静岡大学教育学部附属教育実践総合センター紀要　　No.12 p.57〜72 (2006)

数学的に推論する力を養う指導に関する研究（2）

A Study on Teaching to acquire the Ability of Mathematical Reasoning（2）

園田博人・竹下知行・熊倉啓之
Hiroto SONODA, Tomoyuki TAKESHITA, Hiroyuki KUMAKURA

1．はじめに

1958年以降に告示された中学校学習指導要領の数学科の目標を調べると，以下の通りである。(下線は筆者による。)

（1）1958（昭和33）年告示

4　ものごとを数学的にとらえ，その解決の見通しをつける能力を伸ばすとともに，確かな根拠から筋道を立てて考えていく能力や態度を養う。

（2）1969（昭和44）年告示

4　事象の考察に際して，適切な見通しをもち，論理的に思考する能力を伸ばすとともに，目的に応じて結果を検討し，処理する態度を養う。

（3）1977（昭和52）年告示

数量，図形などに関する基礎的な概念や原理・法則の理解を深め，数学的な表現や処理の仕方についての能力を高めるとともに，それらを活用する態度を育てる。

（4）1989（平成元）年告示

数量、図形などに関する基礎的な概念や原理・法則の理解を深め，数学的な表現や処理の仕方を習得し，事象を数理的に考察する能力を高めるとともに数学的な見方や考え方のよさを知り，それらを進んで活用する態度を育てる。

（5）1998（平成10）年告示

数量，図形などに関する基礎的な概念や原理・法則の理解を深め，数学的な表現や処理の仕方を習得し，事象を数理的に考察する能力を高めるとともに，数学的活動の楽しさ，数学的な見方や考え方のよさを知り，それらを進んで活用する態度を育てる。

上記の下線部分は，「数学的に推論する力」と関連があると考えられる記述である。1977年告示学習指導要領の場合でも，２年の学年の目標の中には，「数学的な推論の意義と方法を理解させ，論理的に表現する能力を養う。」という記述がある。

このように，どの時代においても一貫して，数学科の学習において「数学的に推論する力」を重視してきたことが読み取れる。にもかかわらず，生徒の「数学的に推論する力」は決して高くない実態が，各種調査で明らかにされている（国立教育政策研究所，2003など)。これらのことが，本研究を始める動機の１つである。

2．研究のねらいと方法

数学的に推論する力を養う指導のあり方を，授業実践を通して明らかにすることが，本研究のねらいである。本年度は，２年次の研究であり，特に，中２の図形の論証指導に入る前段階

における指導について追究する。

そのために，中１では「空間図形の学習」において，中２では「多角形の角の学習」において，数学的に推論する力を養う指導を行い分析した。

３．数学的に推論する力と推論することの意味理解

「数学的に推論する力」について，筆者らは「帰納的に推論する力」，「類比的に推論する力」，「演繹的に推論する力」の３つでとらえることとした (2005)。この中で特に，演繹的に推論する力を養う学習場面としては，中２の「合同な図形」の学習，中３の「相似な図形」の学習をあげることができる。しかし，これ以外にも演繹的な推論の力を養う学習場面は，多く存在すると考えられる。たとえば，次のような学習場面である。

＜中１＞

正の数・負の数：数直線を使って，正の数・負の数の加法，減法の計算の仕方を考える

文字と式：正負の数の計算方法や分配法則をもとに，文字式の計算の仕方を考える

１次方程式：等式の性質をもとに，１次方程式の解き方を考える　など

＜中２＞

式と計算：文字式を利用して，数の性質などについて説明する

連立方程式：等式の性質や１次方程式の解き方をもとに，連立方程式の解き方を考える

平行線と角：平行線の性質（錯角，同位角）の性質をもとに，三角形の内角の和を求める

三角形の内角の和をもとに，多角形の内角の和を求める　など

＜中３＞

展開・因数分解：分配法則などを使って，式の展開，因数分解の仕方を考える

２次方程式：因数分解を使って，２次方程式の解き方を考える　など

このように，多くの場面で「演繹的に推論する力」を養う指導が行われていることがわかる。

一方，数学の性質を説明（証明）する場面において，「帰納的な推論や類比的な推論は，性質を発見・予想するには有効であるが，説明としては不十分であり，演繹的な推論が不可欠であること」に関して理解することも重要である。このような理解を，ここでは「数学的に推論することの意味理解」と呼ぶことにする。

このことに関連して，小関らは，図形の論証の場面で，「論証のもつ一般性の理解」について調査を行い，中２の図形の論証の学習後でも，三角形の内角の和を求めるのに「実験・実測による方法でも十分だと考えている」生徒が少なくない実態を明らかにしている (1987)。

また國宗らは，文字式の利用の学習場面で，「文字式による論証のもつ一般性についての理解」について調査を行い，「文字式を使って証明する意義は理解しているが，帰納的な説明の不十分さは理解していない」生徒が一定数いる実態を明らかにしている (1997)。

これらのことから，数学的に推論する力はあっても，数学的に推論することの意味理解が十分でない生徒がいることがわかる。しかし一方で，推論することの意味理解は，数学的に推論する力を高める上で欠かせないであろう。

したがって，中学３年間の数学的に推論する場面を通して，数学的に推論する力を徐々に高めると同時に，特に中２での図形の学習を通して，数学的に推論することの意味理解についても深めていくことが大切であるといえる。

4．数学的に推論する力を養う授業実践

（1）第1学年の図形領域における学習指導

①「空間図形」における指導

中1の図形領域の目標は「平面図形や空間図形についての観察，操作や実験を通して，図形に対する直観的な見方や考え方を深めるとともに，論理的に考察する基礎を培う」（中学校学習指導要領，1998）である。授業では，展開図から実際に立体を作ったり，コンパスと定規を使って作図をしたりするなど，具体物を使い観察，操作や実験を通して直観的な見方や考え方を深める学習場面は多いが，そこから論理的に考察する基礎を培う内容へとつなげる場面はそれほど多くないといえよう。中1では，空間図形の基礎的概念や性質について理解を深め，それらを活用する力を伸ばす学習を進めなければならない。そこで，基礎的概念の理解を更に深める学習教材を扱うべきではないかと考え，「空間概念」形成のための教材を5.5時間扱うこととした。

