数学的に推論する力を養う指導に関する研究

A　Study on Teaching to acquire the Ability of Mathematical Reasoning

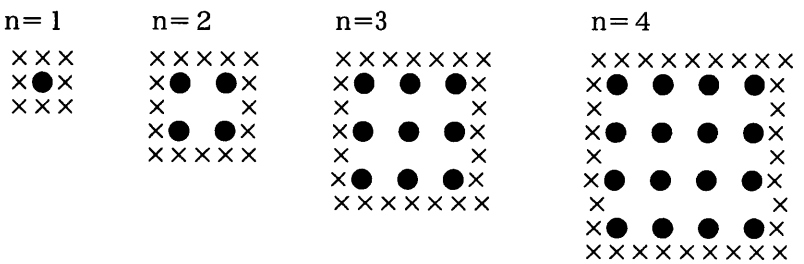
園田博人・竹下知行・熊倉啓之
Hiroto SONODA,Tomoyuki TAKESHITA,Hiroyuki KUMAKURA

1．はじめに

2000年度実施のPISA調査で，次のような問題が出題された。（問1，問2省略）

ある農夫が，りんごの木を正方形のかたちに植えます。風からりんごの木を守るため，その周りに杉の木を植えます。

下は，この状況を示した図です。この図から，りんごの木の列の数（n）によって，どのようにりんごの木と杉の木が並んでいるかがわかります。



問3　この農夫が，木の列の数が多い，もっと大きなりんご園を作りたいと考えたとします。この農夫がりんご園をもっと大きくするとき，りんごの木の数と杉の木の数では，増え方が早いのはどちらですか。どのように求めたかも説明してください。

この問３の結果は，OECD平均で13％であり，最も難しい問題であった。日本の結果も，正答率21％で他の問題と比較して最低であった。しかも，無答率が41％で，これは参加国中で最も高かった。この問３は，１次関数と２次関数の変化の仕方の違いに着目すれば答えられる問いだが，この違いについて中学で学習しているにも関わらず正答率が低い原因は何であろうか。いくつかの要因が考えられるが，その１つとして，「ことがらが成り立つ理由を説明すること」について，苦手意識を持っている生徒が少なくないことが挙げられる。このような生徒に対して，数学の授業を通して「数学的に推論する力」を養うことは重要であると考える。このことが，本研究を行う動機の１つである。

2．研究のねらい

「数学的に推論する力」についてとらえ，数学的に推論する力を養う指導のあり方を，授業実践を通して明らかにすることが，本研究のねらいである。

3．研究の方法

① 「数学的に推論する力」の意味について明らかにする。
② 「数学的に推論する力」を養うための指導のあり方について，文献等を通して明らかにする。
③ 授業実践を通して，「数学的に推論する力」を養うためのよりよい指導を追究する。

4．「数学的に推論する力」のとらえ方

平成10年版中学校学習指導要領の数学の第２学年の目標の中で，次のように「数学的な推論」について触れている。(傍線は筆者)

「基本的な平面図形の性質について，観察，操作や実験を通して理解を深めるとともに，図形の性質の考察における数学的な推論の意義と方法とを理解し，推論の過程を的確に表現する能力を養う。」(2000，文部省)

数学的な推論の内容については，学習指導要領解説に，「数学的な推論には，帰納，類推，演繹の三つの方法がある。」(文部省，2001）と述べている。さらには，「事象の数理的な考察においては，帰納的な考え方，演繹的な考え方，類推的な考え方など数学を作り，発展させる数学的な見方・考え方が用いられる」(文部省，2001）のように，３つの考え方について触れている。

それぞれの内容については，たとえば次のような説明がある（算数科授業研究の会，2001)。

ア．帰納的に考える：いくつかの具体的な事例から，それらが含まれる集合についての性質などを一般的に推測すること。
イ．類比的に考える：２つの集合がいくつかの性質を共通に持ち，一方にある性質があるとき，他方にもその性質があると推測すること。
ウ．演繹的に考える：前提から三段論法などの論理的形式によって結論を導き出すこと。

さらに，これらの具体例として，次のようなものを挙げている。

(アの例)．１＋２＋３＝６，２＋３＋４＝９という２つの例から，すべての整数の場合で，連続する３数の和は，３の倍数になると推測する。
(イの例)．円と直線，球と平面は似たような関係にある。円は中心を通る直線で面積が２等分される。だから，球は中心を通る平面で体積が２等分されると推測する。
(ウの例)．四角形の内角の和は360度である。平行四辺形は四角形である。したがって，平行四辺形の内角の和は360度である。

ア，イは，ある性質を発見したり，予想したりする上で，重要な方法であるといえる。実際，これまでの数学の定理・公式の多くは，帰納や類推によって発見されてきたといっても過言ではない。昭和33年版，昭和44年版の学習指導要領では，第２学年の指導目標で，「論証」という用語を用いていたが，昭和52年版以降の学習指導要領で，「数学的な推論」が代わりに用いられるようになった。このことについて，出石ら（1978）は，「中学校の段階では（中略）公理から出発するというよりも，それまでに操作的，経験的に理解した事項を認めた上で，それを根拠として，論理的思考により発展させていこうとするものである。」として，帰納や類推の意義を述べている。

一方で，帰納や類推が，性質が成り立つことの説明として不十分である，ということの認識が重要であることは言うまでもない。

いずれにせよ，ア～ウの推論の方法は，数学の課題を解決していく上で，欠くことのできないものであるといえる。

そこで，本論文では，「数学的に推論する力」を，「帰納的に推論する力」，「類比的に推論（類推）する力」，「演繹的に推論する力」の３つでとらえることとする。

５．数学的に推論する力を養う指導

（１） 帰納的に推論する力を養う指導

「帰納的な推論」や「類推」の扱いは小学校・算数が中心であり，中学校・数学では「演繹的な推論」の扱いが中心になる，といわれることもある。しかし，中学校においても，「帰納的な推論」が指導される場面は少なくない。たとえば，次のような場面である。

