他の教科が常時使用することはできないためである。

「③問いの追究」の場面（本授業の第３,４,７,８,９,10時）では、使用したいときにパソコンを利用させた。必ずしも全員が常にパソコンを利用していたわけではないので、この場面では、結果として一人が一台を使用できる状態になった。

生徒達がGCを操作するのは本単元の授業が初めてで、ＧＣを利用するための事前の学習は行っていない。授業の効率を上げるため生徒に作図させることは避け、必要な図形ファイルはフロッピーで配布し、変形や測定の操作のみを教えるに止めた。「③問いの追究」の場面では、操作したいことや、必要な図形が個々に違ってくるので、生徒の求めに応じて、筆者がその場で個別に作図したり、操作方法を指導したりした。

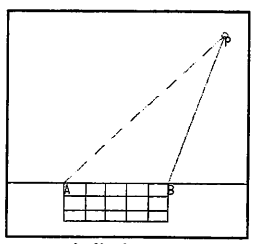
第13時以降で教師側から課題提示する際は、教師用ノートコンピュータでGCを操作し、その画面を液晶プロジェクターで黒板またはスクリーンに投影し提示した。

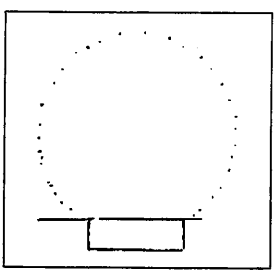
5．一連の「円」の授業内にあらわれた特徴的な生徒の活動について

（1）「持続性のある追求を生む問いの生成」とGCの活用との関わり

第１時　＜課題提示＞

サッカーゴールの見える角度がちょうど 30 °になる位置はどこだろうか？





○ ＧＣを操作し、パソコン画面上の P を移動させて 30 度になる点を見つける。

○ 見つかった点をモニターに貼った OHP シートにサインペンでマークしていく。

この課題は、条件を満たす点の集まり（軌跡）として円を捉えることが念頭にある。その一方、条件を満たす点を「静的な状況」で予測すること、その予測が正しいかどうかいくつかの

場合で「動的に動かした図をみる」ことにより確認すること、さらに「全体ではどうなっているのだろう」など一般性を意識することなどの活動が期待される。

実際の生徒の活動では、生徒たちが「疑問に思ったこと・追求したいこと」として、次のことが挙げられている。

(複数の生徒が共通に挙げた疑問や追求したいことがらのみ, 3／40とは、40人中3名が挙げたという意味)

○ 本当に円なのか？
- 30度のところに全部点をうったら、ちゃんとした円になるのか？ (3／40)
- 本当にどの点も円の線上にあるのか？

○ なぜ円になるのか？
- 円になりそうだけど、なぜ円になるのか？　不思議、驚いた！ (大多数)
- なぜ円のような形になったのだろうか？ (3／40)
- なぜ、∠APBがちょうど30度になる点は、円周上に集まるのか？ (3／40)

◎ 角度を変えたらどうなるのだろうか？
- 他の角度でもやってみたい、追求してみたい (2／40)
- 角度を変えたらどうなるのだろうか (2／40)
- 角度を変えても円になる？　他の形が出てくる？ (5／40)
- 角度を変えると円はどう変化するのだろうか？　大きさや位置は？ (4／40)

◎ ゴールの大きさを変えるとどうなるのだろうか？
- ABの直径を変えると、どんな変化があるのか？ (3／40)

○ 円の中心はどうなるのだろうか？
- どこを中心に円になっているのか？ (2／40)
- 円の中心とゴールを結ぶと、角度は何度になるのだろうか？ (2／40)

「本当に円なのだろうか？」「なぜ円になるのだろうか？」という問いは、テクノジーを活用せずとも必ず出てくるだろう。例えば、30°を内角にもつ三角定規を使っての提示や、各自がノート上で行う活動などが考えられる。GCによるプレゼンテーションが効いているのは、「一方を変化させたときに結果がどう変化するだろうか」という関数的な見方・考え方で場面を捉えようとする姿勢の高まりである。

例えば、上記◎の「角度を変えたら…」「ゴールの大きさを変えたら…」という問いには、角度や大きさが変わっても「円」という結果が変わるのか否かを知りたいという強い意識を感じる。また、「線の長さが長くなるにつれて、ゴール正面に近づいているゴール正面とはラインに垂直に引いた線のこと。だから見える位置とゴールまでの距離との関係を調べたい」、「三角形だけじゃなく、四角形や五角形だとどうなるのか？」という問いを挙げた生徒は、動的に問題場面を捉えることにより、その場面の構造を見抜こうとしたり、何らかの数学的な法則性を導こうとする姿勢がみられる。