「空間概念」形成のための教材として，選んだのは立方体の切断である。それは，異なる面に存在する辺の長さの関係や辺と辺との関係（平行や垂直やねじれなど），また辺と辺とでつくる角の大きさなどを考え，切断面がどんな形になるのかについて，数学的に推論して説明する学習活動が，1年生の図形領域の目標の「論理的に考察する基礎を培う」ことになると考えたからである。

しかし，切断面は現行学習指導要領で削除された学習内容で，教科書では発展教材として扱っている。学習指導要領では「取扱いが行き過ぎになりがちな内容」とあり，切断面を教材として扱うには，このことも十分配慮しながら指導する必要がある。導入では，生徒が課題を正しく理解できるように具体物を使うなどして工夫したり，追究をして出した結論が正しいかどうかを模型を使って実際に確かめたりすることも必要であろう。また，追究で行き詰まっている場合は，模型などの具体物で考えたり，小集団での活動を取り入れたりするなどしていきたい。

②「空間図形（，平面図形）」の授業計画

附属島田中学校では，平成11年度より中1の図形の学習を「空間図形」から導入し，「平面図形」と合わせて指導をしている。これらの指導による授業中の生徒の表れや，記述したアンケート，感想から考察すると，次のようなメリットがあることがわかる（羽田明夫，榛葉伸吾，國宗進，2000）。

・空間図形の方が身近であり，手にふれたり，直接操作したりできるため，考えやすく，取り組みやすい
・操作や実験を通した学習から導入しやすいため，意欲的に学習に取り組むことができ，平面図形の学習に入っても興味をもって追究することができる
・空間図形の学習でイメージが深められ，空間的な見方で図形を見ることができるようになる

本単元では，空間図形を扱いながら平面図形の学習を進めていく。それは，具体物を用いて学習を進めていくことで，生徒のイメージがより鮮明になり，性質を理解したり，論理的に考察したりする際に効果的ではないかと考えたからである。また，平面図形と空間図形を分けて学習するより，より効率よく図形の性質などを学習することができるのではないかと考えたからである。

「数学的に推論する力」を養う場面を，単元の中の【空間概念】【平行線の作図・円の接線】

【垂線の作図】に位置づけた。ここでは見通しを立て，説明する場面を設定することで，「論理的に考察する基礎を培う」ことができるように，教材の提示や配列を工夫した。

第１，２時　【空間図形の意味・展開図の意味】
- 空間図形，立体の意味を理解する
- 多面体，正多面体の意味，及び正多面体が５種類あることを理解する
- 立体の展開図の意味を理解する

第３時　【点，直線，平面】
- 点と直線，半直線，線分，及び平面の意味と表し方を理解する
- 直線は２点，平面は３点で決定することを理解する

第４，4.5時　【位置関係・角】
- 空間上での２直線，平面と直線，２平面の位置関係を理解する
- 平行，垂直の意味及び表し方を理解する
- 角の意味，記号，表し方を理解する

第5.5，６，７，８，９，10時　【空間概念】
- 立方体の切断面がどんな形になるのか理解する
- 空間における角度について概念を深める
- 空間における辺の長さについて概念を深める
- 距離の意味及び２点間，点と直線，平行な２直線間の距離について理解する

第11時　【回転体・円・おうぎ形】
- 回転体の意味を理解する
- 円に関わる用語，記号を理解する
- おうぎ形の弧の長さや面積を求めることができる

第12，13時　【柱体・錐体の表面積，体積】
- 柱体・錐体の表面積，体積を求めることができる

第14時　【線対称・点対称】
- 線対称・点対称の意味を理解し，図形を対称性の観点から見る目を養う。

第15，16時　【平行線の作図・円の接線】
- 作図の意味，定規とコンパスの役割を理解する
- 定規とコンパスを利用して直線の平行線を作図することができる
- 合同な三角形，角の移動等の基本的な作図の方法を理解する
- 円の接線は，その接点を通る半径（直径）に垂直であることを理解する

第17時　【垂線の作図】
- 定規とコンパスで，直線の垂線を作図することができる
- 二等辺三角形等の基本的な作図の方法を理解する

第18時　【角の二等分線】
- 角の二等分線の意味を理解する
- 角の二等分線の作図の方法を理解し，作図できる

第19，20時　【線分の垂直二等分線】
・線分の垂直二等分線の意味を理解する
・線分の垂直二等分線の作図の方法を理解し，作図できる
第21時　【線分の垂直二等分線の性質】
・線分の垂直二等分線上の点は，その線分の両端から等距離にあることを理解する
第22時　【角の二等分線の性質】
・角の二等分線上の点は，その角の２辺から等距離にあることを理解する

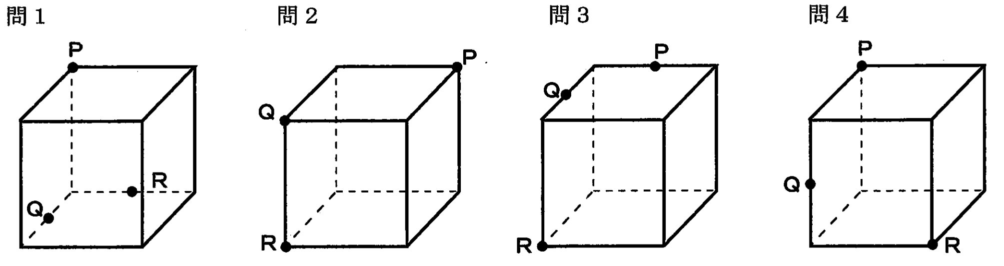
③　授業の実際と生徒の考え方

「空間概念」－第5.5，６，７時－

空間概念の学習に入るまでに，空間における直線や平面の位置関係，また角についての基礎的な学習は終えており，そこまでは，具体物を使い，観察，操作や実験を通して直観的な見方や考え方の基礎を培う学習を中心に進めてきた。「空間概念」では，図形に対する直観的な見方や考え方が正しいかどうかを演繹的に推論して説明する授業を展開する。そのため，現在の学習指導要領では削除された「立体の切断」をあえて教材として選んだ。「立体の切断」は，生徒にとっては難しい教材である。学習指導要領でも「取扱いが行き過ぎになりがちな内容」と表現されている。しかし，空間概念を深める教材としては，とても有効ではないかと考えている。それは，切断面がどのような図形になるかを考えるためには，その図形を構成している辺や角の大きさや関係について着目し，考えなければならないからである。ここに空間概念を深める教材としての要因がある。