ア．正の数・負の数の計算法則＜中１＞

正負の数のいくつかの計算結果をもとに，交換法則や，結合法則，分配法則が成り立つことを帰納的に推論する。

イ．多角形の内角の和＜中２＞

三角形，四角形，五角形，…，の内角の和を順に求め，n角形の内角の和を帰納的に推測する。その後に，式を用いて演繹的に証明する。

帰納的な考え方の指導について，片桐は次の点を指摘している。(1988，明治図書)

１） 帰納的な場面が有効な場面で，帰納的な考え方をしようとするように指導すること。

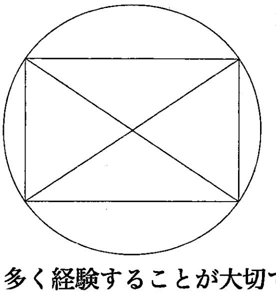
２） データに共通に見られる性質やルールを見出すのに，さらに新しいデータを求めて，これについて見出した一般性が成り立つかどうかを調べてみるという態度をとらせること。

特に２）については，軽視しがちだが重要な指摘といえる。たとえば，次のように，帰納的な推論が誤った結論を導くこともあるからである。

例）円周上にn点取り，点と点を線で結んで，それらの線によって円が分割される最大数を求めたい。帰納的に調べると，

n＝１のとき　２
n＝２のとき　４
n＝３のとき　８
n＝４のとき　16

ここまでの結果から，2^nと推測されるが，
実はn＝５のときを調べると，31となり，
推測が誤りであることが確かめられる。



n＝４のとき
８

帰納的に推論する力を養うためには，推論する場面を多く経験することが大切である。そのためにも，数学の様々な性質について，教師がすぐに結論を述べるのではなく，まずは自分で予想を立てさせる等，できるだけ自分で考えるように指導することが重要であると考える。

（２） 類比的に推論（類推）する力を養う指導

中学校において，「類比的な推論（類推）」が指導される場面として，たとえば，次のような場面がある。

ア．数量を文字を使って表す＜中１＞

50円の鉛筆を５本買うときの代金は，50×３で求められる。

同じように考えると，50円の鉛筆をa本買うときの代金は，50×aで表せる。

イ．小数や分数の係数を含む連立方程式の解き方<中２>

小数や分数の係数を含む１次方程式は，両辺を何倍かして，係数が整数になるようにすると解きやすい。同じように，連立方程式の場合も，両辺を何倍かして係数が整数になるようにすれば，解きやすい。

類推的な考え方の指導について，片桐は次の点を指摘している。(1988，明治図書)

１）　結果や方法について見通しを持とうとする態度をとり，「似た問題はないか」「同じことが言えそうか」「同じ方法でできそうか」「その方法をたどってみよう」といった示唆によって，類推をしようとする考え方に進むこと。

２）　類推したら，必ずそれを確かめること。演繹的に証明することが望ましい。

２）の指摘は，「帰納的に推論する力を養う指導」で述べたことと同様である。たとえば，次のような例をあげることができる。

例）３辺の長さがすべて等しい三角形は，正三角形である。だから，４辺の長さがすべて等しい四角形は，正方形であると推測される。

しかし，実際には，ひし形のように，４辺の長さがすべて等しい四角形は正方形とは限らない。

類比的に推論する力を養うためには，帰納的に推論する場合と同じように，推論する場面を多く経験することが大切である。そのためには，教師が必要に応じて「似た問題をやったことはないか」「同じような数や図形の集合で成り立ったことは，いえるだろうか」といった発問を意図的に生徒に投げかけていくことが重要であるといえる。

（３）　演繹的に推論する力を養う指導

中学校において，「演繹的な推論」が指導される場面は，図形の内容で多く見られるが，それ以外にもある。たとえば，図形も含めて次のような場面がある。

ア．合同条件を用いた図形の証明<中２>

平行四辺形の性質を，定義をもとに証明する。

イ．相似条件を用いた図形の証明<中３>

中点連結定理を，相似条件をもとに証明する。

ウ．文字式を用いた数の性質の証明<中２，中３>

「連続する３数の和は３の倍数である」ことを，文字を用いて証明する。

「連続する２数の平方の差は，２数の和に等しい」ことを，文字を用いて証明する。

演繹的な考え方の指導について，片桐は次の点を指摘している。(1988，明治図書)

１）仮定からどんなことがいえるか，ということを考えていくようにする。

２）結論がいえるには，何がいえたらよいかを考える。

３）反例による証明の方法を理解する。

４）演繹的に説明したときに，そこで「何を根拠にしたのか」について注意を向けさせる。

記述された証明を読むとき，あるいは証明を記述するときは，１）のようにして，仮定から順に結論へと思考を進めていく。しかし一方で，２）のような逆からの思考も，実際に証明問題を考える上ではよく使われ，重要な視点といえる。「仮定からは何がいえるか」「結論がいえるためには何がいえればよいか」ということを，いつも生徒に意識させる指導が重要である。

また，３）については，命題が真でないことを証明するのに使われる考え方である。教科書等では，真でない命題は取り上げられないため，反例による証明はほとんど扱われないが，生徒の反応の中に，真でない命題が度々登場する。たとえば，「辺の長さがすべて等しい六角形は正六角形である」などの命題である。このような場面で，反例による証明を積極的に取り上げることが重要であると考える。

上記１）～４）以外にも，いくつかの指導上の留意点を挙げることができる。

５）「演繹的に推論する意義」を理解させる

小関ら（1987）は，「図形の論証の意義」の重要性を述べ，意義についての生徒の理解の実態を発達的に解明し，意義を理解させるための指導として，「三角形の内角の和が180°である」ことの証明を，実験・実測による帰納的な推論と比較した討論を取り入れた授業を紹介している。また，国宗ら（1997）は，文字式による論証の場面において，「帰納的な説明でも説明として十分である」と考えている生徒が少なくない実態を明らかにし，「文字式による論証のもつ一般性」についての理解を深める指導の重要性を述べている。