GCの活用により、問いの生成については次のようなことがいえる。

○ 動的に課題場面を提示することにより、「たぶんこういった図形になるのでは」という洞察がどの生徒にも得られるようになる。

○ 「たぶんこういった図形になるのでは」という答えを予測することにより、答えに至る

ためにはどうすればよいかという解析的な思考が促される。

○ 動的にいくつかの場合をみせたり、点の動きによる形の変化を生徒個々が見いだすことにより、「一方が変わったら他方はどう変化するか」という関数の投影の見方がはたらく。

○ シミュレーションをみることから各自の問いを意識する段階、若干の予測に対するコンピュータ操作を通して、イメージ豊かに問題を捉えることができる。その結果、一般性や全称性を問う「問い」が生成される。

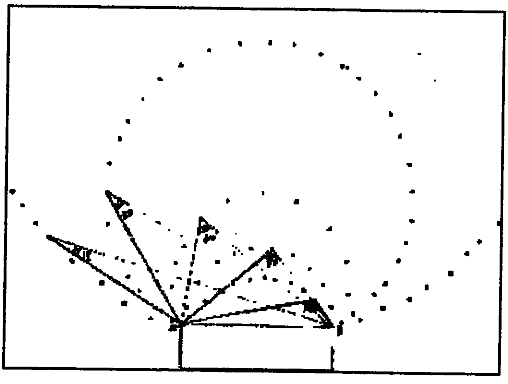
これらの活動は、問いが連続的に形成される「持続性のある追求を生む問いの生成」といえるのではないだろうか。

上原（2000）は、作図ツールによる学習スタイルの変化について、次のように述べている。「作図ツールでは、図形の変形機能により、発見した性質が作図条件によるものであるか、偶然作図した特殊なものであることを容易に判断できるため、様々なアイディアの検討が短時間に行うことができるようになった。」

上原が指摘するように、作図ツールの活用により、自分が操作した図が連続して変化し、測定値が常に表示され続けるため、「操作－観察－考察」のサイクルが短時間に連続的に繰り返される。この繰り返しは、その図形の性質が特殊なものか一般的なものかといった判断を促すだけではなく、次の変化を予測し、条件を変えたらどうなるだろうかといった創造的な問い（発想）を生み出すのにも大変有効といえよう。

（2）「問いをもとにした追求過程を促進するもの」とGCの活用との関わり

右の図は、「角度を変えても円になる？　他の形が出てくる？」という問いを持った生徒が、コンピュータ画面上で角度を変えると円がどのように変化するのかを追求したものである。



生徒がコンピュータ画面上で操作し、連続的に思考していった跡が見事に残されている。コンピュータを操作し、その結果を観察し、考察する、そしてさらなる問いを生み…といったようにサイクリックな学習活動を行っていた。

「操作－観察－考察」のサイクルと「問いの生成」とが絡み合う学習活動の中、第７～10時の３時間をテクノロジーの活用を前提にしたレポート（数学論文）作成の時間とした。ある程度、学びの深まりがみえる段階ゆえに、生徒個々のレポート（数学論文）の中には、次のことが顕著にみられる。

○ それまでの自分自身の学びの流れを忠実に再現しようとすること

○ 「書く」ことにより、過去の自分を意識し、過去の自分よりも一段階高い（異なる）段階にいる自分を意識すること

○ GCを活用した折の「操作－観察－考察」のサイクルが反映されていること
○ 新たな知見を得た「私」を意識することにより、さらなる疑問を提示しようとしていること
○ 自分の思考過程を振り返ることにより、同じ「問い」（テーマ）に対して他者はどのように考えているのかを意識すること

例えば、次ページに「ゴール裏側の円の追求から、円周角に伴って変化する円の大きさの関係をグラフ化する」生徒のレポート（数学論文）がある。この生徒のレポートは、次のような構成になっている。

【生徒のレポートの構成】

〈テーマ設定とその理由〉ゴール後ろ側の円はどうなっているのか？
後ろ側の円の大きさはどのように変化するのか？
その時の角度には何か関係があるのか？
〈追求１〉 線分ABを固定して、角度を30°の倍数分だけ変えて、その結果を調べること
〈追求２〉 線分ABの下側の情報から、上側を予測すること，その図形的な意味を考察すること
〈追求３〉 追求１と追求２の結果を結びつけること
〈追求４〉 弧ABを共通にもつ円周角とその円の直径との関係を調べ、グラフ化して関数関係を見いだそうとすること

例１の生徒は、主たる問い「ゴール後ろ側の円はどうなっているのか？」に対して、副次的な２つの問いを生成し、それぞれについて組織的に考察を行っている。その途上で、GCを用いてデータをとり、予測を立て検証を次々に行っている点が特徴的である。

