

理数探究における数学的ものづくり活動教材“塩山”の開発

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2018-06-26 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 松永, 泰弘, 八木, 涼, 松永, 元輝, 大西, 俊弘 メールアドレス: 所属:
URL	https://doi.org/10.14945/00025377

理数探究における数学的ものづくり活動教材“塩山”の開発

Development of Teaching Materials “Salt Mountains” for Math Activities
in Mathematical and Physical Inquiry Class

松永泰弘*・八木涼**・松永元輝***・大西俊弘****
Yasuhiro MATSUNAGA・Ryo YAGI・Genki MATSUNAGA・Toshihiro ONISHI

（平成29年10月2日受理）

In this study, we developed the teaching materials for the mathematical manufacturing activities in STEM education and in the new subject “mathematical and physical inquiry (tentative name)”. For the mathematical manufacturing activities, “Salt Mountains¹⁾” is one of the teaching materials²⁾, for example, passive walking toys^{3, 4)}, salt mountains^{1, 5, 6)}, and intersecting bodies. “Salt Mountains” is the mathematical activity to explore the ridgeline of salt mountain formed when placing salt to the maximum on a flat figure. The students tackle the difficult problem for the new salt mountain while clarifying the difference between the prediction and the experiment result. In this paper, we clarified the shape of the particle and Salt Mountains’ angle, height, volume, mass, contour lines. We proposed the application method in the new subject “mathematical and physical inquiry”.

Key words : Mathematical and Physical Inquiry, STEM, Math Activities, Teaching Materials, Salt Mountains, Intersecting Bodies, Passive Walking Toys

1. 緒言

高等学校学習指導要領解説数学編⁷⁾, 次期中学校学習指導要領解説数学編⁸⁾, 次期小学校学習指導要領解説算数編⁹⁾では, 算数的活動・数学的活動とは, 児童・生徒が目的意識をもって主体的に取り組む算数・数学にかかわりのある様々な活動となる。ここで述べている「目的意識をもって取り組む」とは, 新たな性質や考え方を見いだそうとしたり, 具体的な課題を解決しようとしたりすることである。算数・数学的活動を通して, 数量や図形の意味を実感をもってとらえたり, 思考力, 判断力, 表現力等を高めたりできるようにするとともに, 算数・数学を学ぶことの楽しさや意義を実感できるようにするためには, 児童が目的意識をもって主体的・対話的に取り組む活動となるように指導する必要がある。

文部科学省「数理探究（仮称）に関する資料」¹⁰⁾「理数探究（仮称）に関する資料」¹¹⁾では,

* 技術教育系列

** 総合科学専攻

*** 学校教育研究専攻

**** 龍谷大学理工学部

次期学習指導要領に含まれる理数探究について、高度な思考力・判断力・表現力等を育成するための新たな教科・科目の在り方について検討するなかで、専門的な知識や技能の深化、総合化を図り、より高度な思考力・判断力・表現力の育成を図る目的で新設が検討されている科目案とし、内容としては、スーパーサイエンスハイスクールSSHの取り組み事例なども参考にしつつ、数学と理科の知識や技能を総合的に活用して主体的な探究活動を行う新たな選択科目となる。SSHで現在設定されている「サイエンス探究」では、数学と理科で育成された能力を統合し、課題の発見・解決に探究的に取り組み、高い教育効果がみられている。

また、産業競争力会議において提言された「成長戦略の進化のための今後の検討方針(案)」¹²⁾では、未来社会を見据えた初等中等教育の改革として、第4次産業革命に向けて異なる多様な知を結びつけながら新たな付加価値を生み出す創造的な活動を行うことができる人材、創造的に課題を発見・解決してイノベーションにつなげていくために必要な知識や思考力・判断力などを効果的に育む教育の必要性が述べられている。また、これを実現するために、理数教育と工学を融合したSTEM教育 (Science, Technology, Engineering, Mathematics) の重要性が強調されている¹³⁾。ITEEA (International Technology and Engineering Educators Association, formerly ITEA) が定義するSTEM教育の概念を表1に示す。

