

## 数学的に推論する力を養う指導に関する研究 (3)

### A Study on Teaching to acquire the Ability of Mathematical Reasoning (3)

園田博人\*・竹下知行\*・熊倉啓之\*\*

Hiroto SONODA, Tomoyuki TAKESHITA, Hiroyuki KUMAKURA

#### 1. はじめに

「学力」を、次のような樹のイメージで捉える方法がある (志水宏吉, 2005)。

右図で、葉の部分に相当するA学力を「知識、理解、技能」、幹の部分に相当するB学力を「思考、判断、表現」、根の部分に相当するC学力を「意欲、関心、態度」としている。

この捉え方に従えば、学力を向上させる上で、「葉」「幹」「根」の3つの部分をバランスよく育てることが重要であろう。ところがこれまで、「詰め込み教育」と批判された教育 (例えば現代化学習指導要領, 1972~1980) は、「葉の部分」を育てることに重点をおいた指導と言える。また、

「新しい学力観」が提示された教育 (1993~2001) においては、「根の部分」を育てることが強調されたと言えよう。

一方、従来より重要であると指摘されながら、その指導が必ずしも十分でないと考えられているのが、「幹の部分」であると考えられる。数学教育における幹の部分に相当する内容としては、次のようなものが挙げられるであろう。

ア 数学的に考える力を育成する

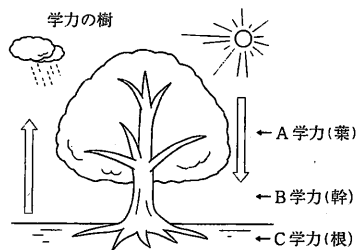
- ・数学的に推論する力 (演繹, 帰納, 類比)
- ・統合, 発展, 拡張, 一般化して考える力
- ・見通しを持つ力 など

イ 数学的に表現したり、表現されているものを解釈する力、数学的に説明する力を育成する

ウ 数理的に処理して、解決したり判断する能力を育成する

また、次期の学習指導要領改訂に向けての算数・数学科の改善の方向として、中央教育審議会初等中等教育分科会教育課程部会は、次の5点をあげている (文科省, 2006)。

- ① 基礎的・基本的な知識・技能の確実な定着
- ② 数学的な思考力・表現力の育成



- ③ 数量や図形についての豊かな感覚の育成
- ④ 算数的活動・数学的活動の充実
- ⑤ 統計に関わる内容の指導の充実

特に、②で、「根拠を明らかにし筋道を立てて体系的に考えるなどの数学的な思考力を育成したり、言葉や数、式、図、表、グラフなどの相互の関連を理解し、それらを用いて分かりやすく説明するなど、自分の考えを表現し伝え合う力を育成したりする指導」の充実を掲げている。

以上のことから、本研究で焦点を当てている「数学的に推論する力」の育成が、これからの数学教育の重要課題の1つであり、その指導のあり方を追究することは大いに意義のあることであるといえる。

## 2. 研究のねらい

数学的に推論する力を養う指導のあり方について、授業実践を通して明らかにすることが、本研究のねらいである。3年次に当たる今年度は、特に、数学的に推論する力を養うための指導形態のあり方について、実践を通して追究することがねらいである。

## 3. 研究の方法

まず、数学的に推論する力を養うための指導形態の工夫として、「個人での追究」→「小集団での追究」→「全体での追究」の3つの段階による活動を取り入れた指導について、これまでの実践や生徒へのアンケート調査結果に基づき検討する。その上で、中3の単元「相似な図形」において、「三角形の辺の比を探ろう」というテーマで授業を実践し、数学的に推論する力を養うための指導のあり方を考察する。

## 4. 数学的に推論する力を養う指導形態の工夫

### (1) 数学的に推論する場面

生徒は見つけた課題を、まずは自分の力で解決しようとする。このとき、課題の内容をよく吟味したり、多面的に考えたりしながら推論し、解法の見通しを立てる。このように生徒が推論する場面は、個人で追究することが基本となる。

しかし、生徒が推論する場面は、個人で追究する場面だけではない。小集団で自分の考えを友達に説明したり、友達の説明を聞く中で、新たな課題が生まれ、更に深く追究しようとして、生徒は推論するはずである。また、全体発表の中にも同じような場面はある。発表した生徒の意見を聞いて、その直後あるいは授業後に、発展的に追究しようとして更に推論を進める生徒もいるであろう。

このように、「個人」「小集団」「全体」それぞれの形態の中に推論する場面は存在し、段階を踏むごとに質の高いものになっていくと考えられる。したがって、数学的に推論する力を養うための手立てとして、「個人追究」→「小集団活動」→「全体発表」という学習形態をとることが有効ではないかと考える。

### (2) これまでの附属島田中学校での研究における取り組みについて

附属島田中学校では、これまでの研究の中で、小集団活動を取り入れた学習活動が、どの教科においても実践されてきた。研究書籍「自ら求めわかりあう授業（五書、1982年）」の中で、

集団思考について次のように定義している。

「集団思考とは、じゅうぶんに吟味・選択された教材を中心として、共通な課題意識のもとに、ひとりひとりが自分の意見を持ち、多様な考えをぶつけあい、教材の本質を徹底的に究明していく過程である。」

このような集団思考の考え方を、脈々と受け継ぎ、大切にしながら今日までの研究に至っている。現在も多くの教科で小集団活動を取り入れた授業が行われている。数学科では、この集団思考の考え方が、推論する力を養う場面でも生きる大切な考え方であると捉えた。

### (3) 数学科での実践

#### ① 授業形態における編成の工夫

生活班は6人または5人を単位として、話し合いに適した図1のような編成になっている。個人追究、全体発表の授業では、この生活班で学習する。小集団活動では、この生活班から図2のような4人を単位とした編成の学習班に変わる。

【生活班】(6人, 5人班)