例1：【ゴール裏側の円の追究から、円周角に伴って変化する円の大きさの関係をグラフ化】

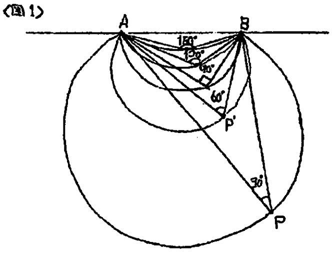
テーマ『ゴールの後ろ側の円はどうなっているのか？』　1/6

『ゴールの後ろ側の円はどうなっているのか？』

〈テーマ設定の理由〉
できた円をゴールの後の側まで延長して描いたら、どうなるかと思ったから。角度によってできる円の大きさが違うので
『後ろ側の円の大きさはどのように変化するするのか？』
『その時の角度に目角か関係があるのか？』
この2つを追求することにした。

〈追求1〉
線分ABを底辺として角度Pを30°.60°.90°.120°.150°と順に大きくして円を描いていく。

〈図1〉



60

テーマ『ゴールの後ろ側の円はどうなっているのか？』　2/6

角度Pを小さくすればするほど、無限に大きい円が描けそう。
逆に、三角形の和は180°だから、角度Pを180°にすると、
円が描けなくなる。つまり、角度Pは、0°より大きく、180°未満。

$\boxed{0° < 角度P < 180°}$

〈追求2〉
線分ABの上側に、追求1で描いた円の続きを予想する。

〈図2〉

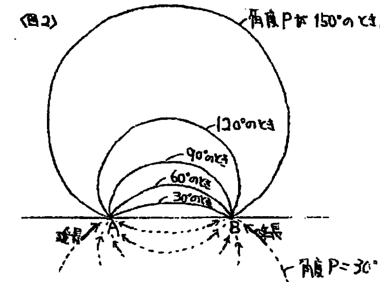
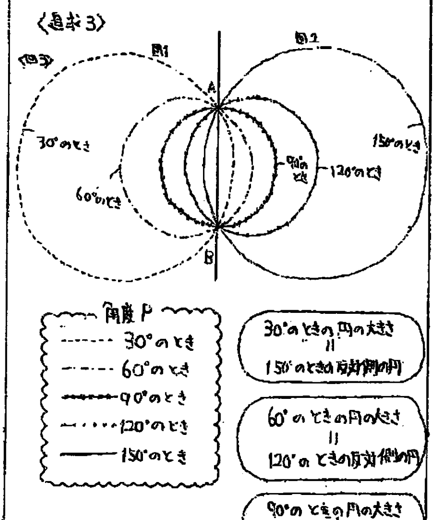


図1と図2は、線分ABに対して対称になりそう。
図1と図2を合わせて描いてみる。

60

テーマ『ゴールの後ろ側の円はどうなっているのか？』　3/6

〈追求3〉

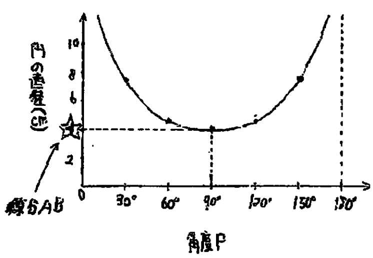


61

テーマ『ゴールの後ろ側の円はどうなっているのか？』　4/6

〈追求4〉
線分ABに垂直二等分線を引き、それぞれの円に対して直径を調べる。AB=4cm

角度P	30°	60°	90°	120°	150°
円の直径	7.5 cm	4.5 cm	4.0 cm	4.5 cm	7.5 cm



ミニレポートでは、角度Pを大きくすればするほど、円が小さくなると予想したが、0°から90°までは小さくなり90°から180°までは大きくなる。また、90°のとき円は一番小さくなり、その直径は線分ABと同じである。

62

例２【中心角と円の半径の関係、弦と半径の関係をグラフ化し、それらの関係を考察】

テーマ 中心角の変化に伴う弦に対する半径の長さ　1/7

THEME:中心角の変化に伴う
弦に対する半径の長さ

theme設定の理由

自分は、自分が不思議に思ったことは自分で解決したいし、自分は他人のレポートを読んでも新しい疑問・不思議に思ったことがなかったから。

追求方法：まずは測る。
そして表（グラフ）にする。
その後証明する。
以上。

本文

弦の長さを統一し、その弦を有する円を作図し、その円の半径を測る。それを表に、グラフに……

作図方法→たとえば60°の場合。
上記から中心角は60°
弦を底辺とし、中心角を頂角とする
二等辺三角形を書く。
多少誤差はあるがこれでよし。

193

テーマ 中心角の変化に伴う弦に対する半径の長さ　2/7

10°きざみで調べる。

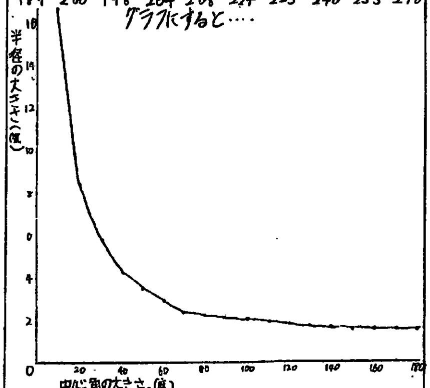
弦を3cmとしたとき、半径は……（190°以上は測らない。ムダだから）

ムダ、というより180°以上は測定困難になる。

中心角(度)	10	20	30	40	50	60	70	80
半径(cm)	16.8	8.5	5.7	4.3	3.5	3	2.5	2.3
積	168	170	171	172	175	180	175	184