しかし，その扱いについては「取扱いが行き過ぎにならないように」気をつけなければならない。そこで，次のように課題を投げかけ，生徒に追究させることとした。

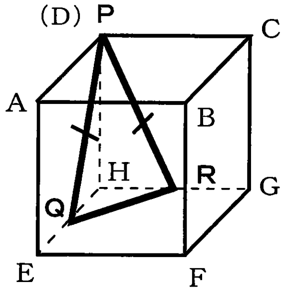
次の立方体で，３点P，Q，Rを通る平面で切断したとき，切断面はどんな形になるだろうか。（※辺上の点はその辺の中点である）



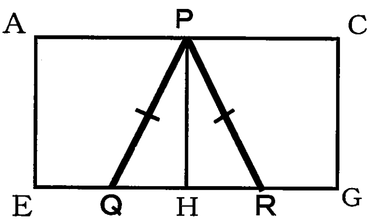
３点P，Q，Rは立方体の頂点または，辺の中点とし，図形を４つに限定した。３点を立方体の辺上に自由にとらせると，切断面ができないものができてきたり，切断面ができても，いろいろな図形が出てきてしまうからである。五角形，六角形になると，点P，Q，R以外に２点，３点を図の中に書き込まないと切断面がかけないので，生徒にとっては難しい課題になってしまう。そこで，３点P，Q，Rを結べば切断面がかけるもの，また，もう１点を求めれば切断面がかけるものに限定した。

問１は，切断面が二等辺三角形になり，辺ＰＱと辺ＰＲが等しいことを確かめれば，説明することができる。ほとんどの生徒は図アのように切断面を正しく図にかき込み，理由についても，点Ｐと辺ＥＨ，ＧＨの中点Ｑ，Ｒを結んだ線分ＰＱと線分ＰＲの長さは等しいことを説明したり，△ＰＱＨと△ＰＲＨが同じ三角形であることから，対応する辺が等しくなり，ＰＱ＝ＰＲを説明したりすることができた。このとき，図イのような展開図を示しながら説明をする生徒が見られ，見取図から展開図に置き換えて考えることができていた。これらの活動を通して，生徒は「演繹的な推論」を行ったといえるであろう。なお，「合同」についてはまだ未習であるため，「同じ三角形」という中１なりの言葉での説明を認めることとし，合同条件についてはふれないことにした。

図ア



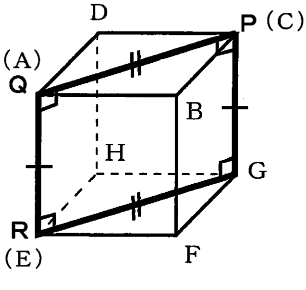
図イ



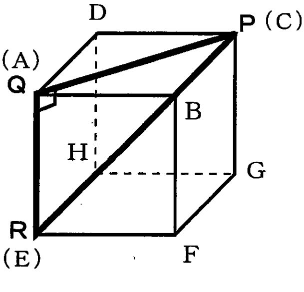
問２は，切断面が長方形になり，２組の向かい合う辺が等しく，４つの角が等しいことを確かめれば，説明することができる。生徒の考え方は図ウの長方形と，図エの直角三角形の２つに分かれた。図ウと考えた生徒は，辺の長さに着目し，辺ＰＱと辺ＧＲは同じ大きさの正方形の対角線であることからＰＱ＝ＧＲがわかり，立方体の一辺よりＱＲ＝ＰＧもすぐに説明できた。しかし，辺の長さの関係だけで長方形と結論づけている生徒が何人か見られた。４つの角が等しいことについては，前時までに平面と直線の関係を学習しているので，辺ＱＲと面ＡＢＣＤ，面ＥＦＧＨが垂直の関係になることから，それぞれの平面に含まれる辺ＰＱ，辺ＧＲと辺ＱＲでつくる角，∠ＰＱＲ＝∠ＱＲＧ＝90°になることを説明することができた。同様に辺ＰＧと面ＡＢＣＤ，面ＥＦＧＨが垂直で，∠ＱＰＧ＝∠ＰＧＲ＝90°になることも説明できた。これらの活動においても，生徒達は「演繹的な推論」を行ったといえよう。

図エと考えた生徒は，３点Ｐ，Ｑ，Ｒを結んで三角形になると考えており，４つ目の点Ｇを通ることに気づかなかった。このような生徒は③，④においても同様に切断面を三角形と考えてしまっていた。

図ウ

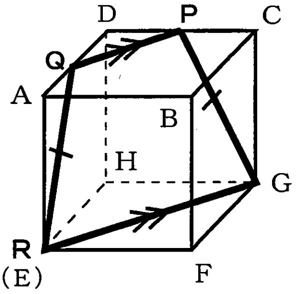


図エ

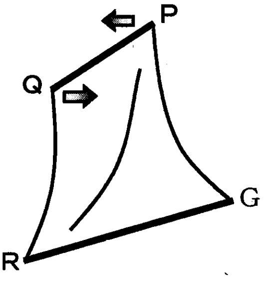


問3は，切断面が図オのように等脚台形になり，1組の向かい合う辺が平行で，辺QRと辺PGが等しいことを確かめれば，説明することができる。しかし，等脚台形については，小学校では学習していないので，ここでは台形であることを説明した。辺PQと辺GRが平行であることは，2つの辺が面ABCD，面EFGHに含まれており，2つの面が平行であることを理由とする生徒がほとんどであった。そこで（面が平行である）＝（面に含まれる線分が平行である）が本当に言えるのかどうか疑問を投げかけた。生徒はそこでしばらく考え，ある生徒が辺GRと辺DBが平行な面に含まれているが，平行ではなくねじれの位置の関係になっていることに気がつき，説明した。そこで多くの生徒が（面が平行である）＝（面に含まれる線分が平行である）が必ずしも言えるとは限らないことに納得した。また，辺PQと辺GRがねじれの位置の関係にあるときは，切断面が平面にならずに，図カのように面自体がねじれた曲面になってしまうことに気がついた。そして，その後にある生徒が，GR//CA，CA//PQだから，GR//PQになることを三段論法で説明し，多くの生徒が驚きと共に納得した。ここでも，「演繹的な推論」が活発に行われたといえよう。