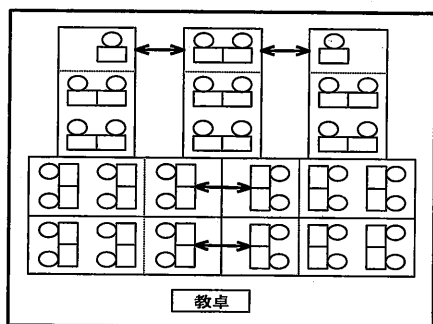


図1 個人追究, 全体発表の編成

【学習班】(4人班)

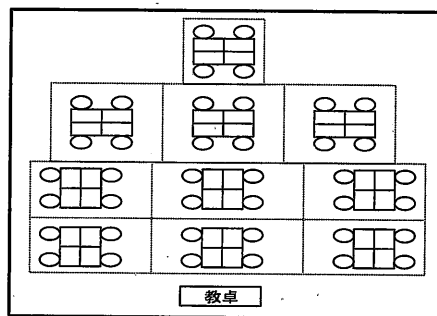


図2 小集団活動の編成

学習班の人数を4人にした理由は、次の3点である。

- ・3人の場合、多様な意見が出にくい場合があり、話し合いが深まらない。
- ・5人の場合、多様な意見は出やすいが、人に任せて自分は意見を言わず、聞き手にまわってしまう生徒がいる。また、各自の意見を言う時間を確保すると、時間がかかる。
- ・4人の場合、多様な意見が出やすく、話し合いに参加するのに適している。また、各自が意見を言う時間を確保しても、時間をかけ過ぎずにすむ。

ただし、全体の人数が奇数のときは、3人班を1つ作る。席替えは、学期1～2回行っている。

#### ② 授業形態に関する中1生徒への指導

1年生の最初の授業で、資料1を配付し、「個人追究」→「小集団活動」→「全体発表」という授業の進め方について指導する。そして、3時間程の教材(魔方陣など)を用いて、実際にこの学習形態で授業を行う。最初の授業での生徒の様子は、次のようなものであった。

- ・個人追究をすると、課題について一生懸命に取り組むが、追究用紙に答えを書き終えると、鉛筆を置いてぼーっとしている。まわりの生徒の様子が気になり、キョロキョロする。そのうち、生徒と話し出す。
- ・小集団活動では、積極的な生徒が中心になって説明をして、他の生徒は説明を聞いて納得する。納得しなくても、説明をした生徒の書いたものを自分の追究用紙に書き写す。

- ・全体発表では、小集団で積極的に説明をしていた生徒が挙手をして説明する。また、違う解き方をした生徒が数人挙手をして、それぞれ説明する。聞いている生徒はよく説明を聞き、必要があれば追究用紙にメモを取る。

資料1

### 3年間、楽しく数学の授業を受けるために

静岡大学教育学部附属島田中学校

#### 1 授業中はこんなことを大切にしよう！

- 考えること
- 疑問を持つことや質問をすること
- 自分の考えを説明すること
- 友達のことを自分の中に取り入れること

#### 2 授業の進め方

##### (1) 基本的な授業の流れ

- ①課題（教師から提示する場合も生徒から生まれる場合もある）



- ②個人追究



- ③小集団による話し合い



- ④全体での意見交換（一斉）



- ⑤まとめ

##### (2) 心がけること

##### ②個人追究の時には……

- ・課題に対する自分の意見をもつ。
- ・わからなければ、どこがわからない等の疑問をあげる。  
（疑問から深まることが多い）
- ・一つの解き方、考え方で満足しないで、できるだけ多くの方法を考え出す。（したがって、個人追究に終わりはない）
- ・なぜそうなるのかという理由を深く考えること、また、それがはっきりしないときは、その疑問をメモしておく。

##### ③小集団の時には……

- ・自分の考えを進んで説明する。
- ・人の考えを最後まで聞き、わからない点や疑問に思ったことは進んで質問する。また、よい意見は吸収する。
- ・全員の意見発表や意見交換が終わっても時間がある場合には、他の解き方や考え方がないかみんなまで探ったり、個人追究の時に思った別の疑問をみんな考えてみるなどする。

\*小集団ごと考えをまとめる必要はない。

##### ④全体の意見交換の時には……

- ・自分の考えを進んで説明する。
- ・人の考えを最後まで聞き、わからない点や疑問に思ったことは進んで質問する。また、よい意見は吸収する。
- ・小集団で出なかった考え方を知り、さらに深める。
- ・小集団で解決できなかった疑問を発表し、他の人の意見を聞く。

#### 3 普段、授業に必要なもの（持ち物）

- ・筆記用具
- ・定規
- ・ファイル（追究用紙を閉じるためのもの）
- ・図形の学習の時には、三角定規一組、コンパス、分度器、のり、はさみ

#### 4 追究用紙の書き方

- ・「個人追究の欄」と「小集団・全体の意見の欄」をそれぞれ守って記入する。（自分の意見をきちんと残す）

このように、1年生の最初の頃の授業では、5. で後述する実践で観察されたような生徒の姿は、みられなかった。

### ③ 個人追究について

個人追究は、生徒がまずは自力で課題を解決するための時間である。そのため、ヒントを与えたり、友達と相談したりすることはあまりせずに、黙々と課題に取り組む。個人追究について、生徒には次のことを指導している。

- ・課題に対する自分の意見をもつこと。
- ・わからなければ、どこがわからない等の疑問をあげること。(追究用紙に書く欄がある)
- ・1つの解き方、考え方で満足しないで、できるだけ多くの方法を考え出すこと。
- ・なぜそうなるのかという理由を深く考えること。そして、その理由を、追究用紙を読む人がわかるように書くこと。

生徒は課題を1つの方法で解くと「他の方法でも解くことができないか」「もっとわかりやすく説明するにはどうすればいいか」を考えるため、与えられた時間を十分に使う。また、課題の解決までたどり着かなくても、途中までの自分の考えを追究用紙に書いたり、自分が疑問に思ったことを書き留める。

課題に対する自分の意見を持たせることが重要であるので、生徒が追究する時間は十分にとる。30分～50分が多いが、課題によっては70分～100分とすることもある。個人追究の時間は、あらかじめ教師が決めておくと、机間巡視をする中で、生徒の実態によって短くしたり、長くする。個人追究の時間に、生徒が自分の考えを拡げて、意見をどれだけまとめることができるかが、この後の小集団活動や全体発表が充実した活動になるかどうかの鍵になると考える。