中心角(度)	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180
半径(cm)	2.1	2.0	1.8	1.7	1.6	1.6	1.5	1.5	1.5	1.5
積	189	200	198	204	208	224	225	240	255	270

グラフにすると……



194

テーマ 中心角の変化に伴う弦と半径の長さ　3/

グラフを見て思うこと

・反比例のようになっている（実際に＝（？）になっているかどうかはわからないようだ…）

比例定数は？　中心角×半径の値を表の下の部分に書いてみた。

一定ではない。
しかもだいたい中心角の増加とともに増加している。

やはり反比例はしていないようだ。
誤差だけではわりきれない。

弦の長さ（3cm）をxとして、各半径をxとして考えてみる。

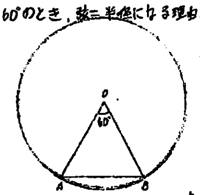
$10° \to \frac{28}{5}x$	$70° \to \frac{5}{6}x$	$130° \to \frac{8}{15}x$
$20° \to \frac{17}{6}x$	$80° \to \frac{23}{30}x$	$140° \to \frac{8}{15}x$
$30° \to \frac{19}{10}x$	$90° \to \frac{7}{10}x$	$150° \to \frac{1}{2}x$
$40° \to \frac{43}{30}x$	$100° \to \frac{2}{3}x$	$160° \to \frac{1}{2}x$
$50° \to \frac{7}{6}x$	$110° \to \frac{3}{5}x$	$170° \to \frac{1}{2}x$
$60° \to x$.	$120° \to \frac{17}{30}x$	$180° \to \frac{1}{2}x$

→このようになった。

195

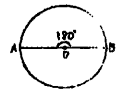
テーマ 中心角の変化に伴う弦と半径の長さ　4/7

60°のとき、弦＝半径になる理由は…



仮定より
$\angle AOB = 60°$
$AO = BO$（半径）なので
$\angle OAB = \angle OBA$
$\angle OAB + \angle OBA = 120°$
よって $\angle OAB = \angle OBA = 60°$
$\triangle OAB$は正三角形なので、
$AB = AO$.

中心角が180°のとき、



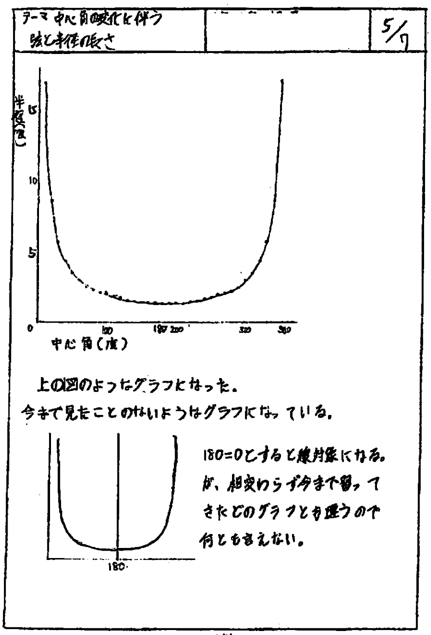
AB（弦）が直径になるので
半径は弦の$\frac{1}{2}$になる。

ここで重要なことに気づいた。

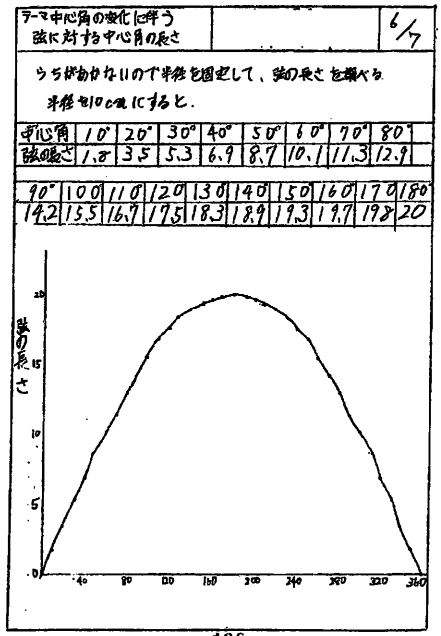
180°以上のときはどうなるの？

ではあらためてグラフを書くと……

196



197



198

例２の「中心角と円の半径の関係，弦と半径の関係をグラフ化し、それらの関係を考察する」生徒のレポートでは、自分自身の思考過程をレポートに反映させている点が大変特徴的である。例えば、自分自身の思考過程を客観的に振り返っている記述として、次のものがある。