本研究では、新教科「理数探究」における教材として、また、STEM教育における教材として、数学的活動とものづくりを結び付けた数学的のものづくり活動教材を開発する。著者ら²⁾が数学的のものづくり活動教材として提示した紙製受動歩行模型^{3,4)}、塩山^{1,5,6)}、相貫体などの教材の中から塩山を取り上げ、抽象化と具体物、具体的量の間を往還する活動内容について明らかにする。塩山は、黒田によって考案され、土台となる平面図形の平板に塩を最大限まで盛ったときに形成される塩山の稜線、頂点を平板に投影した図形を探究する数学的活動である。また、塩山のモデルとなった砂山は、工学(粉体工学、土質工学)の分野において特に安息角に関する研究、粒子の大きさ、角の丸みや形状、湿度の影響に関する研究がなされてきた^{15,16)}。数学的のものづくり活動教材としての塩山は、数学的内容に工学的内容を融合させ、粒子の種類、形状、安息角、山の高さや体積・質量、等高線など、塩山の形状に関する様々なパラメータについて探究する教材といえる。生徒の活動は、予測と実験結果の違いを明らかにしながら、自ら考案した図形の塩山に挑戦する。本論文では、粒子の形状、安息角、山の高さや体積・質量、等高線について明らかにし、新教科「理数探究」における活用方法を提案する。

表1 STEM教育の各概念 (ITEA, 2000)¹⁴⁾

▶ Science (科学)
— 観察、問題の明確化、記述、実験に基づく調査、理論的説明を通じた自然界の研究。
▶ Technology (技術)
— 1. 問題解決と人間の可能性を拡大するシステムを発展させる知識をプロセスの生成を含む、人間の活動によるイノベーション。— 2. 認識された人間のニーズと欲求を満たすための、自然環境に対するイノベーション、改変、修正。
▶ Engineering (工学)
— 人類の利益のために、自然の素材と力を利用する方法を開発するための判断と創造性を得る際に、数学と自然科学(生物的、物理的)の知識を活用する。
▶ Mathematics (数学)
— 数や記号を用いて行う、パターンと規則の科学及び量と測定・性質・関係についての研究。



図1 紙コップ台上の正三角形平板の上に形成された塩山

2. 塩山

塩山は、黒田¹⁾によって考案され、土台となる平面図形の板に塩を最大限まで盛ったときに形成される山の稜線、頂点を平板に投影した図形を探究する数学的活動である。また、より複雑な平面図形の板を生徒自ら考え、製作し、その上に形成される塩山形状の探究に挑戦できる教材である。

著者らが提案する数学的ものづくり教材²⁾としての塩山は、工学（粉体工学、土質工学）の分野で研究されてきた粒子の種類・形状や安息角など山の形状に関する様々なパラメータについて探究する教材であり、抽象化と具体物・具体的量を往還する教材といえる。粒子の素材には、砂、灰、粘土、小麦粉、チョーク、カラーサンドなど様々である。数学的抽象化における未熟な理論を具体物・具体的量の測定実験で検証しながら、理論の訂正・修正を行い、その上に構築される別の具体的量に関する新たな抽象化をさらなる別の測定実験で検証することにより、確かな理論に近づける過程を体験する教材となる。

塩山は、境界のない水平面では円錐状の立体となり、塩の量の増加につれ円錐の大きさも大きくなる（図2）。境界が存在する平面図形の板では、円錐がいくつも連続し重なり合いながら塩山が形成され、頂点を結んだ稜線が現れる。稜線は境界からの距離が等しい点の集合といえる。図3に示すように、2直線の境界が鋭角をなすとき、稜線は角の二等分線となる。

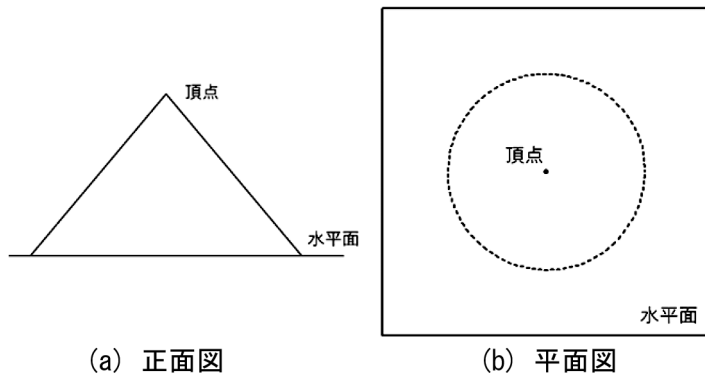


図2 水平面における塩山形成過程

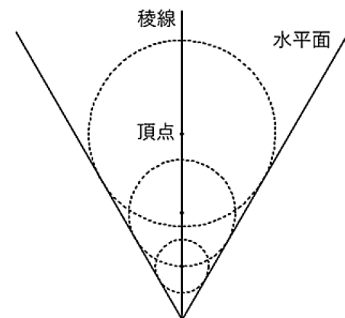


図3 鋭角境界部の塩山と稜線

平板の形状を変えることで塩山には多様な稜線が出現する。土台の図形が円るとき、塩山は円錐となり、頂点1点が現れるのみである。三角形と四角形の塩山を図4,5に示す。三角形の塩山は、図3からも明らかなように角の2等分線が3本出現し、その交点は三角形の内心となる。また、四角形の塩山については、図5に示すように、2等分線が4本出現し、その交点は辺の延長線がつくる三角形 ECD の内心 F と三角形 EAB の傍心 G となる。