これら先行研究から明らかなように，演繹的な推論ができるとしても，一方で，帰納や類推でも十分であると考えるならば，真の意味で「演繹的に推論する力」が養われたとは言えないであろう。したがって，演繹的に推論する意義を理解させる指導は重要であるといえる。

６）推論のしくみ，特に三段論法について理解させる。

推論のしくみとして，仮定⇒結論という流れを理解すると同時に，この推論過程に三段論法が多く使われることを理解させることも重要である。たとえば，次のような証明がよく扱われる。

例）△ABCにおいて，AB＝AC　ならば　∠B＝∠C　を示せ。

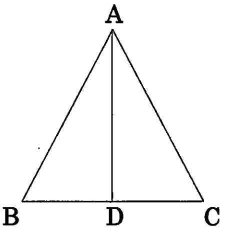
証）∠Aの２等分線ADをひくと，△ABDと△ACDにおいて，

AB＝AC【仮定】

∠BAD＝∠CAD，AD＝AD（共通）

よって，△ABD≡△ACD【性質】

したがって，∠B＝∠C【結論】



この証明の中では，

【仮定】⇒【性質】，【性質】⇒【結論】したがって，【仮定】⇒【結論】

のように三段論法が使われている。実際には，三段論法を特に意識しないでも，ほとんどの生徒は上の推論を正しいと認めることができるであろう。そのためか，三段論法について，現行の算数・数学の学習の中では，必ずしもきちんと指導されていない。しかし，推論の根拠としての三段論法を意識することは意味あることであり，その後の学習にもつながることから，重要な指導内容であると考える。

７）循環論法による推論は誤った推論であることを理解させる。

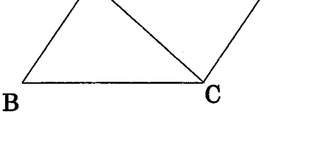
生徒の証明問題の答案の中に，実際に，循環論法による証明を見かけることがある。また，正しい証明が記述できたとしても，循環論法による証明の誤りを指摘できない生徒もいる。たとえば，次のような生徒の証明である。

例）▱ABCD　⇒　AB＝CD

証）△ABCと△CDAにおいて，

AC＝CA（共通）

AB＝CD（平行四辺形だから）



$\angle BAC=\angle DCA$

よって，$\triangle ABC\equiv\triangle CDA$

したがって，$AB=CD$

このような循環論法による証明を意図的に取り上げて，誤りを指摘させるような指導も重要であると考える。

6　数学的に推論する力を養う授業実践

数学的に推論する力を養う授業実践として，以下に，第３学年の「相似な図形」と第１学年の「比例・反比例」を取り上げる。

（1）第３学年の図形領域における学習指導

①「相似な図形」における指導

中学校学習指導要領の図形学習の目標は，「図形に対する直観的な見方や考え方を伸ばすとともに，図形の性質の考察における数学的な推論の方法について理解させ，論理的な思考力を伸ばす」である。第３学年では「図形の相似や三平方の定理について，観察，操作や実験を通して理解し，それらを図形の性質の考察や計量に用いる能力を伸ばすとともに，図形について見通しをもって，論理的に考察し，表現する能力を伸ばす」と示されている。

中学１年では「図形の基本的な性質」について学習し，２年では「三角形・四角形」で証明の意義や方法を学習し，演繹的な推論についての理解を深めてきた。そこで，第３学年の図形学習の最初の単元である「相似な図形」では，三角形の相似条件や平行線と比に関する性質などを理解するとともに，これまで学習した三角形や平行四辺形などに関する定理の有効性や演繹的な推論のよさを実感させながら学習を進めていく。

三角形の相似条件は，平行線の性質，三角形の合同条件とともに演繹的な推論の根拠（「図形の基本性質」）であるので，三角形の合同条件と対比させながら直観的，実証的に取り扱うことによって理解させる。また，平行線と比の性質や中点連結定理は，はじめて出てくる図形の性質で，これらの性質を利用して図形の角度や辺を求めたり，演繹的な推論を進めたりするなど，さまざまな課題の解決において有効であることが実感できる大切なところである。したがって，図形をかいたり，測ったりするなどの操作活動を通して，発見させることが大切だと考えている。そして，これらの性質は三角形の相似条件を利用した演繹的な推論によって証明されることを確認し，三角形の相似条件の有用性を知る機会としていく。

②「相似な図形」の授業計画

「相似な図形」は３年生ではじめての図形領域である。また，三角形の相似条件は，平行線の性質，三角形の合同条件とともに演繹的な推論の根拠（「図形の基本性質」）となる。相似な図形の学習全体について，以下のような指導計画を立てた。

第１時　【相似な図形】

- 拡大図をかく操作を通して，相似な図形の意味を理解する。
- 相似な図形の性質を理解する。

第２，３時　【三角形の相似条件】

- 相似な三角形の作図を通して，三角形の相似条件を理解する。
- 相似の位置，相似の中心の意味及び用語を理解する。

第４，５，６時　【三角形の相似条件の利用】

・三角形に補助線を引くことによってできる三角形が相似になることを，三角形の相似条件を利用して，説明することができる。
・三角形の相似条件の利用から，「平行線と比の定理」「比と平行線の定理」及び「中点連結定理」につながる図形の性質を理解することができる。
・三角形の相似条件を利用して，辺や線分の長さを求めることができる。

第７，８，９時　【相似の位置の考え方の利用】
・相似の位置の考え方を利用して，三角形の中に最大の正方形を作図する。
・図形の証明に，三角形の相似条件を活用することができる。

第10，11，12時　【平行線と比】
・線分ＡＢを３等分する点を作図する方法を考察する。
・線分の３等分点の作図方法が正しいことを証明する学習を通して，「平行線と比の定理」を理解する。

第13，14時　【比と平行線】【中点連結定理】
・線分の３等分点の作図方法が正しいことを証明する学習を通して，「平行線と比の定理」及び「中点連結定理」を理解する。