【自分の思考過程を客観的に振り返っている記述】

（Ⅰ） グラフを見て思うこと

反比例のようになっている（実際にはｙ＝ａ／ｘにはなっとらんような…）

↓

比例定数は？　　中心角×半径の値を表の下の半分に書いてみた

一定ではない。　　　　←

しかもだいだい中心角の増加とともに増加している

↓

やはり反比例はしていないようだ

誤差だけではわりきれない

↓

弦の長さ（３㎝）をｘとして、各半径をｘとして考えてみる。

（Ⅱ）ここで重要なことに気づいた。

180°以上のときはどうなるの？

ではあらためてグラフを書くと…

（Ⅰ）の記述では、仮説を立て、その仮説が正しいかどうかをデータやグラフを再度見直すことで検討している。そして、ぱっと見で得られる「反比例ではないか」という見方を否定している。さらに、その見方の検証のため、弦の長さを固定して調べるという特殊化の考え、特殊な場合に固定して様々なデータをとっていくという関数的な見方（複数の変量がある際に、ある変量を意図的に固定して、他の変量の動き方を調べていくこと）を行っている。

テクノロジーの活用を前提としているからこそ、「弦の長さ（3㎝）をxとして…」という関数的な見方が生じたといえる。また、次々に条件を固定したり、ゆるめたとしても「データがとれる」という思いがあるからこそ、「予測→仮説→実験（操作）→観察→データ収集→データの考察→仮説の検証，反証→理由を考えること→新たな問いの生成」といった活動が生まれるといえる。

また、（Ⅱ）の記述は、数学の学びの深まりを与える記述である。
その一方、「180°以下のときにはこうなるんだ」という了解を得た「私」を感じているともいえる。思考のプロセスを経て、一段階高い立場にいる「私」の認識である。

例2の生徒は、こうした自分自身の思考過程を客観視する記述、すなわち内省的な記述がきれいにみることができる。そして、内省的な記述をし、自分の位置を再確認することよって次なる追求の原動力を得ているのではなかろうか。

次ページにあげる「円周角を構成する2辺の長さの変化をグラフ化し、角度を変えてその変化を考察」した生徒のレポートには、文章での記述は少ないものの、データから得られるグラフの形のおもしろさにぐいぐいと引き込まれる様子が描かれている。この生徒のグラフの背景には、三角関数や楕円方程式などが存在するが、そうしたものを出さずとも「条件を設定し、その条件下でデータをとり、座標平面上にデータをプロットしていく」作業を通して、その断面を知ることができる。作図ツールを利用し、測定値を記録・グラフ化すれば、その関係の断面、あるいは概要を中学生でも明らかにできるといえよう。

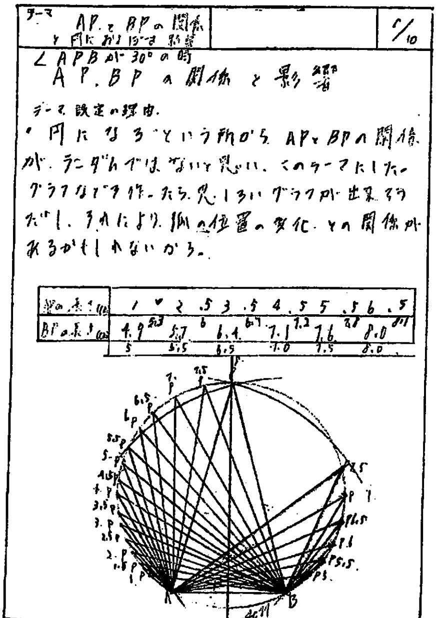
さらに、我々教師にとっても、あたりまえの展開となっていた図形の授業展開に対して、この生徒の思考過程は新たな視点を与える。第1時間目の導入課題に対して、等角を満たす点の集まりは円になりそうだね…という終わり方をすれば、それで一つの授業といえる。しかし、この導入課題に対して、角を固定し、等角を満たす条件下で「角をつくる2辺の長さ」には非常におもしろい関係があることを知ることにより、数学の奥深さを感じるであろう。まさに、導入課題を新たな視点で捉え直すことであり、テーマ性を豊かにもって題材をみることといえる。生徒の自主的な追求活動を通して、教師自身が新たな教材研究をしたともいえる。

両角（2003）は、テーマ性を強く持つ範例的教授・学習理論において「アスペクト性の認識」が非常に重要であることを指摘する。例えば、物理学でいえば、次のように「主体→対象」「対象→主体」という2つの段階を経ると、物事に対する認識が深まるという意味である。

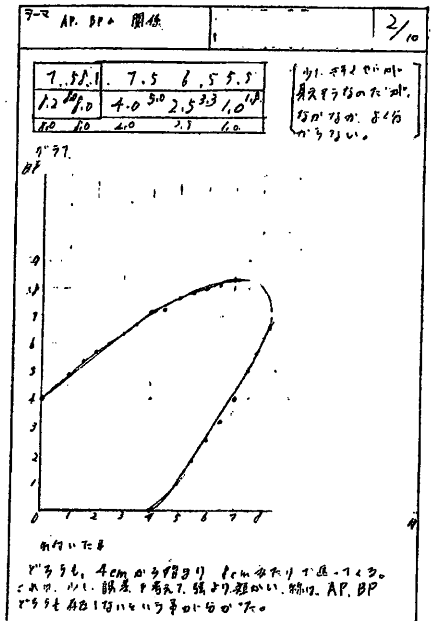
【第一段階】物理学の観方により、自然の様相（断面）を知る。そのことにより、私にとってのそれまでの自然の観方が変わること。