境界が数式で表せないような複雑な図形の土台に対しても、境界に接する円の中心をプロットすることにより、稜線を推測することが可能である。また、稜線が明らかになることで、境界と稜線で囲まれた部分の塩山の高さ、体積を推測することが可能になる。

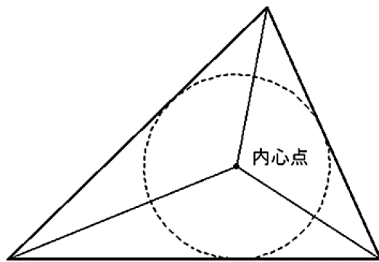


図4 三角形の稜線

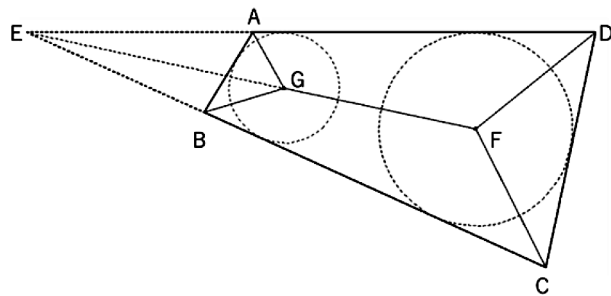


図5 四角形の稜線 (内心Fと傍心G)

3. 塩山形状の解析

複雑な図形の土台に塩山を形成する際にも円錐の塩山が基本となる。土台の図形に内接する円錐の頂点が連続して塩山の稜線となる。また、土台の各点に対応する塩山は「一定の角度で立ち上がり（安息角）、その高さは境界からの距離に比例する」と仮定する。そのため、境界から一定距離にある位置では、高さは等しい。

仮定 「塩山は一定の角度で立ち上がり、その高さは境界からの距離に比例する」

平面図形が単純な円、三角形、四角形の場合の稜線について、前章で述べた。本章では、円弧の境界を含む平面図形について取り扱う。

3-1 重心に円孔を有する正多角形の塩山

重心に半径 a の円孔を有する正三角形を図6 (a) に示す。円孔と辺との距離を b 、稜線上の点を $P(x,y)$ とする。また、境界に円弧が存在するため、円弧の中心を O' 、負の y 軸からの角度を φ とし、極座標 (r, φ) を定義する。

点 P は境界から等距離にある条件から

$$\sqrt{x^2 + [(a+b) - y]^2} - a = y \tag{1}$$

となり、稜線の式として2次方程式で与えられる。

$$y = \frac{1}{2(2a+b)} x^2 + \frac{b}{2} \quad \{x | 0 \leq x \leq (2a+b)/\sqrt{3}\} \tag{2}$$

ただし、極座標では、 $\{\varphi | -\pi/3 \leq \varphi \leq \pi/3\}$ の範囲で成立する。稜線の図形を図6 (b) に示す。

重心に円孔を有する正多角形 ($n \geq 3$) の場合についても、正三角形と同様、式 (2) で与えられる。このときの方程式の成立範囲は $\{\varphi | -\pi/n \leq \varphi \leq \pi/n\}$ となる。また、この方程式を角度 $2\pi/n$ ずつ $n-1$ 回回転させることで曲線部のすべての稜線の方程式が導出される。

次に、塩山の体積について考える。ただし、塩山の安息角を一定の値 θ と仮定する。

図6 (b) において、塩山の形状は $\{\varphi|0 \leq \varphi \leq \pi/3\}$ の領域の面対称の集合として与えられ、この部分の体積の6倍の体積となる。図中の $y = f_1(x)$, $f_2(x)$ は、それぞれ曲線および直線形状となる稜線の方程式であり、次式で与えられる。

$$y = f_1(x) = \frac{1}{2(2a+b)}x^2 + \frac{b}{2} \quad \{x|0 \leq x \leq (2a+b)/\sqrt{3}\} \quad (3)$$

$$y = f_2(x) = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + (a+b) \quad \{x|(2a+b)/\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}(a+b)\} \quad (4)$$