第15時　【相似の利用】
・平行線と比の性質を用いて，線分の長さの比を求めることができる。

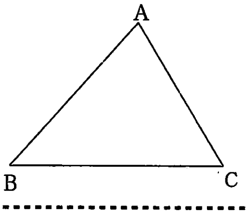
図形領域は演繹的な推論を用いる場面がたくさんある。演繹的な推論を用いることを繰り返すことで，推論する力を伸ばすことができると考える。また，推論する場合に，その方法がひとつではなく，いろいろな方法が考えられる課題の方が，より有効であると考えられる。そこで，数学的に推論する力を養う場面として，第４時（相似な三角形をつくる），第７時（三角形の中に正方形を作図する），第10時（線分の３等分点を作図する）の授業を設定した。

③　授業の実際と生徒の考え方

「三角形の相似条件の利用」－第４，５，６時の実際－

三角形の相似条件を扱った後に，与えられた三角形に補助線を引き，図形の中に相似な三角形をつくる課題を扱う。補助線をどのように引いたら相似な三角形ができるのか，見通しをもって，その理由を根拠を持って説明する場面を授業の中に設定した。

問題Ⅰ　三角形ＡＢＣに補助線を１本引いて，相似な三角形をつくってみよう。

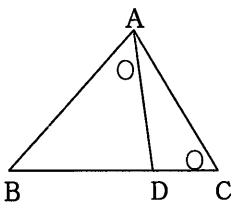


【補助線を引くためのアイディア】

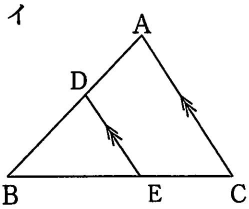
1）　等しい角をつくる	4）　等しい辺をつくる
2）　平行線をひく	5）　垂線をひく
3）　中点をとる	6）　辺の比を等しくする

生徒が補助線を引くためのアイディアとして，上の６つが考えられると予想した。生徒は補助線を引いたときにできる三角形が，３つの相似条件「３組の辺の比が等しい」「２組の辺の比とそのはさむ角がそれぞれ等しい」「２組の角がそれぞれ等しい」のいずれかを満たしそうな補助線がないか，見通しを立てて考えると予想される。多くは「２組の角がそれぞれ等しい」という相似条件を使った説明になるが，３つの相似条件をどれも使うことにこだわらずに，見通しを立てて，考えた理由について説明をさせていきたいと考えた。三角形の相似条件を利用した演繹的な推論では，相似条件のうち「２組の角がそれぞれ等しい」がよく用いられることも理由としてあげられる。

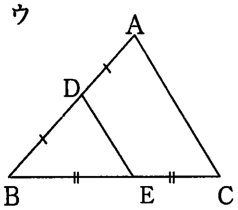
実際に生徒が作図したのは，次のア～キである。

ア


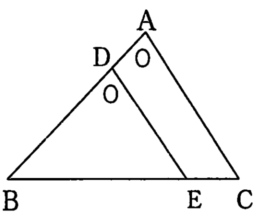
∠ＡＣＢ＝∠ＤＡＢ

イ


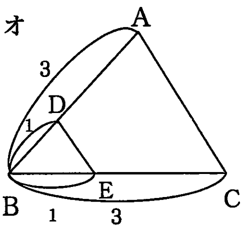
ＡＣ//ＤＥ

ウ


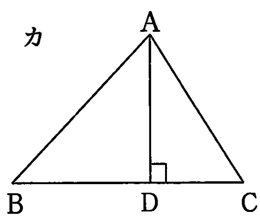
ＢＤ＝ＡＤ，ＢＥ＝ＥＣ

エ


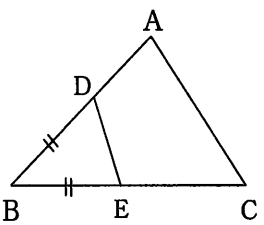
∠ＢＡＣ＝∠ＢＤＥ

オ


ＢＤ：ＢＡ＝ＢＥ：ＢＣ
＝１：３

カ


ＡＤ⊥ＢＣ

キ


ＢＤ＝ＢＥ

イのように平行な補助線を引くことにより，平行線の同位角が等しいことを利用して「２組の角がそれぞれ等しい」相似な三角形をつくる生徒が多かった。平行線の同位角や錯角が等しいという性質は，相似な図形では有効であることを感じているようである。このことは，以下に述べる問題Ⅱでの解決の様子にもよく現れていた。

ア，エのように等しい角を他の場所（頂点や，辺上）にとるように補助線を引く生徒も多く見られた。エについては，同位角が等しいからＡＣ//ＤＥであることを説明し，イへとつなげている生徒の様子も見られた。

ウ，オについては，「２組の辺の比とそのはさむ角がそれぞれ等しい」相似な三角形をつく

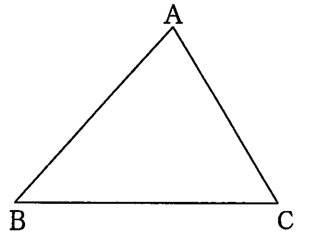
るために，２つの辺を相似比が１：２，１：３になるように補助線を引いたものである。オは線分の$\frac{1}{3}$の長さを作図しなければならないので，正確には補助線を引くことができないが（３等分線はまだ未習），１：３の比にすることができるのであれば，相似な図形ができることを確認することができた。

カ，キについては，相似な三角形ができない例である。もとの△ＡＢＣの∠Ａが直角であると考えてしまい，カのような補助線を引く生徒が何人か見られた。間違いであることを確認した後に，△ＡＢＣが直角三角形の場合には有効な補助線であることを押さえた。また，キについては，２組の辺の比が等しくならないことを確認した後で，△ＡＢＣがＢＡ＝ＢＣの二等辺三角形の場合は有効な補助線であることを押さえた。

「垂線」や「等しい辺をつくる」補助線は，問題Ⅱでは任意の三角形であっても有効な補助線として機能するため，問題Ⅰでは直角三角形や二等辺三角形などの特別な三角形の場合にだけ有効であったが，ここできちんと扱うことが必要だと考えた。