【第二段階】「ある観方から自然や対象を捉えている私」を意識すること。
また、ある観方に限定されている自然や対象を捉えている私を意識することにより、より多くの観方で捉えることの必要性や可能性を洞察すること。さらに限定された観方で捉えていた私の狭さを意識し、自然に対する畏敬の念を持つこと。

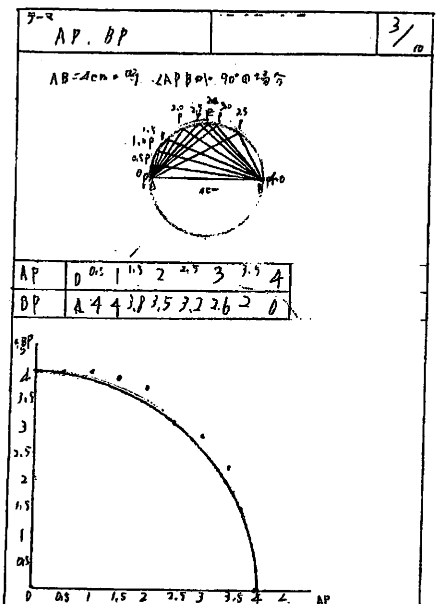
例３【円周角を構成する２辺の長さの変化をグラフ化し、角度を変えてその変化を考察】



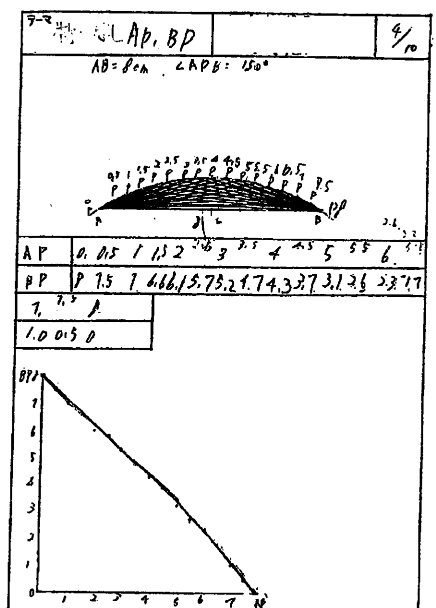
133



134



135



136

GCの活用による活動の拡がりに対して、レポート（数学論文）を書く活動が生徒にその時点での収束と、次なる活動のきっかけを意識させる機能を持つ。すなわち、GCの活用の活用と数学する活動との融合が、問いをもとにした追求課程を促進しているといえる。

さらに、学習指導レベルでは、題材に対して新たな観方で捉えることができる機能を有し、従来の図形の学習における「性質の発見→論証→定理化→その応用」のパターンと異なる学習展開の可能性がある。これまでは条件を変えても変化しない性質に着目し、それを論証することが図形の学習と考えられてきた。しかし、今回の実践から、条件を変えると変化するものに着目し、それがどのように変化するのかをグラフ化し、可能であれば数式化し法則化するという図形の探求的学習ができるのではないだろうか。

（「測定値の記録→グラフ化→関係把握→式化・法則化」という順序による学習）

その昔ガリレオが物体の落下を実験・観察からとらえ法則化していったように、作図ツールを活用したこの展開は、日常の事象を数学的にとらえようとする目が養われたり、その解明において数学がいかに有効であるかを実感できる。

(3) 一連の授業後の生徒の感想から得られること

今回の実践では、生徒はもちろんのこと、教師である筆者自身も初めて考えた数学的対象であるものが多かったので、どんな結果が出るのかは追究の過程から大変興味深く、ともに数学を探求する同士のような思いで、彼らの追究を見守った。その結果、たとえ小さいことであっても何らかの法則性が見えたときの喜びは、生徒・教師とも言葉にならないものがあった。
例えば、例３のレポートを作成した生徒は、本単元の学習の終わりに、次のような感想を書いている。

【例３の生徒の感想より】

僕が今回一番努力したことは、レポート作成だと思います。自分自身努力したし、作っているときから楽しくて、もっと色々な角度で試してみたいと思いました。・・・また、他の人、特にＩさんなどのレポートと内容が似ていたのにグラフが違っていたので、家や学校で考えたりしました。