稜線の式 (3) を極座標で表すと、 r は次式となる。

$$r = g(\varphi) = (2a+b)/(1 + \cos\varphi) \quad \{\varphi|0 \leq \varphi \leq \pi/3\} \quad (5)$$

範囲①, ②, ③の塩山の体積を V_I, V_{II}, V_{III} とすると、それぞれの体積は塩山の高さを平板上の微小面積 $ds (= dx dy = r d\varphi dr)$ で積分することで与えられる。微小面積 ds は図形から容易に座標変換が可能であり、大学数学の内容(ヤコビの行列式, ヤコビアン)につながる。

体積 V は次式となる。

$$V = 6(V_I + V_{II} + V_{III}) \quad (6)$$

$$V_I = \int_0^{\pi/3} d\varphi \int_a^{g(\varphi)} r(r-a) \tan\theta dr = \left[\frac{\sqrt{3}}{810} (2a+b)^2 (28b-19a) + \frac{\pi}{18} a^3 \right] \tan\theta$$

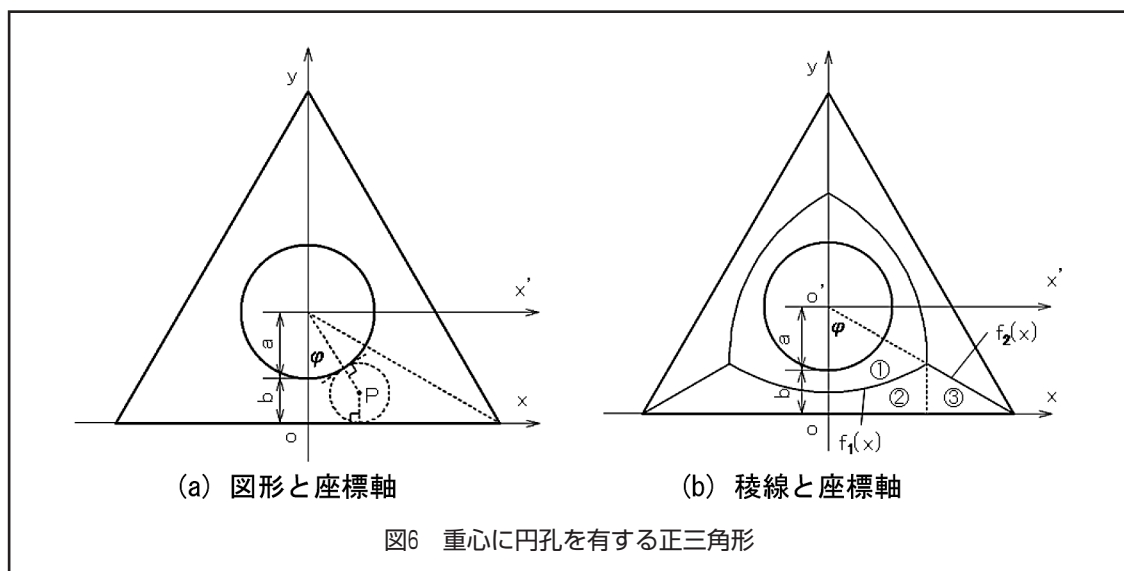
$$V_{II} = \int_0^{(2a+b)/\sqrt{3}} dx \int_0^{f_1(x)} y \tan\theta dy = \frac{\sqrt{3}}{270} (2a+b)(a^2 + 6ab + 14b^2) \tan\theta$$

$$V_{III} = \int_{(2a+b)/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}(a+b)} dx \int_0^{f_2(x)} y \tan\theta dy = \frac{\sqrt{3}}{162} (a+2b)^3 \tan\theta$$

したがって、塩山の体積 (式 (6)) は次式となる。

$$V = 6(V_I + V_{II} + V_{III}) = \left[\frac{\sqrt{3}}{9} (2a+b)(-2a^2 + 5ab + 6b^2) + \frac{\pi}{3} a^3 \right] \tan\theta$$

次に、塩山の等高線について考える。塩山の安息角を一定の値 θ と仮定しているため、等高線は境界からの等しい距離にある点の集合となる。したがって、図6 (b) において三角形の辺と稜線に囲まれた範囲では、三角形の辺の直線境界に平行な直線で等高線を形成する。また、円孔と稜線に囲まれた範囲では、等高線は円孔に対する同心円となる。