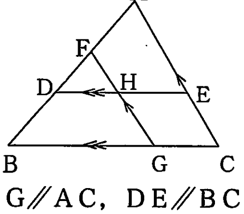
次に，問題Ⅱを課題として提示した。問題Ⅰでどのような補助線を引けば相似な三角形がつくれるのかを経験しているが，補助線を２本引くことで２つの条件が重なるため，見通しを立てたり，相似条件を使って説明したりすることが難しくなる。ここでは，時間を十分にかけて，できた三角形が相似になる理由についてじっくりと考え，説明できるように促した。

問題Ⅱ　三角形ＡＢＣに補助線を２本引いて，相似な三角形をつくってみよう。
このとき，相似な三角形ができるだけたくさんできる補助線の引き方を考えよう。



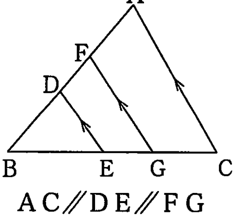
２つの補助線の組み合わせがいろいろあるため，実際に生徒が作図したものは，非常にたくさんの種類が出てきた。以下のア～クはそのうちの幾つかである。

ア　平行線を２本引いた場合



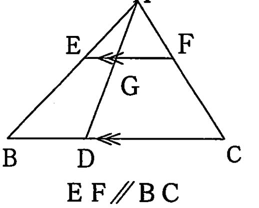
ＦＧ∥ＡＣ，ＤＥ∥ＢＣ

イ　平行線を２本引いた場合



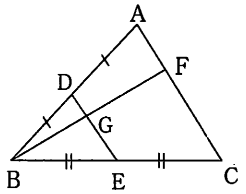
ＡＣ∥ＤＥ∥ＦＧ

ウ　平行線と任意の直線を引いた場合



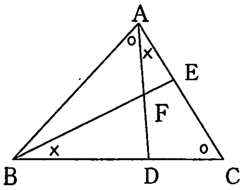
ＥＦ∥ＢＣ

エ　中点を結んだ直線と任意の直線を引いた場合



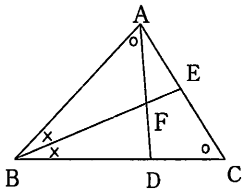
AD＝DB，BE＝EC

オ　等しい角をつくるように２本の直線を引いた場合



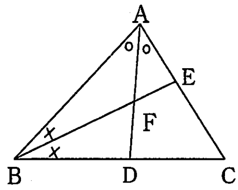
∠ACB＝∠BAD，∠CAD＝∠EBC

カ　角の二等分線と等しい角をつくる直線を引いた場合



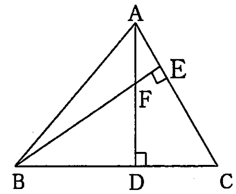
∠ABE＝∠EBC
∠ACD＝∠BAD

キ　角の二等分線を２本引いた場合



∠BAD＝∠CAD
∠ABE＝∠CBE

ク　垂線を２本引いた場合



AD⊥BC，BE⊥AC

※△AFEは二等辺三角形になる。

問題Ⅰで，補助線として平行線が有効であることが経験上わかっているので，ア，イのように平行線を２本組み合わせたものや，ウのように１本の平行線と他の種類の補助線を組み合わせたものが生徒の考えとして非常に多く出された。また，オやカのように等しい角をつくる補助線や，エのように辺の比を等しくした補助線を引く様子も見られた。問題Ⅰで垂線も補助線として有効であることを押さえておいたので，クのように２本の垂線を組み合わせたものや，垂線と他の補助線を組み合わせたものなどが生徒の考えとして出されていた。キについては，角の二等分線を２本引いているが，相似な三角形はできない。このように，相似な三角形ができない作図をしている生徒も何人か見られた。

問題Ⅱでは，見通しをもって補助線を引いたつもりでも，相似な三角形ができなかったり，逆に，予想していなかった三角形が相似の関係になっていることを発見したりする生徒の姿が見られた。これらは，補助線を引くことによってできた三角形が，相似条件に当てはまるかどうかを，演繹的な推論によって確かめることでわかることである。

④　授業の考察

１）補助線を作図する課題について

補助線は，どこに引けばよいのかという見通しをもたないと引くことができないため，生徒にとっては難しい課題である。実際に戸惑ったり，迷ったりしている様子が見られた。補助線を引く課題は，２年生の「平行四辺形になるための条件」の学習場面での実践の経験がある。今回の課題では，いろいろな補助線が考えられたことと，引いた補助線が正しいかどうかを演繹的な推論によって確認することができ，有益な課題であったと考える。

2）問題Ⅱの課題提示の仕方について

問題Ⅱでは，「相似な三角形ができるだけたくさんできる補助線」という課題を提示した。相似な三角形ができる２本の補助線の組み合わせは，非常に多く考えられる。補助線を引くことによってできる三角形が少ないものは，演繹的な推論を養うという課題の目的としては物足りないため，そのようなものを排除していく意味で，「三角形ができるだけたくさんできる」という条件をつけた。平行線が補助線として有効であることは，問題Ⅰよりわかっているので，相似な三角形をできるだけたくさんつくるために，生徒の考えが平行線に集中した。そのため，平行線を使わない補助線の作図が出にくくなってしまった。「問題Ⅰの補助線にもう１本補助線を加えて，相似な三角形ができるだけたくさんできるように考えよう」といった課題提示など，平行線に集中しないような提示の工夫が必要であった。また，問題Ⅰをもとにした課題提示により，類比的推論を促すことにもつながったであろう。

（2） 第１学年の数量関係領域における学習指導

① 「比例・反比例」における指導

中学校学習指導要領の数量関係の目標は，「関数や確率の基礎的な学習を通して，関数的な見方や考え方及び確率的な見方や考え方を養うこと」である。第１学年では，「具体的な事象の中にある二つの数量の変化や対応を調べることを通して，比例・反比例の関係を見出し，考察する能力を伸ばす」と示されている。