生徒が課題をつかみ、解決する過程は、このような個人追究の場面であり、数学的に推論する力を養う上で、必要不可欠な学習活動であるといえよう。

### ④ 小集団活動について

小集団活動において、生徒は意欲的に自分の意見を友達にわかりやすく説明したり、友達のよい意見を吸収しようと説明を真剣に聞くなど、活発に活動する。友達の意見に疑問を持ったり、説明が理解できなかったりしたときには、積極的に質問する。小集団活動について、生徒には次のことを指導している。

- ・自分の考えを進んで説明すること。
- ・個人追究で課題が解決していなくても、途中まで考えたことや追究してわからなかったことを積極的に説明すること。
- ・友達の考えを最後まで聞き、わからない点や疑問に思ったことは進んで質問すること。
- ・友達のよい意見はどんどん吸収すること。
- ・全員の意見発表や意見交換が終わっても時間がある場合には、他の解き方や考え方がないかみんなで探ったり、個人追究のときに思った別の疑問をみんなで考えるなどすること。
- ・小集団ごとに、考えをまとめる必要はないこと。

小集団活動では、生徒は自分の考えを友達に理解してもらうために、わかりやすく説明しようとする。また、ホワイトボードを使って説明する際には、追究用紙に書いてあることをそのまま書くのではなく、内容をさらに整理して、短時間に効率よく説明をするように心がける。このことで、生徒は頭の中で自分の考えを整理し、大切なことと大切でないことを区別する。説明の過程を大切にすることは、自分の考えを洗練した表現にすることにつながる。

また、説明の過程を大切にしていくと、そこに疑問が生まれ、それが小集団における新たな課題になることがある。そして、小集団の4人で一緒になって、あるいは個人で新たな課題に取り組み、さらに追究を深める。

小集団活動には、その他に次のようなよさもある。

- ・少人数で意見交換をするので、緊張せずに自分の意見を言うことができる。
- ・少人数なので、必ず自分の意見を言う機会がある。
- ・自分の意見に対して、必ず友達が反応を返してくれる。(説明に対する賛成の意見や、わからないこと、疑問点についての質問など)
- ・自分の意見について、友達が認めてくれたり、アドバイスをしてくれることにより、全体発表をするときの自信につながる。

一斉授業では、一部の発言する生徒以外のほとんどの生徒は聞き手にまわり、一度も発言をしないで授業が進むことがよくある。小集団活動を取り入れることで、生徒が積極的に活動できる場面を授業の中につくり、授業に参加したという充実感を持たせることができるであろう。

なお、小集団活動を行うときは、必ずホワイトボード(A2)を利用する。クラスに10枚(10班分)置いてあり、どの教科の授業でも使える環境にしている。また、教材によっては、A4、B4、A3の用紙に課題を印刷し、ラミネートすることで、ホワイトボードと同じように使うことができる。予算の関係で、ホワイトボードの購入が難しい場合は、このラミネートした用紙をホワイトボード代わりに使用することも可能である。

#### ⑤ 全体発表について

全体発表では、自分の意見を自信を持って発表したり、小集団では解決できなかった疑問点を積極的に出すようにする。また、友達の発表した意見に対して、よりわかりやすい説明を付け加えたり、出された疑問について意見を述べたりするなど、意欲的に関わることで深まりのある話し合いをする。全体発表について、生徒には次のことを指導している。

- ・自分の考えを進んで説明すること。
- ・友達の考えを最後まで聞き、わからない点や疑問に思ったことは進んで質問すること。
- ・友達のよい意見はどんどん吸収すること。
- ・小集団で出なかった考え方を知ること、さらに考え方を広めたり深めたりすること。
- ・小集団で解決できなかった疑問を発表し、他の人の意見を聞くこと。

全体発表では、生徒は小集団活動で友達からもらったアドバイスなどを生かして、よりわかりやすくまとめた自分の意見を発表する。小集団で広めたり深めたりした考え方は、全体発表という大人数の場で、さらに拡がりや深まりを見せる。また、小集団では解決できなかった疑問が出されることで、クラス全体が共有する課題が生まれる。この自分たちの疑問から生まれた課題を全体で議論し、解決されたとき、生徒は「すごい!」という言葉と共に驚きや喜びを強く感じるようになる。教師自身もこの瞬間に授業のおもしろさを再発見し、そして、生徒の発想力の豊かさに驚かされるのである。

#### ⑥ 授業形態に関するアンケート調査

次に、授業形態、中でも特に小集団活動について、生徒はどのように感じているかを調査するために、以下のようなアンケート調査を実施した。

ア. 対象 1年生(116名)、2年生(117名)、3年生(118名)

イ. 時期 2006年10月

ウ. アンケート内容

- ① あなたはこれまでの授業の中で、自分の考え方が広がったり深まったりしたと感じた場面はどんな場面ですか。該当するものの番号に○をつけてください。また、そう感じた理由について書いてください。(複数回答可)
- (1) 個人追究をしているとき (2) 小集団活動をしているとき  
(3) 全体発表をしているとき (4) そう感じた場面はない
- ② あなたはこれまでの授業の中で、小集団活動の良いところはどんなところだと思いますか。
- ※①の小集団活動で書いた内容と同じ場合は、「上と同じ」と書いてください。
- ③ あなたはこれまでの授業の中で、小集団活動の問題点はどんなところだと思いますか。
- ④ 上の③の問題点に関係しますが、小集団活動を改善する点があるとしたら、どんな点で、どう改善したらいいですか。

各項目の調査結果と分析は以下の通りである。

①について

①の調査結果は、表1の通りである。

表1 ①の結果

①	(1) 個人追究	(2) 小集団活動	(3) 全体発表	(4) 場面なし
1年	32人	78人	88人	1人
2年	33人	90人	89人	1人
3年	47人	97人	69人	0人
合計	112人	265人	246人	2人