図オ



図カ

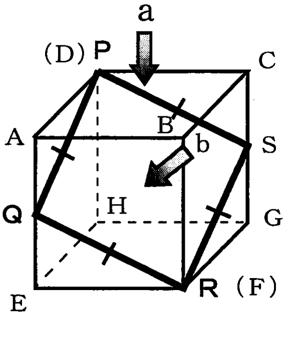


問4は切断面がひし形になり，辺PQと辺QR，辺RS，辺S·Pが等しいことを確かめれば，説明することができる。問1と同様に△PAQと△REQと△RGSと△PCSは同じ三角形であることから，図キのように対応する辺の長さPQ＝QR＝RS＝SPを説明し，辺の長さだけに着目し，切断面が正方形になると考えた生徒が多かった。4つの角について考えていた生徒も，矢印aから見たときに

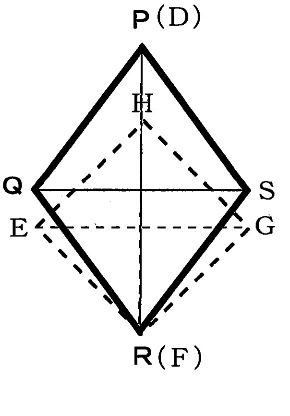
∠QPS＝∠APC＝90°，同様に　∠PQR＝∠PAB＝90°

になるので，4つの角は90°になると説明する生徒がほとんどであった。ひし形と考えた生徒

図キ



図ク

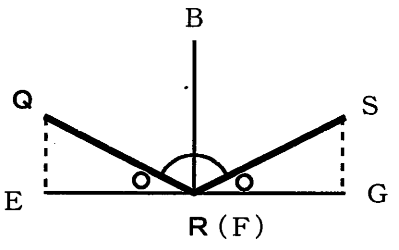


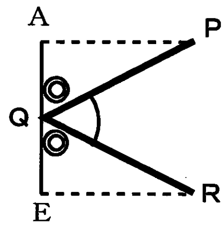
は，四角形ＰＱＲＳの対角線ＰＲとＱＳの長さに着目し，ＱＳ＝ＡＣ＝ＰＢで，点Ｂを点Ｒまで移動させたときに線分ＰＲの方が線分ＰＢより長くなるから，ＰＲ＞ＱＳ（ＰＢ）となり，４つの辺が等しく，２本の対角線の長さが等しくないので，ひし形になると説明した。また，別の生徒は正方形ＥＦＧＨで考えると，点Ｈを点Ｐまで移動させたときに正方形が図クのように縦長になり，対角線の長さが違うのでひし形になると説明した。このように，対角線に着目して説明する考え方については，どの生徒も納得し，切断面がひし形になることを理解した。

そうすると，正方形のときに出てきた４つの角が90°になるという説明はおかしいことになる。いったい四角形ＰＱＲＳの４つの角はどんな大きさなのだろうかという疑問を投げかけた。ある生徒は，図ケのように展開図で考え，∠ＱＲＳ＝180°（直線の角）－（∠ＱＲＥ＋∠ＳＲＧ），また∠ＰＱＲ＝180°（直線の角）－（∠ＰＱＡ＋∠ＲＱＥ）として求めると２つの角度は異なり，∠ＱＲＳ＝∠ＱＰＳ，∠ＰＱＲ＝∠ＰＳＲなので，向かい合う２組の角が等しくなるのではないかと説明した。それを聞いた別の生徒は，図ケの通りだと∠ＱＲＳ＞∠ＰＱＲになるが，先ほどの図クのように考えるなら，∠ＱＲＳ＜∠ＰＱＲになるはずだから，立体の角を図ケのように展開図にして平面で考えるのはおかしいと説明した。また，別の生徒は，図キの矢印ｂのように，切断面に対して正面から角を見ないといけないのではないかと説明した。問４の場合は，特に直観的に得られる誤った結論を正すために，演繹的な推論が威力を発揮する。生徒達も，この推論のよさを実感することができたと考えられる。

このように議論が深まったところで，空間における角の大きさについて∠ＰＱＲと∠ＱＲＳの大きさを比較しながら，もう一度深く追究してみようと呼びかけ，第８時以降につなげた。

図ケ





④　授業の考察

切断面の図形を求める授業実践は，これまでいくつも見られたが，図に切断面をかき込んだり，図形の名称を答えさせるに留まっていることが多く，どうしてその図形になるのかについて根拠をもって説明させる授業実践はそれほど多くなかったように感じる。現行の学習指導要領で切断面の学習内容が削減されてからは，授業で扱われることはほとんどないであろう。しかし，切断面がその図形になる理由を演繹的に推論することは難しいが，中１の図形領域の目標である「論理的に考察する基礎を培う」ためには，このような学習を取り入れることは大いに有効であると考える。この授業実践の中で，生徒は空間における直線と平面の位置関係や角についての基本的な学習を基に，小学校で学習した図形の性質に当てはめながら，切断面がどんな図形になるのか，また，その図形になる理由を筋道を立てて数学的に推論し説明していた。友達の説明が不十分なときは，納得がいかないためにもう一度説明を求めたり，理解できなかったところの質問をしたりする姿が，いろいろな場面で見られ，考え方が深まったり，広がったりしたと考えられる。