ともなって変わる二つの数量の関係の表し方には，表，式，グラフがある。第１学年では，式と表及びこれらとグラフの関係や，それらのもつ特徴などを，比例や反比例のような基本的な関係の学習を通して理解する。二つの数量の関係の考察における式の有用性については，文字と式で学習した数量関係を一般的に表現したり公式を生み出す学習が生きてくる場面であるため，単元のつながりを大切にしていきたいと考えた。また，小学校での学習と絡めて，変数の変域を負の数まで拡張することと同時に，関数を考える際には変域に注目する必要があることなどを理解することも重要である。さらに，比例，反比例の関係を，いろいろな事象の中から見出すこととともに，比例，反比例ではない関係にある事象も同時に取り上げ，それとの違いを明らかにして比例，反比例の変化や対応の特徴を浮かび上がらせる学習も取り入れていきたい。

これらの学習を通して，二つの数量の関係を簡潔・明瞭・的確に処理できることのよさや数学的な課題や身近な問題を解決する楽しさやおもしろさを味わうことができるようにする。

② 「比例・反比例」の授業計画

「比例・反比例」は，中学校ではじめての数量関係領域の学習となる。また，ともなって変わる二つの数量の関係を文字を使った式で表現し，帰納・類推的な考え方を養うことのできる場であると考え，以下のように指導計画を立てた。

第１，２，３時 【ともなって変わる二つの数量・比例の意味】 <課題Ａ>

・事象の中から，関数関係にある二つの数量を見出し，図や表を用いて表す。

・小学校での比例の定義（ｘが２倍，３倍…となると，ｙも２倍，３倍…）をもとに，比例の一般式ｙ＝ａｘ（ａは０でない定数）の形を見出し理解することができる。

第４，５時 【比例】 <課題Ｂ>

・連続量について，変域の意味，表し方を理解し，変域も求めることができる。

第６，７時 【座標】

・座標，座標軸等の用語と，その表し方や負の数まで含めた座標軸の取り方を理解する。

・離散量と連続量の表やグラフ，変域の表し方を理解する。

第８，９時　【比例のグラフの特徴】

・比例のグラフの特徴を理解し，式や対応表から比例のグラフをかくことができる。

第10，11時　【反比例の意味】

・二つの変数ｘとｙの間に，ｙ＝ａ／ｘ（ａは０でない定数）の関係があるとき，「ｙはｘに反比例する」ということや対応表に表れる「反比例」の特徴を理解する。

第12時　【反比例のグラフの特徴】

・反比例のグラフの特徴を理解し，式や対応表から反比例のグラフをかくことができる。

第13，14，15時　【関数】　<課題Ｃ>

・事象の中から，関数関係にある二つの数量を見出す。

・関数関係を表，グラフ，式などで表現し，それによってその特徴を調べる。

この中で特に，数学的に推論する力を養う場面として，次の第１時，第４時，第13時の授業（課題）を設定した。

【課題Ａ】ピラミッド型に立方体を並べていくとき，段数が変化するのにともなって変化するいろいろな数量をあげ，考察する活動（第１時）

【課題Ｂ】エレベーターのような乗り物がすれ違ってから，時間の経過とともに変化するいろいろな数量をあげ，考察する活動（第４時）

【課題Ｃ】封筒から画用紙を引き出したとき，それにともなって変化する数量をあげ，考察する活動（第13時）

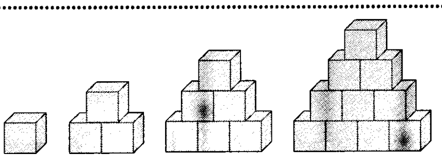
どの課題も，与えられた二つの数量の関係を考察するのではなく，多くの変化する数量をもつ具体的な事象の中から自ら数量を見出し，考察していくことになる。二つの数量の関係を文字を使って式で表現することは，小学校の学習では行っておらず，関数の一般的な式の形も学習していない。そのため，単元の導入における課題Ａでは，見出した二つの数量の関係を式で表すことを目的にした学習を考えた。二つの数量の変化に着目し，どのような増え方をしているかを図や表を使って表し，それを手がかりにして，規則性を見出し，式を求める活動にしていく。また，二つの数量の関係を式で表す際には，文字と式で学習した数量の関係を一般的に表現したり公式を生み出す学習が生きてくると考えられる。帰納・類推による推論をもとにし，単元間のつながりを生かす考察ができる。課題Ｂは，課題Ａが離散量であるのに対して，連続量として同様に扱う。課題Ｃについては，Ａ，Ｂと同様に二つの数量の関係について考察を行うが，表と式だけではなく，グラフを含めて関数関係の特徴を調べる。

③　授業の実際と生徒の考え方

「ともなって変わる二つの数量・比例の意味」　ー課題Ａ 第１，２，３時の実際ー

比例・反比例の学習の導入として，まず，これから学習していく内容が，ともなって変わる二つの数量についての学習であることの確認をし，変数としてｘ，それにともなって変わる量をｙとして表すことを生徒に伝える。これを受けて，まず次のような課題Ｉを提示した。

課題Ｉ　一辺が１ｃｍの立方体を左図のようにピラミッドのように並べていく。このとき，段数が増えるとそれにともなって変わる数量をいろいろ見つけてみよう。



立方体を扱った課題であるため，紙面では考えにくいと予想されたので，模型を準備した。実際に操作活動する中で，生徒からは以下にあげるような様々な変化する数量が出された。

<11月　比例・反比例　段数（x）が増えるのにともなって変わる数量（y）>		
ア：表面積	カ：上から見たときの面積	サ：頂点の数（凸）
イ：底面積	キ：立方体の数	シ：横の正方形の面の数
ウ：接触している面積	ク：直角の数	ス：正面から見える面積
エ：全ての面積	ケ：周りの縦の辺の数	セ：周りの辺の長さ
オ：空気に触れている面積	コ：全体積	ソ：全ての頂点の数（凹凸）
		タ：Ｉの数