考え方が広まったり深まったりしたと感じた場面については、1年から3年に学年が上がるに従って、小集団活動の数が増えていく傾向がある。これは、学年が上がるに従って、小集団活動が充実してきていることを示している。

全体としては、考え方が広がったり深まったりしたと感じた場面として、約75%が小集団活動を、約70%が全体発表を選んでいる。これは、小集団活動が全体発表と同じ、またはそれ以上に生徒にとって大切な活動になっていることを示している。

生徒が3つの活動を選んだ主な理由については、資料2①に掲載した。これらの記述から、それぞれの学習形態のよさを、生徒はきちんと把握していることがわかる。

②について

ほとんどの生徒は、資料2の①〈小集団活動を選んだ理由〉に掲載した意見と同様であった。しかし、他にも資料2②にあるような意見を書いた生徒もいた。これらの記述から、生徒の中には、小集団活動が全体発表の準備につながると考えているようである。また、小集団活動を通して自分の考えに自信をもち、全体で発表する意欲につながる様子もわかる。

③について

小集団活動の悪い点についての生徒の意見は、資料2③の通りである。これらの記述から、小集団活動を改善していく上で、次のような点を指摘できる。

まず、無駄話をしたり、ホワイトボードに落書きをしないように、小集団活動に臨む姿勢を伝える必要がある。また、いろいろな意見が出ないと、小集団活動をしてしまうと話し合いが終わってしまうこともあるので、生徒の多様な考えが出るような教材を選ぶ必要がある。さらに、小集団活動の時間は、生徒の活動の様子を見ながら調整するが、あらかじめ小集団活動の時間を生徒に伝え、目安をもって話し合いを進めることを意識させることも大切である。また、小集団活動の構成メンバーによっても、話し合いが充実したものになるかどうか左右されるため、いつも同じメンバーにならないように、定期的にメンバーを変える（1ヶ月に1回程度）ことも重要である。学年が上がるにしたがって、小集団活動の構成メンバーの人間関係も話し合いに影響してくる。クラスで話しやすい雰囲気をつくるのが大切であるといえよう。

#### ④について

③で書いた意見に対して、自分たちなりによく考えた意見が多く、例えば、資料2④のような記述があった。これらの記述から、生徒は小集団活動に対して、いくつかの問題点は感じながらも前向きに評価し、更に改善しようとする意識があることが明らかになった。

以上述べてきたことから、個人追究、小集団活動、全体発表のそれぞれの場面を設定し、見通しを立てて課題を解決し、解決に至る過程を説明する活動を行うことにより、生徒の数学的に推論する力を効果的に養うことができると考える。

## 5. 数学的に推論する力を養う指導の実際

4. で述べた、3つの授業形態「個人追究」「小集団活動」「全体発表」を取り入れて、数学的に推論する力を養う指導を、中学3年の「相似な図形」における「三角形の辺の比を探ろう」で実践した。ここでは、その実践内容について考察する。

### ① 「相似な図形」における指導計画

中学校の図形学習の目標は、中学校学習指導要領（1998）には「図形に対する直観的な見方や考え方を伸ばすとともに、図形の性質の考察における数学的な推論の方法について理解させ、論理的な思考力を伸ばす」とある。第3学年では「図形の相似や三平方の定理について、観察、操作や実験を通して、それらを図形の性質の考察や計量に用いる能力を伸ばすとともに、図形について見通しをもって、論理的に考察し、表現する能力を伸ばす」と示されている。第2学年では「図形的基本的な性質」「三角形・四角形・円」で、証明の意義や方法を学習し、演繹的な推論についての理解を深めてきた。そこで、第3学年の図形学習の最初の単元である本単元では、三角形の相似条件や平行線と線分の比に関する性質などを理解するとともに、これまで学習してきた図形の性質の有効性や演繹的な推論のよさを実感させながら、学習を進めていくことに留意した。

三角形の相似条件は、平行線の性質、三角形の合同条件とともに、演繹的な推論の根拠（「図形的基本性質」）であるので、三角形の合同条件と対比させながら直観的、実証的に取り扱うことによって理解させることが重要である。また、平行線と線分の比の性質や中点連結定理は、図形をかいたり、測ったりする操作活動を通して発見させることが大切である。そして、これらの性質は三角形の相似条件を利用した演繹的な推論によって証明されることを確認し、三角形の相似条件の有用性を知る機会ともしたい。また、これらの性質が様々な課題の解決において有効であることを実感させることも大切であるため、そのような教材を含めた単元構成



を考えた。

以上のことを踏まえ、本単元では、三角形の辺の比の性質を追究する課題学習を取り入れ、数学的推論の中でも特に演繹的な推論を進めていく授業構成を考え、以下のような指導計画を立てた。

第1時 【相似な図形】

- ・ 拡大図をかく操作を通して、相似な図形の意味を理解する。
- ・ 相似な図形の性質を理解する。

第2, 3時 【三角形の相似条件】

- ・ 相似な三角形の作図を通して、三角形の相似条件を理解する。
- ・ 相似の位置、相似の中心の意味及び用語を理解する。

第4, 5, 6時 【三角形の相似条件の利用】

- ・ 三角形の相似条件を利用して、図形の性質の証明ができる。
- ・ 三角形の相似条件を利用して、辺や線分の長さを求めることができる。

第7, 8時 【相似の位置の考え方の利用】

- ・ 相似の位置の考え方を利用して、三角形の中に最大の正方形を作図する。
- ・ 図形の証明に、三角形の相似条件を活用することができる。

第9, 10時 【平行線と比】

- ・ 線分ABを3等分する点を作図する方法を考察する。
- ・ 線分の3等分点の作図方法が正しいことを証明する学習を通して、平行線と比の定理を導き、これを理解する。

第11, 12時 【比と平行線と中点連結定理】

- ・ 線分の3等分点の作図方法が正しいことを証明する学習を通して、「平行線と比の定理」及び「中点連結定理」を導き、これらを理解する。
- ・ 生徒が考えた様々な作図方法を証明する学習を通して、定理や性質の理解を深め、証明の習熟を図る。