以上の実践における生徒の活動や表れから，この一連の空間概念を形成する5.5時間の学習は，本研究の「数学的に推論する力」のなかで，特に「演繹的に推論する力」を養う目的をある程度達成できたのではないかと考える。また，見取図の見えにだまされて直観のみでは正しい結論は得られないが，中１なりに演繹的に推論することにより正しい結論が得られる，という経験を通して，多少なりとも生徒は「数学的に推論することの意味理解」ができたのではないかと考える。さらには，この学習はその後の「空間における角度について概念を深める（第８，９時)」「空間における辺の長さについて概念を深める（第10時)」学習へとつながって，「数学的に推論する力」は徐々に高まっていったものと期待できる。今回のような授業を，他の単元でもきちんと位置付けて繰り返し実践していくことが，「数学的に推論する力」を養うために重要であるといえよう。

（２）第２学年の図形領域における学習指導

① 「図形の性質の調べ方」における指導

中学校学習指導要領の図形学習の目標は，「図形に対する直観的な見方や考え方を伸ばすとともに，図形の性質の考察における数学的な推論の方法について理解し，論理的な思考力を伸ばす。」である。第２学年の目標については，「基本的な平面図形の性質について，観察，操作や実験を通して理解を深めるとともに，図形の性質の考察における数学的な推論の意義と方法を理解し，推論の過程を的確に表現する能力を養う。」と示されている。

そこで，第１学年では，直観的な取扱や操作的な活動を通して図形や空間についての理解を深めつつ，論理的な考察への関心や意欲を培ってきている。さらに，第２学年では，観察，操作や実験を通して，三角形や四角形及び多角形についての角の性質を見い出し，平行線の性質などを基にしてそれらを確かめたり，また三角形や四角形，円の性質を合同条件などを基にして確かめたりすることにより，数学的な推論に関する能力を漸次伸ばしていこうと考えた。

特に，数学的な推論を進める導入段階としての「図形の性質の調べ方」では，対頂角や平行線の性質を基にして多角形の内角や外角の性質について追究する学習を通して，図形の性質を見い出し，その性質が本当に正しいかを確かめ，さらにその性質を用いて新たな性質を導き出すといった体系的な図形の学習を進める基礎を培う場としていく。

② 「図形の性質の調べ方」の授業計画

「図形の性質の調べ方」は２年生ではじめての図形領域の学習となり，演繹的な推論が本格的に始まる。また，発展性のある課題学習に適した多くの教材が含まれている。

課題学習については，学習指導要領に「…生徒の主体的な学習を促し，…」と示されている。したがって，その趣旨からして，課題は，教師が一方的に与えて学習させるものではなく，生徒自らが主体的に取り組む中から見い出していくものである。そこでの教師の役割は，教材をよく吟味し，その中から生徒が課題を見い出す手助けをすることであり，また，平常の授業においても生徒の創造性や探究心を豊かにするような発展性を秘めた課題を設定し，指導を行うことである。さらに，教材によっては更に発展させ，生徒の興味・関心を深め，選択教科としての数学の課題学習にもつなげることができると考えている。このような「学びの流れ」を創っていきたいと考える。

なお，課題学習の実践には，ア総合的課題による場合，イ日常的課題，ウ深化的課題による場合があるが，本単元では，ウの深化的課題による場合を取り扱うこととした。これは，通常

の授業の中で，生徒が「他のいろいろな場合についても考えたい。」「もっと深く考えたい。」など興味・関心を示した事柄を課題として設定し，学習する場合である。また，授業で学んでいる内容や考え方をさらに深めるような課題を教師が設定して学習させる場合でもある。

以上のことを踏まえ，本単元では，課題学習を取り入れ，演繹的な推論を進めていく授業構成を考え，以下のような指導計画を立てた。

第１，２時 【対頂角，平行線と錯角，同位角の性質】

・ 対頂角，錯角，同位角の意味を理解する。

・ ２直線が交わってできる対頂角は，等しいことを理解する。

・ 平行線に１直線が交わってできる同位角，及び錯角が等しいことを理解する。

・ 同位角または錯角が等しければ，２直線が平行であることを理解する。

第３，４時 【三角形の角の性質】

・ 三角形の内角の和が180度になることを理解する。

・ 三角形の外角が，これと隣り合わない２つの内角の和に等しいことを理解する。

・ 三角形の外角の和が360度になることを理解する。

第５時 【角度を求める問題】

・ 平行線と角，三角形の角の性質を用いて，図形の角度をもとめることができる。

第６，７時 【課題学習Ａ】

「４つの点を一筆で結んでいろいろな図形を作り，できた図形の性質について考えよう。」

・ 四角形の内角，外角の和が，360度になることを理解する。

・ 蝶々形の角の性質を理解する。

・ 凹型四角形の角の性質を理解する。

第８，９，10時 【課題学習Ｂ】

「５つの点を一筆で結んでいろいろな図形を作り，できた図形の性質について考えよう。」

・ 五角形の内角の和が540度，及び外角の和が360度になることを理解する。

・ ｎ角形の内角の和が180（ｎ－２）度，及び外角の和が360度になることを理解する。

・ 星形五角形の先端の角の和が180度になることを理解する。

第11，12時 【課題学習Ｃ】

「星形七角形の先端の角には，どのような性質があるだろうか。」

・ 星形七角形の先端の角の和が，１つとばしの場合は，540度になることを理解する。

・ 星形七角形の先端の角の和が，２つとばしの場合は，180度になることを理解する。

第13，14時 【合同な図形の性質，三角形の合同条件】

・図形の合同の意味及び三角形の合同条件を理解する。

第15，16時 【証明】

・仮定，結論、証明の意味，及び証明の書き方を理解する。

第17時 【定義】

・定義の意味，及びいろいろな三角形，四角形の定義を理解する。

・鋭角，鈍角，鋭角三角形，鈍角三角形の定義を理解する。

演繹的な推論を用いることを繰り返すことで推論する力を伸ばすことができるであろう。また，推論する場合に，その方法がひとつではなく，いろいろな方法が考えられる課題の方がより有効であるといえる。そこで，数学的に推論する力を養う場面として，課題学習Ａ，Ｂ，Ｃ