先生から言われて、あとで考えて自分なりに違いを理解したときは、「ヨッシャー」と思いました。

図形がますます好きになりました。

疑問はすごくいっぱいありました。・・・ＧＣは、頭の中で図形を動かすとグチャグチャになるところを、目で見える形で表せるので、とても理解しやすく、説得力のある授業を受けることができました。また、少しずつ動かしていくと、測定値から規則性もつかむことができて、Goodだと思う。

その他、「円周角はなぜ等しいのか」や「円周角の定理の逆」「内接四角形の定理」といった本来学習する円の性質をレポートの中で追究した生徒達も、GCを使った結果から「なぜそうなるのだろうか」という疑問を持ち、自分のテーマとして追究していった跡が伺えた。これもGCを操作することにより、多くの事例を観察した結果から、なぜそうなるのだろう？という疑問が沸き、論証したいという思いが生徒の中に強く生まれたからではないかと思う。

6．一連の円の授業を通して得られること

清水（2002）は、テクノロジー・ディフュージョン（Diffusion）研究の必要性を次のように述べる。

「教育工学においては、教育革新（Educational Innovation）の拡散（Diffusion）、もしくは普及の研究が盛んである。新しい指導法やテクノロジーの教育活用が開発されたとき、それがどうしてディフューズしたのか、もしくはしなかったのか、ということの要因を探り、その成果をこれからの教育革新の普及に役立てようとすることがディフュージョン研究の目的である。」

同様に、飯島ら（2002）もテクノロジーを日常の数学の授業で活用すること、「いつでも・どこでも・誰でも」という視点で、気軽に用いることの大切さを強調している。

今回の一連の円の授業は、こうしたテクノロジー・ディフュージョンとしての側面を持ち、2005年から本格的に実施される「各教室、最低1台のパソコン、1台のプロジェクター」という環境下での授業の一つの典型となり得る。また、GCは生徒個々が自宅から自由に使用できる環境にあることから、非常に興味を持った生徒が自宅学習の中で「さらなる追求をする」可能性も秘めている。

そうした側面をもつ一連の円の授業実践を通して、次のことが明らかになった。

① テクノロジーを活用して動的に問題場面を提示することなどが、生徒の学習意欲を高め、持続性のある追求を生む問いを生成する。特に、図形学習に関わる題材に対して、「一方を変えたら他方はどうなるか（結果は同じだろうか）」という関数的な見方、「みえた状況以外の場所はどうなっているか（全体像はどうなっているのか）」という一般性や全称性を生む見方、答えの予測がしやすくなることによる解析的思考が促されること、などが特徴的である。

② テクノロジーの活用を前提にすることにより、「予測→仮説→実験（操作）→観察→データ収集→データの考察→仮説の検証，反証→理由を考えること→新たな問いの生成」といった活動が自然な形で生じる。これは、観察・操作・実験による数学的活動を重視する流れとも符合し、これまでにない形の図形学習を構築する可能性がある。

③ テクノロジーの活用、生徒自身の考察や学級での話し合い活動などが交互に行われた後に、生徒個々が自分のテーマに対するレポート（数学論文）を書くことは、自分自身の活動を反省的に振り返り、さらなる課題を明らかにする上で効果がみられる。

④ テクノロジーの活用を前提として作成した生徒のレポートには、内省的な記述が多いもの、得られた事実を次々と克明に記述するものなど、多様なものがみられる。

⑤ レポート（数学論文）を作成することにより、それまでの自分とは異なる「私」を意識できる可能性が高い。こうした観方の変換は、「問いをもとにした追求活動を促進するもの」の重要な要素となり得る。

7．今後への課題

おわりに今後の課題（研究の方向性）を3点挙げ、本研究のまとめとしたい。

① テクノロジーの活用と生徒が数学する数学授業との融合に関する更なる考察

本稿では、「持続性のある追求を生む問いの生成」「問いをもとにした追求過程を促進

するもの」という2つの点に絞って、テクノロジーの活用と生徒が数学する数学授業との融合による効果を検討してきた。その効果に関しては、より質的な面から詳細な考察が必要となる。本稿では、一連の円の授業の中で特徴的な活動をした生徒に焦点をあてたが、より多くの生徒に対して考察対象を拡げる必要がある。

その際、「内省的な記述」に関わる先行研究、「書くこと」の学習者に与える正と負の影響、テクノロジーの活用を前提とすることによるメリットとデメリットの再検討を踏まえて、さらなる研究を行いたい。

② GCと「生徒が数学する」数学の融合を図る新たな単元展開の開発

平成14年度から「円」の学習は2年生に移されると同時に、その内容を大幅に削減され、中学校で学ぶ図形の中心的題材とは言えなくなった。本研究をすすめるためには、今後どの学年のどの単元においてこれを行えばよいかが課題となる。

現在その第一候補として考えているのは、「三平方の定理」の単元である。三平方の定理は、3年生の単元であることや、もともと図形と数式が融合した単元であることから、本研究を進める上で最も都合がいい用に思われる。その機会があれば、来年度以降の早い段階で、この単元の展開を考え、挑戦してみたい。