第13, 14, 15, 16時 【相似の利用・図形の性質のまとめ(課題学習)】

- ・ 三角形の辺の比の性質を理解し、これまでに学習してきた様々な図形の性質を用いて証明することができる。

※ 点線枠は、数学的に推論する力を養う場面を意図的に設定した内容

② 授業の実際と生徒の考え

1) 実践例1

以下では、第13, 14, 15, 16時における【相似の利用・図形の性質のまとめ(課題学習)】の実践例について述べる。

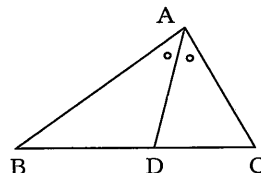
相似な図形の学習の最後に、総合的な課題学習として4時間扱いで行った。次章の三平方の定理については、導入時で多様な証明法を扱う構想であることを考慮して、本課題学習においても、1つの定理に対して、多様な図形の性質を用いて証明しようとする意欲・態度を培うと

ともに、数学的な見方や考え方を養うことを目的とした。

まず、主発問として、次の課題を提示した。

**【三角形の辺の比を探ろう 課題】**

- ◎ 三角形ABCの頂角Aの二等分線と辺BCとの交点をDとすると、  
 $AB : AC = BD : DC$ となる。  
 「この性質を、いろいろな方法で証明してみよう。」



次に、個人追究→小集団活動→全体発表の順に、授業を進めた。各形態ごとに授業の詳細を述べる。

**<個人追究>**

ここでは、生徒の様々な考え方が見られた。補助線と証明法をまとめると次のようになる。

- ア 相似な図形、比と平行線の性質を用いた証明法
- イ 中点連結定理を用いた証明法
- ウ 二等辺三角形の性質や直角三角形の相似を利用した証明法
- エ 面積比較による証明法
- オ 外接円や補助円などを作図し、円の性質を用いた証明法

ほとんどの生徒が、アの証明法に取り組んでいた。それに対して、イの証明法にも何人かの生徒が取り組んでいたが、誤った用い方をしていたり、結論に達していなかった状態であった。また、ウの証明法については、適切な補助線を引くことができれば、結論を導くことができるため、正確に証明することができていた。エの証明法は、何人かが挑戦しており、細分すると3種類の考え方が出されていた。さらに、オの証明法についても、取り組んでいる生徒は多かったが、結論まで導いている生徒は少なかった。これは、相似な図形を見つけたり、等しい線分の比を表したりすることができていても、適切な等しい比を選ぶことや比(比の値)を変形することが難しいためである。

以上のことから、数学的に推論する活動は活発に行われたといえる。しかし、この段階では必ずしも思考が拡がらない生徒も少なくなかったと考えられる。

**<小集団活動>**

個人追究での生徒の実態から、小集団活動においては、どの班でも、アの証明法が説明された。また他にも、イやウの証明法も出された。他の生徒の説明を聞いて多様な考え方があることに驚くとともに、その説明を理解しようとする生徒の意欲的な姿が見られた。一方で、オの証明法については、ほとんどの班で紹介されていたものの、比(比の値)の変形についての理解ができずに解決できない班が多かった。

以上の生徒の様子から、他の生徒の多様な考え方に触れ、課題を深く追究することになり、数学的に推論して思考をある程度まで上げることができたと考えられる。

**<全体発表>**

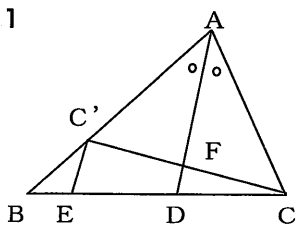
全体での発表場面では、個人追究や小集団活動での生徒の実態を踏まえ、解決できなかった内容や多様な考え方を扱った。

その一つが、イの中点連結定理を用いた証明法である。証明1はH君の証明である。この証明は、自ら中点を作図し、角を考察する中で相似を導き、中点連結定理と平行線と比の性質を

用いて結論を導く方法で、H君の説明が終わると「そうやって使えばいいんだ。」とか「中点連結定理だけではだめなんだ。」という声があがった。

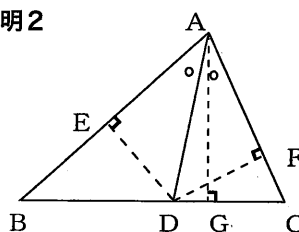
二つ目は、エの面積比較の考え方である。これは2年の学習内容であり、多様な見方を養う目的だけでなく、既習内容を振り

証明1



AC=AC', CD=DEとなる  
C', Eをとり、直線で結ぶ。A  
DとC' Cとの交点をFとする。  
△AC' Cは二等辺三角形である  
ためC' F=CFとなり、中点連  
結定理より、AD//C' Eとなる。  
よって、平行線と比の性質より、  
 $AB:AC' = BD:ED$   
 $= BD:DC$   
となる。

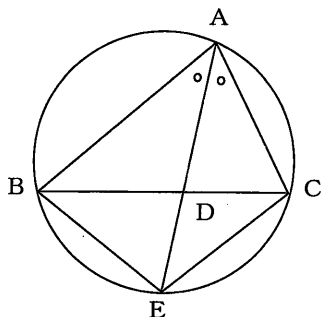
証明2



DからAB, DからAC, Aから  
BCに下ろした垂線をそれぞれ、  
E, F, Gとする。すると、  
△AED≡△AFDより  
DE=DFとなる。よって、  
△ABD:△ACD=AB:AC  
△ABD:△ACD=BD:CD  
よって、AB:AC=BD:CD  
となる。

り返るためにも扱いたいと考えていた。これを、M君が証明2のように説明した。1度目は、言葉だけの簡単な説明だったため、理解できた生徒は少なく、「もう一度お願いします。」とい