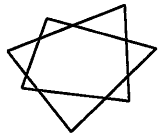
の授業を設定した。

③　授業の実際と生徒の考え方

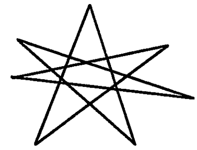
【課題学習C】「星形七角形の先端の角の性質」－第11，12時－

課題学習A，Bの追究では，様々な図形の角の性質を演繹的に推論することができ，また，帰納的な推論を用いることで多角形の内角や外角の性質を一般化することができた。さらに，星形五角形の先端の角の性質として，その和が180度になることを，それまでに学習した図形の性質を根拠に，いろいろな方法で演繹的に推論している。そして，星形に視点をあて，6点では一筆で星形がかけないことを確認し，さらに「7点ではどうか」という興味・関心をもって本課題に臨むことができた。

【初発問】「7点を結んで星形七角形をつくってみよう。」

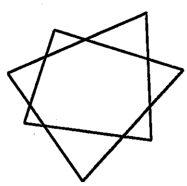


（一筆1つとばし）



（一筆2つとばし）

【主発問】「次のような星形七角形の先端の角にはどのような性質があるのだろうか。」

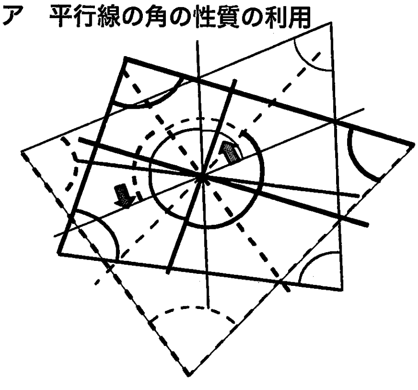


（一筆1つとばし）

まずは，2種類の星形七角形を確認した後，ここでは星形七角形（一筆1つとばし）の先端の角の性質についての課題を扱った。これまでに学習した図形の性質を根拠に，見通しを立て，いろいろな考え方で，誰もが納得のいく説明をする場面として，授業の中に位置づけをした。さらに，この課題には，星形多角形としてとばし方も含め，帰納的な推論から一般化が可能であるという発展性も秘めている点からも扱ってみたいと考えていた。

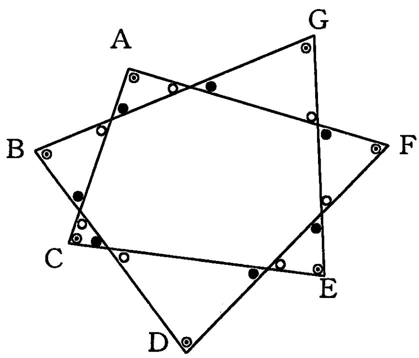
実際に生徒からは，先端の角の和が540度になることについて，予想を超えて多くの考え方が出されたが，その中で，以下のア～カはどの学級でも出された考え方である。

ア　平行線の角の性質の利用



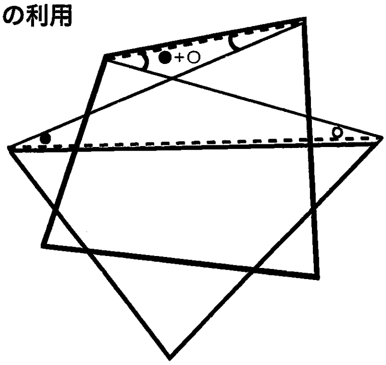
○平行線で先端の角を集めると，矢印が一回転半して，540度になる。

イ　三角形と多角形の角の性質の利用



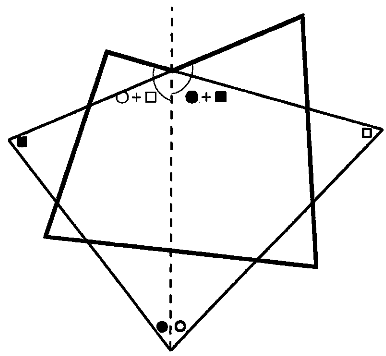
○$180\times7-360\times2=540$
だから540度になる。

ウ　蝶々形と三角形，四角形の角の性質の利用



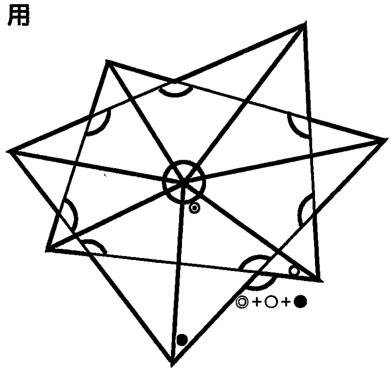
○360＋180＝540
だから540度になる。

エ　三角形と五角形の角の性質の利用



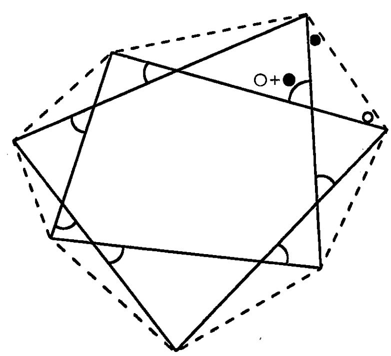
○五角形の内角の和から540度になる。

オ　凹型四角形と七角形の角の性質の利用



○180×(7－2)－360＝540
だから540度になる。

カ　七角形と三角形の角の性質の利用

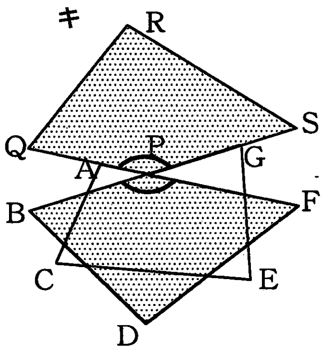


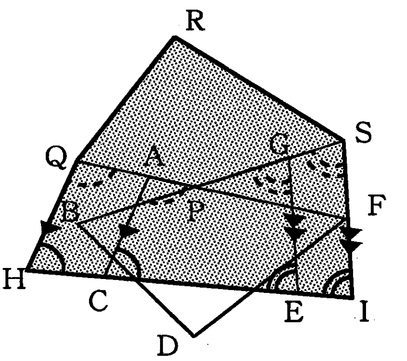
○180×(7－2)－360＝540
だから540度になる。

小集団での活動の意見交換では，アの平行線の角の性質からカの多角形の角の性質まで，生徒はそれぞれ，それまでに学んできた図形の性質を用いて，他の生徒が納得のいくまで説明しようとしていた。また，説明を受ける側も，「なんでそうなるのか」とか「もっと分かりやすく説明して下さい」の発言や，「その点は，どのようにとったのですか」の確認する発言があり，納得いくまで追究を深める生徒の姿が見られた。これらの活動を通して，「演繹的な推論」のみならず，星形五角形の場合の求め方から類推した「類比的推論」も行われたはずである。