③ 選択教科でのGCを活用した「生徒が数学する」数学のありかたを再考する

過去2年間の3年生の選択教科では、特に単元や題材を限定せずに、GCを使った「生徒が数学する」数学の学習を行っている。週1時間×13回程度の授業であるため、できることはおのずと限定されてくるが、選択教科という自由度があるために、必修教科の時間に比べて実験的・挑戦的に行えることは多い。

例えば、題材を「円」に限定すれば、大枠で本研究の実践をそのまま生かすことは可能であり、これも来年度以降挑戦していきたい。

また、選択教科全体の時間数が増えていることから、週当たり2時間同じ教科を学習する選択教科も学校内で議論できるのではないかと思われる。これまでの週当たり1時間の授業では、前時に取り組んだことを思い出すのにも時間がかかるなどの難点がある。他教科にも働きかけて、学校全体で選択教科のあり方にについて議論していく中で、週2時間同一教科の方向にもっていきたい。

【附記】本研究は、平成14年度静岡総合研究機構・学術教育研究推進事業費補助金「数学学習における内省的な記述の効果に関する実証的研究」(研究代表者：両角達男)、平成14〜16年度科学研究費補助金　若手研究B「範例的教授・学習理論に基づく数学授業の教授と数学的活動に関する研究」(研究代表者：両角達男) の支援を受けて行われている。

【引用文献・参考文献】

(注) 飯島康之（愛知教育大助教授）の開発したGCに関する情報は、下記のURLに詳しい。
GC/WINについて　http://www.auemath.aichi-edu.ac.jp/teacher/iijima/index.htm
GC/JAVAについて　http://iijima.auemath.aichi-edu.ac.jp/gcjava/
武藤は、飯島を中心に行われたミレニアムプロジェクトのメンバーとして参画している。

(1) 岡本光司・静岡大学附属静岡中学校数学科共著 (1998).「生徒が『数学する』数学の授業」 明治図書

(2) 武藤寿彰 (2002)「生徒が数学する円の学習」. T^3Japan第6回東京大会発表資料

(3) 両角達男 (2002)「中学校数学における関数領域の研究動向と方向性について」. 第35回数学教育論文発表会「課題別分科会」発表収録, pp.138-144.

(4) 宮崎樹夫 (2002 a)「数学教育における証明の研究の諸側面と局部的様相 ーカリキュラム開発研究に着目してー」. 第35回数学教育論文発表会「課題別分科会」発表収録, pp.176-180.

(5) 宮崎樹夫 (2002 b)「局所的準体系で演繹の基となる命題の正しさを探る活動 ー中学校数学の図形領域における活動の様相ー」. 筑波数学教育研究　第21号. pp.21-30. 筑波大学数学教育教室

(6) 東京書籍 (2002). Geometry I (幾何学 I), 公庄庸三編著

(7) 東京書籍 (2002). Geometry II (幾何学II), 公庄庸三編著

(8) Lyn D.English (2002) ."Handbook of International Research in Mathematics Education", Lawrence Erlbaum Associates, Chapter26～Chapter30.

(9) 上原永護.「CABRI IIの部屋」から～CABRI IIの活用事例の紹介～. THE 4rd T^3JAPAN ANNUAL MEETING ,TOKIO August 7-9, 2000

(10) 両角達男 (2003).「範例的教授・学習における価値の追求と数学授業への活用」. 静岡大学教育学部研究報告（教科教育学篇）第34号. pp.47-65.

(11) 清水克彦 (2002).「テクノロジー・ディフュージョン：算数・数学科におけるその日常化に向けて - 何が問題で、何が求められているのか - , 日本数学教育学会第35回数学教育論文発表会,「課題別分科会」発表集録, pp.204-205.

(12) 飯島康之 (2002).「「教育の情報化」に際してここで検討したいこと」,
友田勝久 (2002).「教育用ソフトウェア開発に関する諸問題について」,
早苗雅史 (2002).「数学教育におけるテクノロジー活用と今後の展望」,
川上公一 (2002).「テクノロジーを利用した授業 - その現実・効果と問題点・今後の課題 - 」, 馬場英顕 (2002).「「面白い」がテクノロジー利用をひらく - GCはなぜ川崎で普及したか、いかにしてさらに広げるか - 」, 上掲書. pp.190-205.

(13) 飯島康之 (2002).「GC/Javaの利用形態とソフト・コンテンツ開発の方向性 - ツール型ソフトのゆくえに焦点をあてて - 」, 日本数学教育学会, 第35回数学教育論文発表会論文集, pp.463-468.

(14) 井戸寛 (2001).「学習意欲を高める数学学習の方法に関する研究」静岡大学卒業論文

(15) 桜井茂男 (1997).「学習意欲の心理学」 誠信書房

(16) 日本数学教育学会編 (1997).「日本の算数・数学教育　Year book 1997　学校数学の授業構成を問い直す」 産業図書