証明3

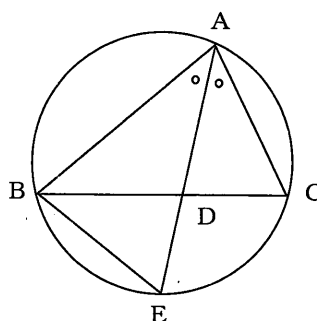


△ADB∽△CDEより  
 $BD:DE=AB:CE$ …①  
△ADC∽△BDEより  
 $DC:DE=AC:BE$ …②

※ $a:b=c:d$ ならば $ad=bc$ より  
 $a:c=b:d$ となる。

①より $BD:AB=DE:CE$ …③  
②より $DC:AC=DE:BE$ …④  
△EBCは二等辺三角形であるため、  
 $BE=CE$ …⑤  
④⑤より $DC:AC=DE:CE$ …⑥  
③, ⑥より、 $BD:AB=DC:AC$ となり  
よって、 $BD:DC=AB:AC$ となり、  
 $AB:AC=BD:DC$ となる。

証明4



△ADC∽△BDE∽△ABEより  
 $AB:AD=BE:DC$ …①  
 $BE:AC=DB:DA$ …②  
①より、 $AD \times BE=AB \times DC$ …③  
②より、 $AC \times DB=BE \times DA$ …④  
④より、

$DA = \frac{AC \times DB}{BE}$ …⑤となり、

⑤を③に代入して、  
 $\frac{AC \times DB}{BE} \times BE=AB \times DC$ …⑥となり、

よって、 $AC \times DB=AB \times DC$ …⑦となり、  
 $AB:DB=AC:DC$   
※より、証明3のH君と同じ性質を使って、  
 $AB:AC=BD:DC$ となる。

う声があがった。そこで、M君は2つの式(太字)を付け加えて説明すると、生徒からは「本当だ。なってる。」「簡単だ。」「面積の方法でも、自分のと違う。」という声があがった。

三つ目は、オの外接円の考え方である。生徒からは「どうしても結論までは導くことができない。」と言う声が多かったため、全体では等しい比の式の変形を上手に行っているH君とKさんが説明をした。証明3、4がそれぞれH君、Kさんの証明である。

H君の説明はとても丁寧であったため、時間はかかったものの皆が理解することができた。またKさんの説明では、内項・外項の積から、式の変形をしていることがわかり、H君同様、結論まで導くことができた。両者の説明に対して、「すごいね」とか「そうやればいいんだ」など感動が声となって表れた。

また、Kさんの説明終了後、T君が意見①を述べた。証明4の③、④の式から、直接⑦の式を導くことができ、結論までの過程を短縮できるという考えである。このT君の意見には、周りの生徒だけでなく、Kさんも納得し、「ほんとだ、短くなる。」と言い、メモをとっていた。

ここでのH君とKさんの共通した考え方は、 $a : b = c : d$ ならば $a : c = b : d$ とすることができることである。内項・外項の積の性質を用いての説明であるが、 $a : b = c : d$ ならば、 $ad = bc$ となり、ゆえに $a : c = b : d$ とすることができるのである。これは、次のような相似な三角形の3辺の長さの比の性質にもつなげることができた。

#### 意見①

Kさんの説明の中の

①より、 $AD \times BE = AB \times DC \dots \textcircled{3}$

②より、 $AC \times DB = BE \times DA \dots \textcircled{4}$

より

③の $AD \times BE$ と④の $BE \times DA$ は同値であるため、

$AB \times DC = AC \times DB \dots \textcircled{7}$

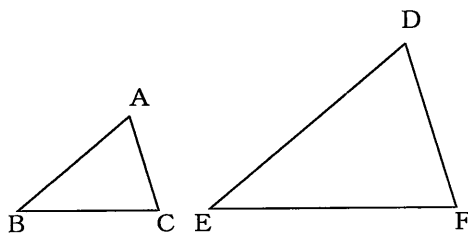
となり、

$AB : DB = AC : DC$ から

$AB : AC = BD : DC$

となる。

#### 【相似な三角形の3辺の長さの比の性質】



$\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ならば

$AB : DE = BC : EF = CA : FD$

となるため、

$AB \times EF = DE \times BC$ より、

$AB : BC = DE : EF \dots \textcircled{1}$

また、 $BC \times FD = EF \times CA$ より、

$BC : CA = FD : EF \dots \textcircled{2}$ となり、

①②より

$AB : BC : CA = DE : EF : FD$

となる。

以上の全体発表のなかで、発表を聞いていた生徒は、小集団活動においても解決できなかった「中点連結定理を用いた証明」、「面積比較による証明」、「外接円を用いた証明」について、わかった生徒の発表を理解しようとし、さらにはT君の意見①のように、よりよい説明の方法を考えていた。

また、発表をした生徒も、M君のように他の生徒にわかりやすい説明を求められ、自分の説明を改善しようと振り返り、理解を深めたと考えられる。

## 2) 実践例2

当初の指導計画では、どのクラス(3学級)も同じように進める予定であったが、実際には、

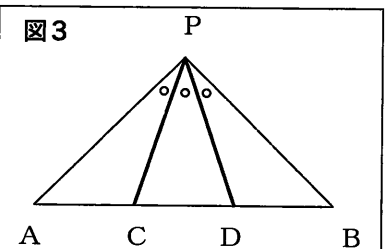
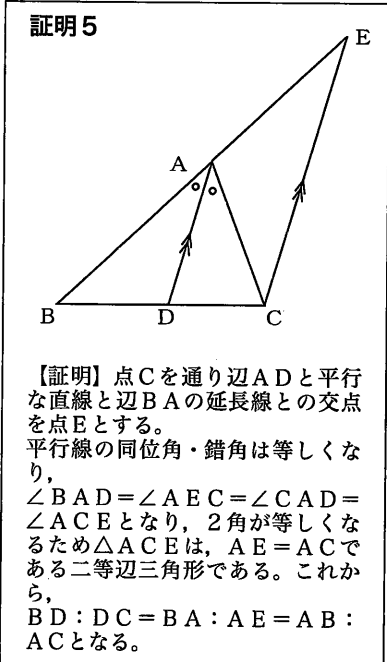
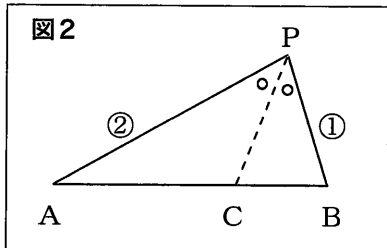
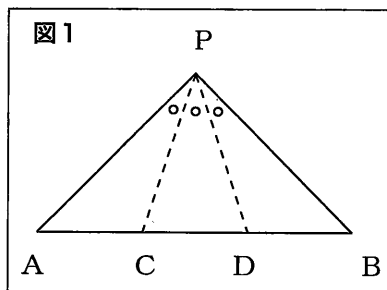
別のクラスで指導の流れが異なってしまった。それは、第9・10時の【平行線と比】の「線分を3等分する」課題を学習していく中で、実践例1で扱った「三角形の辺の比の性質」の課題が、生徒によって取り上げられたからである。以下では、そのときの実践例について述べる。