ここでは，その数量において，次の２つのことに留意した。

○　複雑な数量については，模型を使って詳しく説明させること。および，プリントにまとめ確認すること。(ウ，ク，ケ，シ，セ，ソ，タ)

○　比例関係になっている数量を意図的にいくつか出すこと。(イ，カ，ケ，シ，セ，ソ)

そして，次の課題を提示し，ともなって変わる二つの数量の変化を調べ式にする課題Ⅱに取り組んだ。

課題Ⅱ　段数をｘ段，自分で選んだ数量をｙとして，ｘとｙの関係を式で表してみよう。

文字と式で学習した数量関係を一般的に表現したり，公式を生み出す学習が生きてくる場面であるため，振り返りをさせながら取り組ませた。生徒は，いくつかの数量について考察を行ったが，必ず対応表を作り，作った表あるいは図を用いて式を考えさせた。

ここで比例の関係である数量イ，カ，ケ，シ，セ，ソについては，どの生徒も容易に式にすることができたが，その他の関係についても個人追究の時間を十分に取った。この段階においても，模型が必要である場合には操作活動をさせながら考えさせた。

２次関数になる数量ア，ウ，エ，オ，キ，コ，ス，タについては，時間はかかったものの，表から規則性を導き出したり，図を使って考えたり，既に出されている数量の関係を用いたりすることで，ｙをｘを用いた式で表すことができた。

たとえば，キの数量「立方体の数」については，次のような考えが生徒から出された。

下のａ～ｃの考えは，いずれも表から規則性を見出し式を導き出したものである。ａは，ｘとｘ＋１の積の値の半分がｙの値になっていることに気づいた生徒の考えである。ｂはｘの値にｘ＋１の半分をかけるとｙの値になっていることに気づいた考えである。ｃは，ｙの値がそこまでのｘの値の総和になっていることに気づき，小学校の算数でもよく扱われる，初項１，公差１，項数ｘである等差数列の和を求める方法である。

ａの考え

㋖	x	1	2	3	4	5	6	7
立方体の数	y	1	3	6	10	15	21	28

ｂの考え

		1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
㋖	x	1	2	3	4	5	6	7
立方体の数	y	1	3	6	10	15	21	28

考え方：
$y = x\ (x+1) \div 2 = \dfrac{x\ (x+1)}{2}$

考え方：
$y = \dfrac{x+1}{2} \times x = \dfrac{x\ (x+1)}{2}$

ｃの考え

(キ) 立方体の数								
	x	1	2	3	4	5	6	7
	y	1	3	6	10	15	21	28

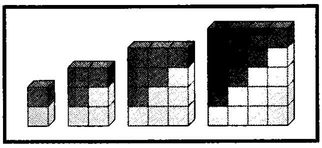
考え方：

$$\begin{array}{rl} & 1+2+3+\cdot\cdot\cdot+x \\ +) & x+\cdot\cdot\cdot+3+2+1 \\ \hline & (x+1)\times x \end{array}$$

$$y = (x+1)\times x \div 2 = \frac{x\ (x+1)}{2}$$

また，次のｄの生徒の考えは，ピラミッドの形を階段の形にずらして考えた方法で，形が同じものを組み合わせて直方体を作る考えである。

ｄの考え



考え方：ピラミッド形を階段形にして，それを積み重ねると一つの直方体ができる。

$$y = x\times (x+1) \div 2 = \frac{x\ (x+1)}{2}$$

他の数量については，表や図を用いて考えている生徒の他に，既に出されている数量の関係を用いたり，融合したりして考える生徒もいた。たとえば，キ，コ，スについては，すべて同じ式であり，$y = x\ (x+1) \div 2$で表すことができる。これにより，生徒は，異なる数量でも式が同じになる場合もあることを知り，表や式を通して数量を客観的に見ることが自然にできるようになったと思われる。また，アの表面積（x^2+5x）は，イの底面積（x）とオの空気に触れている面積（x^2+4x）との融合で表されることを視覚的にイメージして，全員が$y = x + x^2 + 4x = x^2 + 5x$を容易に導き出すことができた。タのＩの数については，下のｅの考え（表から式を導く考え）のように，キの立方体の数と比べて，ｙの値が一つずれていることに気づき，ｘを$x-1$に変換して$y = (x-1)\{(x-1)+1\} \div 2 = x(x-1) \div 2$という式を導くことができた生徒もいた。ウの接触している面積は，タのＩの数との関係を考えて２倍になっていることから，

$y = \{x\ (x-1) \div 2\} \times 2 = x\ (x-1)$という式を導くことができた生徒もいた。

ｅの考え

(タ) Ｉの数	x	1	2	3	4	5	6	7
	y	0	1	3	6	10	15	21
(キ) 立方体の数	x	1	2	3	4	5	6	7
	y	1	3	6	10	15	21	28

以上のような考えが個人追究の段階から出てきた。小集団の話し合いでは，各々の追究した数量が同じ場合も違う場合も共有できるまで練らせたいと考え，時間を十分にとった。しかし，小集団の話し合いで話題になった数量についての生徒の説明が不十分で納得できないものもあり，それについては全体の場で共有し，全員で考えることとした。

すべての式が出せた段階で，小学校で学んだ比例についての定義（ｘが２倍，３倍…となると，ｙも２倍，３倍…となる。）を確認し，表などからそれぞれの二つの数量について，比例の関係になっているものを探し出した。さらに，比例の関係になっている二つの数量の関係の式の特徴をあげさせ，二つの変数ｘとｙの間に，$y = ax$（ａは０でない定数）の関係がある

とき，「ｙはｘに比例する」ということを生徒に理解させた。この際，比例の関係になっていない式についての質問があったが，式の次数をとらえて，関数（１次関数，２次関数）についての学習の予告をすることができた。