ある学級では，上記ア～カ以外に，図形を対称移動させる考え方も出された。次のキ，クについては，星形七角形の一部である四角形を対称移動させた考え方である。キは，四角形と五角形の内角の和として考え，クは，さらに辺を平行移動させ延長し，平行線の角の性質を用いて，１つの大きな五角形の内角の和として考えたものである。

キ・ク　四角形を対称移動したり，辺を平行移動したりする考え方





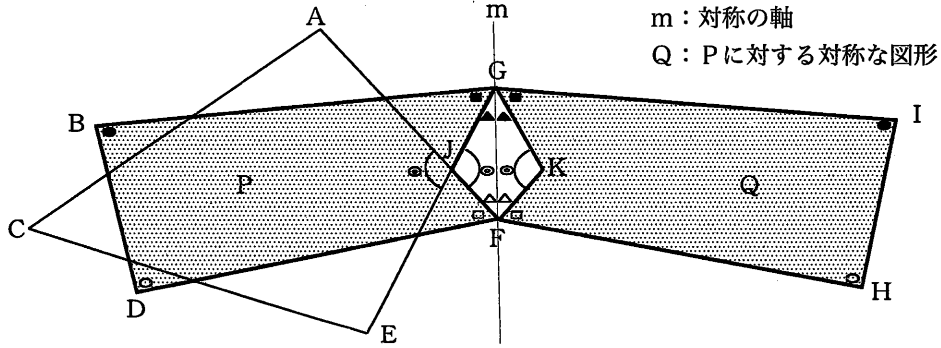
四角形ＰＢＤＦを対称移動させたのが，
四角形ＰＱＲＳとなる。
四角形ＰＢＤＦの内角の和は360度になり，五角形ＰＡＣＥＧ（凹型）の内角の和は，540度になる。四角形の∠ＱＰＳと五角形の∠ＡＰＧの和は360度となる。
よって，540＋360－360＝540
だから，540度になる。

四角形ＰＢＤＦを対称移動させたのが，
四角形ＰＱＲＳとなる。
ＡＣ//ＱＨ，ＧＥ//ＳＩとすると，
∠ＡＣＥ＝∠Ｈ，∠ＧＥＣ＝∠Ｉ
∠ＣＡＦ＝∠ＨＱＡ
∠ＥＧＰ＝∠ＩＳＧ
となり，先端の角の和は，五角形ＲＱＨＩＳの内角の和と等しくなる。だから，540度になる。

また，次のケは，五角形を対称移動して考えたものである。これを考えた生徒Ｋは，小集団での活動で，他の生徒達に説明しようとしていたが，なかなか考え方が伝わらず、激しい議論になっていた。

ケ　対称移動させ，多角形の角の性質を利用した考え方

ｍ：対称の軸
Ｑ：Ｐに対する対称な図形

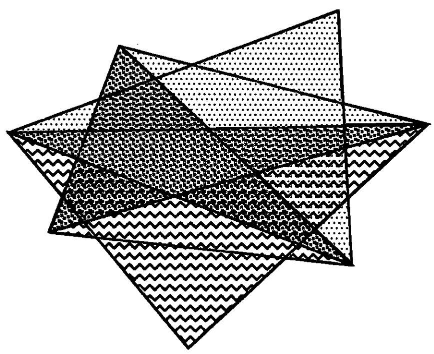


○　四角形ＡＣＥＪの内角の和は360度，五角形ＪＦＨＩＧの内角の和は540度
四角形ＧＪＦＫの内角の和は360度，五角形ＪＦＨＩＧの内角の和から四角形ＧＪＦＫの内角の和は360度をひくと180度，しかし，∠Ｋをひきすぎてしまうが，

∠GKF＝∠GJFより，180＋360＝540となるため，540度になる。
○　記号を使った説明
○＋●＋□＋■＋▲＋▲＋◎＋△＋△＝540
▲＋▲＋△＋△＋◎＋◎＝360…①
○＋●＋□＋■＋▲＋▲＋◎＋△＋△－(▲＋▲＋△＋△＋◎＋◎)＝180
○＋●＋□＋■－◎＝180…②
①－②より　▲＋▲＋△＋△＋◎＋◎＋(○＋●＋□＋■－◎)＝360＋180
だから　○＋●＋□＋■＋▲＋▲＋◎＋△＋△＝540　よって540度になる。

そこで，このケについては次時に一斉で扱い，全員で話し合う中で再度生徒Kが挑戦し，記号を用いたり，図を正しくかいたり，色を用いて表したりするなどの工夫をすることで，学級の生徒全員が納得のいく考え方になったものである。

コ　星形五角形の先端の角の性質の利用



○180×３＝540
だから540度になる。

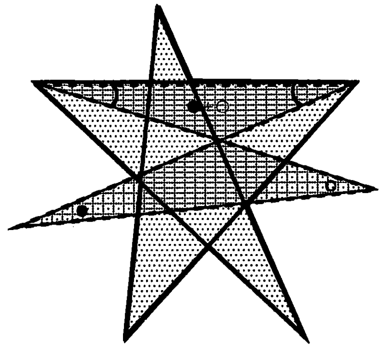
また，一斉での話し合いでは，誰もが驚くような考え方も出てきた。それが，右図のコの考え方である。これを考えた生徒Yが黒板に図をかき終えると教室は一瞬静まりかえった。その直後，すぐに驚きの声が上がった。４本の補助線を引くだけで星形七角形の中に星形五角形が３つできていることに気がついたのである。前時までに，それぞれが説明し合った，星形五角形の先端の角の性質を用いればすぐに540度になることがわかるのである。「すごい」「びっくりした」の声が上がり，拍手もおき，授業が大いに盛り上がった。