きっかけは、線分ABを3等分する方法の1つとして、図1のように、「線分ABを底辺とする直角二等辺三角形を作図し、その直角になる頂角の三等分線を引くことで、底辺ABは3等分されるのではないか。」というSさんの考えが紹介されたことである。AC, CD, DBは等しく見えるが、測ってみると長さが違い、Sさんを含め、悩んでいる生徒が多かった。そのときに、K君が図2のような作図方法を発表した。

「線分の両端から、線分APとBPの長さが2:1となる点Pを取り、△PABを作ります。そして、∠Pの二等分線とABとの交点をCとすると、CはABを2:1の比に分けることが分かりました。」周りの生徒は、各自作図し、コンパス等を使って長さを確認して、「確かになってる。」「ほんただ。」「すごい。」など、驚きの声をあげた。さらにK君は、証明5のような補助線を引いて上のことを証明した。既に幾つかの作図方法を利用して、前時までに、比と平行線の性質、平行線と比の性質、中点連結定理を学習していたので、ほとんどの生徒が理解できたと思われる。

次に、K君は「(図3のように)角の3等分を考えると、外側のPA, PBは必ずPC, PDよりも長くなっていることが分かりますね。」と説明を続け、他の生徒は「内側にいけばいくほど短くなるに決まってる。」ことを理解した。さらにK君が、「△PADと∠APDの二等分線PCに注目して下さい。これは、…」と続けると、周りから、「あつ、そうか…。」「わかったぞ。」「すごいぞ。」という声が、説明の途中にもかかわらずあがった。K君の説明は続き、「(図3において)  $PA:PD=AC:CD$ になるのはさっき説明しましたが、今、 $AP>PD$ は明らかだから、 $AC>CD$ になり、 $AC\neq CD$ だよ。だから、さっきのSさんの作図方法ではABは3等分することはできないことが分かるね。」と説明を終えると、ほとんどの生徒はうなずき納得したようであった。

「線分を3等分する」課題を解決することが目的であったが、その解決過程で、「三角形の辺の比」の課題



が解決された。この実践例2は、全体発表が中心であったが、ここでも、K君の説明を聞いたときの他の生徒の発言やつぶやきから、他の生徒が、K君の説明を理解しようと、数学的に思考していた様子が伺える。

### ③ 授業を通しての考察

今回の授業実践を通して、以下の点を指摘することができる。

ア. 本実践の個人追究では、全部で70分の時間をかけた。その結果として、多くの考えが生徒から出てきた、あるいは、解決に至らなくても、疑問や問題意識が生徒の中に強く残ったに違いない。ここでの活動が、その後の小集団活動や全体発表につながったといえるであろう。したがって、個人追究に十分な時間をかけることは重要であることを、今回の実践を通して確認できた。

イ. 小集団活動、全体発表では、他の生徒とのやり取りが頻繁に行われる。このやり取りの中で、よりよい考えはないかと推論したり、新たに生じた疑問を追究しようとして推論する場面が、随所に観察された。また、他の生徒の発表を聞いて理解しようとする活動自身も、数学的に推論していたといえるであろう。たとえば、実践例2で取り上げた「線分を3等分する課題」に対する誤ったSさんの考えを聞いて、多くの生徒が「本当に正しいのか」「誤りならばなぜか」と推論していた場面である。また実践例1で取り上げたように、Kさんの説明を聞いてT君は、「さらによい説明の方法はないか」と推論し、意見①が登場した場面である。他の生徒の説明や発表は、必ずしも正しいとは限らないし、必ずしも最善の方法とは限らないため、説明を聞いて、自分でも推論しながら内容を検証していたものと考えられる。このように、個人追究の場面だけではなく、小集団活動や全体発表の場面においても、生徒は数学的に推論する活動を行っており、他の生徒の多様な考えを理解することを通して、思考の幅は拡がり、数学的に推論する力を一層伸ばすことができたものと考えられる。

以上見てきたように、本授業実践を通して、個人追究だけではなく、小集団活動、全体発表の場面を設けることは、数学的に推論する力を養う上で効果的であることを明らかにできた。

## 6. おわりに

今回の授業実践では、いくつかの課題で、数学的に推論する場面を設定したが、それぞれの教材のもっているよさや発展性、つながりなど深く考えることにより、その一つ一つの学びが大きくなり、つながっていくことが実感できた。また、教師が思っている以上に、生徒の発想や考え方は柔軟で、今回のように予想外の授業展開を実践することにもつながった。今回の授業を通して、単元構想の段階から、生徒の実態をもとに教材をよく吟味し、課題に対してそれぞれの生徒がどのような考えや思いをもっているのかをしっかりと把握し、授業を構想していくことが重要であると感じた。そのような点も踏まえ、数学的に推論する力を養う指導のあり方について、今後も一層追究していきたい。

### 【引用・参考文献】

中村文則, 高校で教えたい幾何の問題「角の二等分線の性質を狩る」

<http://www.nikonet.or.jp/spring/toubun/toubun.pdf>

國宗 進, 「生徒の思考を重視した数学の授業」第88回全国算数・数学教育研究(東京)大会。

- 講習会テキスト」pp.13-16
- 小関熙純, 「生徒の思考を重視した数学の授業. 第88回全国算数・数学教育研究(東京)大会. 講習会テキスト」pp.63-66
- 園田博人・竹下知行・熊倉啓之, 2005 「数学的に推論する力を養う指導に関する研究」静岡大学教育実践総合センター紀要11号, pp.39-54
- 文部科学省, 1998 「中学校学習指導要領」
- 静岡大学教育学部附属島田中学校, 1982 『自ら求めわかりあう授業』五書
- 志水宏吉, 2005 『学力を育てる』岩波新書