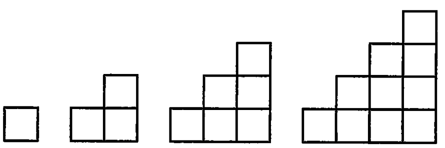
④　授業の考察及び生徒の変容

この課題解決学習を通して，生徒は主体的に学ぶことの楽しさを味わうとともに，様々な考えと出会うことで数学的な見方や考え方のよさに気づくことができたと考えられる。それは，数学的に推論することとも合致する。特に，ともなって変わる二つの数量の関係について表から式を導き出すことは，まさに帰納的な考え方となっており，また，図から式を導き出すことは，ある意味では，演繹的な考え方の要素が含まれていると考えられる。また，既に出されている数量の関係を用いて考える方法は，類推的な考え方と言うこともできるであろう。したがって，このような学びを繰り返すことによって，数学的に推論する力は養われていくものと考えられる。

上のことは，次の，文字と式における「正方形を階段形に並べていくとき，段数が増えるのにともなって，変化するものの公式をつくる課題」と本課題の追究後の，それぞれのアンケート結果からも明らかである。

【「文字と式」の追究後のアンケートについて　対象生徒１年Ｂ組（40名)】

＜９月　文字と式　段数が増えるのにともなって変わるものの公式＞



ア　周りの長さ　イ　面積　ウ　正方形の数
エ　すべての辺の数　オ　すべての直角の数
カ　頂点の数　キ　縦の長さ　ク　横の長さ
ケ　交わった点（交点）の数　コ　十文字
サ　増えていく正方形の数

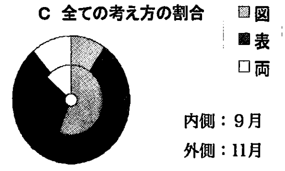
Ａ　個人追究における全ての数量の解決の割合
　　数と式（ア～サ)，数量（ア～タ）
Ｂ　個人追究における２次関数となる数量の解決の割合
　　数と式（イ，ウ，エ，オ，ケ，コ)，数量（ア，ウ，エ，オ，キ，コ，ス，タ）
Ｃ　個人追究における，全ての数量の考え方の割合
　　図：図形での考え方　表：表での考え方　両：図形，表両方の考え方
Ｄ　追究における，考え方の意識の割合
　　図：図形の方が考えやすい　表：表の方が考えやすい　両：両方とも考えやすい
Ｅ　追究における，全ての数量に対する難しいと思われた数量の割合

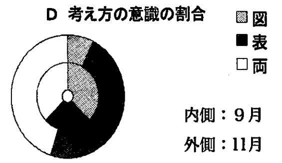
項目	A	B	C			D			E
考え方			図	表	両	図	表	両	
文字（9月）	0.52	0.37	0.56	0.3	0.13	0.38	0.25	0.38	0.24
比例（11月）	0.74	0.61	0.1	0.79	0.11	0.08	0.48	0.48	0.14

右表のアンケートの結果より，次の点を指摘できる。Ａ，Ｂからはともなって変わる二つの数量を式で表すことが，個人追究の段階から解決できるようになってきたことがわかる。特に，２次関数については，表のｙの値の変化を見ていくと階差数列になっているため，やや難であるが，表や図を用いてｙをｘの式で表すことができるようになってきている。また，Ｃ，Ｄからは，その考え方が，図から表へと移りつつあることがわかる。これは，図で考えなくなったのではなく，基

本的な数量を式で表すことができれば，それをもとにして他の数量も表があれば解決できることを示していると考えられる。それは，Dの表と図の「両方とも考えやすい」という意識を持つ生徒が増えていることからもわかる。さらにEからは，このような学習課題に対して難しいと考える生徒が減ってきたことがわかるが，これは表から式を導き出すことができるようになってきたためと考えられる。

このように「数学的に推論する力を養う場面」を各単元で洗い出し，意図的に場面を設定することによって，このような力を養っていきたいと考える。見通しを立て，根拠となる理由を確かめながら課題を解決していく過程を大切にする授業をめざしていきたい。





7．まとめと今後の課題

本研究は，「数学的に推論する力」を養う指導のあり方を追究することをねらいとした。

そのためにまず，「数学的に推論する力」を，「帰納的に推論する力」，「類比的に推論（類推）する力」，「演繹的に推論する力」の3つでとらえた。

次に，それぞれについての指導上の留意点等を文献等に基づき明らかにした。たとえば，推論する場面を多く経験すること，自分でまず予想を立てるようにすること，「似た問題はないか，同じような方法でできそうか」といった示唆を提示すること，見通しを立てて結論から逆にたどる思考を促すこと，などである。

そして実際に，第3学年で「相似な図形」，第1学年で「比例・反比例」について，「数学的に推論する力を養う」ことを意図した授業を実践した。「相似な図形」では，演繹的に推論する力」を中心に，「比例・反比例」では，「帰納的に推論する力」を中心に「類比的に推論する力」や「演繹的に推論する力」も合わせて養うことをねらいとした。教材の提示方法や発問の投げかけ方，生徒の考えの取り上げ方など，いくつか検討課題もあるが，いずれの授業も，数学的に推論する力を養う点において，一定の成果が得られたといえる。

今後の課題としては，次の点が挙げられる。

① 数学的に推論する力を養うための適切な教材を，各単元で開発する。
② 数学的に推論する力を養うための適切な指導方法を探る。
③ 数学的に推論する力が養われたかどうかの適切な評価方法を検討する。
④ 実践を積み重ね，数学的に推論する力を養う望ましい指導のあり方を追及する。

【引用・参考文献】

出石隆他.「新・中学校数学指導講座5図形」.金子書房.1978.pp.23-24
片桐重男.「数学的な考え方の具体化」.明治図書.1988.pp.128-147
小関熙純他.「図形の論証指導」.明治図書.1987.pp129-158
国宗進他.「確かな理解をめざした文字式の学習指導」.明治図書.1997.pp.72-77
文部省.「中学校学習指導要領(平成10年12月)解説－数学編－」.大阪書籍.2001.pp.14,88
算数科授業研究の会.「算数科教育の基礎・基本」.明治図書.2001.pp.14-15