さらに，生徒の関心は，星形七角形の２つとばしや星形n角形の先端の角の性質に移っていった。個人追究の中で，生徒Dは，次のサのような考えをもっていた。

サ　星形ｎ角形の先端の角の性質の考え方

○　星形五角形の先端の角の和は180度である。星形七角形（１つとばし）の先端の角の和は540度である。考え方イから，まわりにできる三角形について，星形五角形では５つ（内角の和は900度），星形七角形では７つ（内角の和は1260度）である。それぞれ，外角の和２つ分（360度）ひかれるだけだから、星形ｎ角形の先端の角の和は，（180ｎ−720）＝180（ｎ−４）度になっているのではないか。

シ　星形七角形（２つとばし）の考え方



○先端の角の和は，蝶々形と星形五角形の先端の角の性質を用いて，180度になる。

この考えにも，驚きの声があがり，「すごい」「これならどんな星形だって角度を求めることができるね」と言うような反応があった。しかし，これに対して別の生徒Ａは反論した。「星形七角形の２つとばしは，180度になったよ」と発言したのである。確かに右図のシのような生徒Ａの説明で，星形七角形（２つとばし）の先端の角の和は，180度になったのである。

星形ｎ角形の先端の角の性質について，一斉での話し合いの最終的な結論は，生徒Ｄの「星形ｎ角形の先端の角の和は180（ｎ−４）度になることは，１つとばしのみに有効である」となった。時間の関係により，この課題学習は，ここで終了したが、その後も，レポート学習や選択数学の時間に継続して追究している生徒がいる。ここでは，「演繹的推論」以外に「帰納的推論」も活発に行われたといえるであろう。

なお，星形ｎ角形（ａ個とばし）の先端の角の和について一般化すると，次のようになる。

☆　ｎ個の点をａ点おきに結んでできる図形の外側のｎ個の角の和は，
（ｎ角形の内角の和）−360°×ａ　＝180°（ｎ−２ａ−２）
となる。

④　授業の考察

単元を通して，それまでに習得してきた図形の性質を根拠に，見通しをもちながら筋道を立てて説明する場面が多く見られた。特に，星形七角形の先端の角の性質については，図形的に複雑で，生徒にとっては難しい課題である。しかし，その課題をそれまでに学んできた様々な図形の性質のフィルターに通すことで，解決の糸口を見出すことができていた。また，１つの考え方だけではなく，課題に対して多様な迫り方を要求することで，既習内容が網羅され，さらに，「いろいろな考え方があってすごい」から「とても分かりやすくてすごい」といった，よりよいものを求める姿勢を構築するきっかけにもなったと感じている。

また，小集団での追究を通して，他の生徒の考えをもとに，類比的に推論する場面もあったり，星形ｎ角形について一般化する活動を通して，帰納的に推論する場面も見られた。これらの場面を通して，数学的に推論する力を養うことができたのではないかと考えられる。

まずは自分が納得し，そして，他人を説得するための論立てに夢中になっていた生徒の姿の

中に，「数学的に推論する力」を養う場面は確かに存在していたと考える。

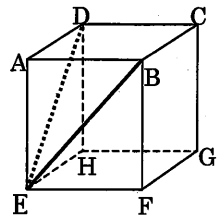
5．まとめと今後の課題

本研究は，「数学的に推論する力」を養う指導のあり方を追究することをねらいとした。

そのために本年度は，特に「演繹的に推論する力を養う」ことを意図して，中１で「空間図形」，中２で「図形の性質の調べ方」についての授業を実践した。「空間図形」で取り上げた立方体の切断に関する内容は，現行の学習指導要領では削除されているが，演繹的に推論する場面として大変有効な教材であると考え，今回扱うこととした。なぜならば，立方体の見取図上で切断面を考察することは，見取図上での見えにだまされずに，演繹的に推論して正しい結論を導くことが要求されるからである。

実際に，中学生が見取図上での見えにだまされやすい実態については，たとえば次のような調査結果から明らかにされている（熊倉他，2002)。

右の見取図で表された立方体ABCD - EFGHで，線分EBと線分EDを引きます。∠EBDは何度ですか。またその理由を書きなさい。



【正答率】中１　２%，中２　３%　中３　14%

今回実践した授業について，教材の提示方法や生徒の考えの取り上げ方など，いくつか検討課題もあるが，いずれの授業も，演繹的に推論する力を養う点において一定の成果が得られたといえる。

今後の課題としては，次の点が挙げられる。

① 演繹的に推論する力を養うための適切な教材と指導方法をさらに開発する。
② 帰納的に推論する力や類比的に推論する力を養うための適切な教材と指導方法を探る。
③ 数学的に推論する力が養われたかどうかの適切な評価方法を検討する。
④ 実践を積み重ね，数学的に推論する力を養う望ましい指導のあり方を追究する。

【引用・参考文献】

羽田明夫・榛葉伸吾・国宗進．2000．図形の学習指導の改善（第２次報告)．日本数学教育学会誌第82回総会特集号
井上正允．1995．「本日オープン！数学美術館」．国土社．pp23-52
国立教育政策研究所．2003．平成13年度小中学校教育課程実施状況調査報告書・中学校数学．ぎょうせい
小関熙純他．1987．「図形の論証指導」．明治図書．pp129-158
熊倉啓之・中西知真紀・八田弘恵・國宗進．2002．空間図形についての理解に関する研究．第35回数学教育論文発表会論文集．pp289-294
国宗進他．1997．「確かな理解をめざした文字式の学習指導」．明治図書．pp72-77
園田博人・竹下知行・熊倉啓之．2005．数学的に推論する力を養う指導に関する研究．静岡大学教育実践総合センター紀要第11号．pp39-54
中学校学習指導要領．1958，1969，1977，1989，1998