## 資料2

### 授業形態に関するアンケート調査の記述部分

#### ① 自分の考え方が広がったり深まったりしたと感じた理由

##### <個人追究を選んだ理由>

- ・わかりそうにないと思っても, 一つ視点を変えるだけで, 答を導き出せるときがあるから。
- ・まず, 自分が思いつく限りの考えを追究用紙に書いたら, 例えば, ある1つの考えが, なぜこうなるかをまた改めて追究してみると, もっと簡単な方法が見つかったり, おもしろい考えが出たりするから。
- ・1つ考えができると, どんどん考えを発展させていけるから。1つ見つけたら, 更に見つけていこうという気持ちになるから。

##### <小集団活動を選んだ理由>

- ・自分の意見を言うとき, 小集団がそれに対して意見を言ってくれるので, 自分の中で曖昧だったところをしっかりと理解することができるため。
- ・個人追究のときに出た疑問とかわからないことを, 小集団のときに班のみんなと話し合ったり, 教えてもらったりすることで, 自分の考えが深まったから。
- ・一人一人意見がしっかりと発言できて, どんどんお互いに深め合い, いろんなことが発見できるから。
- ・少ない人数でやるから, 一人一人にしっかりと伝えられるし, 自分にも伝わってくるから。
- ・個人追究では思い浮かばなかった意見が出たり, 自分の意見をみんながより深く考えてくれたりしたから
- ・お互いに話し合い, 他人の説明を聞くことで考えが広がり, また, 相手に説明することで, 自らの主張する意見をより深く理解できるから。
- ・私が個人追究で考えた方法などを自由に言えるし, 私が全く考えていなかった方法を友達が考えていて, わかるまで丁寧に説明してくれるから。
- ・自分の考えで自信がなかったとき, 友達の考えを聞いて自信を持てるようになり, もっと自分の考えを広げられるから。

##### <全体発表を選んだ理由>

- ・小集団のときよりも, 更にいろいろな考えが出てきて, もっと考えが深まるから。わからなくて質問しても, いろいろな人がわかりやすく説明してくれるから。
- ・自分の発想とは違う考えがいつも発表されていて, 個人ですっきりしなかったことも, 関連づけて考えるとよく分かることがあるから。
- ・クラスみんなの意見, 考え方を知ることができたとき, 「ああ, そうか! そういう考え方もあるんだ」と思えるから。

- ・小集団でも出てこなかった意見が出て、それを取り入れることができる。一つのことについて、みんな考えて、「こうの方が…」とか「こう考えると…」とか、解決策を考えられる。
- ・いろいろな意見が混ざる全体は、その混ざった意見を見ていると、新しい考えが出てきたり、「ここはどうなんだろう？」と疑問が出てきたりして、深いところまで考えたりするから。

#### <そう感じた場面はない理由>

- ・みんなだいたい同じ考えだし、解き方もだいたい同じだから。
- ・発表とかしないから。

#### ② 小集団活動の良いところについての①<小集団活動を選んだ理由>以外の主な記述

- ・小さなミスとかを見逃していると、教えてくれて、全体発表の時に失敗がない。
- ・全体発表に向けての最終調整。
- ・全体で発表する際に、事前に発表の方法や言い方などを確認することができる。
- ・全体になってしまうと、小集団の中で良い意見を持っている人も言わなくなってしまうので、小集団はそういう人でも意見をしっかり言えて、全員の意見が聞けるところがいい。個人でた疑問も小集団の時に解決すれば、全体の時においていかれることはない。
- ・全体の場だとなかなか思ったことが言いづらいのですが、自分の考えを小集団では伝えられるところそして、そこで「いい考えだ」と認めてもらえると、全体でも発表しようと思えるところ。
- ・なかなか全体で発表できない人も、自分の意見を相手に説明する練習になるところ。
- ・ホワイトボードで書きながら説明しえらえるから、口だけで言うよりも、わかりやすく、速く理解ができる。
- ・4人という一人一人が意見を言える人数であり、また、意見が足りなくなかない。ちょうどいい構成
- ・わからない人に直接自分が教えられる。(全体だとなかなかできない)

#### ③小集団活動の問題点についての生徒の主な記述

- ・しゃべりやすく、まわりの無駄話が増えること。
- ・意見がみんな同じだったりすると、すぐに話し合いが終わってしまう。
- ・発言できる人がいないと話しが進まない。
- ・友達の意見の良いところの吸収ではなく、批判になってしまうところ。
- ・意見が違ったとき、一人一人がはっきりしていないと、どんどんわからなくなってしまうところ。
- ・ホワイトボードに落書きをしている人がいる。
- ・時間内に終わらなくて途中で説明が終わってしまう小集団や、早く終わって時間が余ってしまう小集団があるところ。
- ・よく発言する人とそうでない人に分かれるところ。
- ・メンバーによって意見の出具合いが違う。
- ・小集団の時間に個人追究をしている人がいて、なかなか小集団に入れない。
- ・難しい問題とかで、班員の誰もわからなかった場合、みんな考えるしかないところ。
- ・意見が分かると対立して、なかなか終われないときがあること。
- ・友達関係で、自分のしたい発言ができなかったりするところ。
- ・全員が説明している人の言っていることを理解する前に、次に進んでしまっていること。
- ・人の説明を写すのにいっぱいいっぱいになってしまう。

#### ④小集団活動の改善点に関する生徒の主な記述

- ・自分たちでしっかりとする。注意し合う。
- ・みんなで新しい考えを出そうと、話し合う。
- ・自分勝手なことをしないで、聞く人はしっかりと聞くなど、話し合いがしやすい雰囲気をつくる。など