3-2 半円の塩山

半円も同様に内接する円錐の頂点の連続した線が稜線となる。

半径 a の半円を図7 (a) に示す。稜線上の点を $P(x,y)$ とし、境界に円弧が存在するため、極座標 (r, φ) を定義する (図7 (b))。

点 P は境界から等距離にある条件から

$$a - \sqrt{x^2 + y^2} = y \tag{7}$$

となり、稜線の式として2次方程式をえる。

$$y = f(x) = -\frac{1}{2a}x^2 + \frac{a}{2} \tag{8}$$

式 (8) を式変形すると、原点から稜線上の点までの距離 r は次式となる。

$$r = g(\varphi) = a/(1 + \sin\varphi) \quad \{\varphi | 0 \leq \varphi \leq \pi\} \tag{9}$$

次に、塩山の体積について考える。

図7 (b) において、塩山の形状は y 軸に関する線対称となり、第1象限の体積の2倍の体積となる。範囲①、②の塩山の体積を V_I, V_{II} とすると、体積 V は次式となる。

$$V = 2(V_I + V_{II}) \tag{10}$$

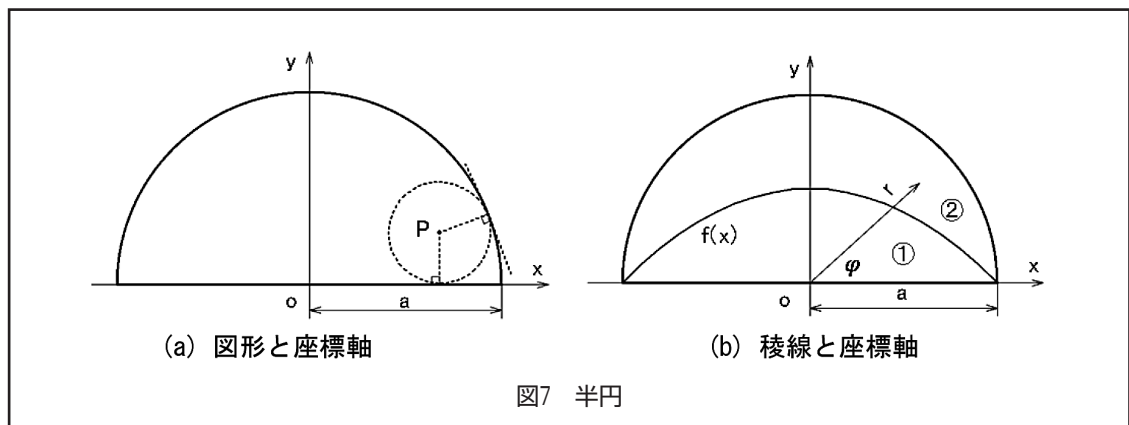
$$V_I = \int_0^a dx \int_0^{f(x)} y \tan \theta dy = \frac{1}{15} a^3 \tan \theta$$

$$V_{II} = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{g(\varphi)}^a r(a-r) \tan \theta dr = \left(\frac{\pi}{12} - \frac{8}{45}\right) a^3 \tan \theta$$

したがって、塩山の体積 (式 (10)) は次式となる。

$$V = 2(V_I + V_{II}) = \frac{3\pi - 4}{18} a^3 \tan \theta$$

次に、塩山の等高線について考える。塩山の安息角を一定の値 θ と仮定しているため、等高線は境界からの等しい距離にある点の集合となる。したがって、図7 (b) において円弧と稜線に囲まれた範囲では、境界である円弧と同心円の円弧として等高線を形成する。また、直線境界と稜線に囲まれた範囲では、直線境界に平行な直線で等高線を形成する。



3-3 円孔を有する円の塩山

半径 b の円孔が偏心量 e で存在する半径 a の円を図8 (a) に示す。稜線上の点を $P(x,y)$ とし、境界に円弧が存在するため、極座標 (r, φ) を定義する (図8 (b))。

点 P は境界から等距離にある条件から

$$a - \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x - e)^2 + y^2} - b \tag{11}$$

となり、稜線の式として楕円の方程式（標準形）

$$\left(\frac{x-e/2}{(a+b)/2}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{(a+b)^2 - e^2}/2}\right)^2 = 1 \tag{12}$$

をえる。上式は中心 $(e/2, 0)$ ，長軸の長さ $(a+b)$ ，短軸の長さ $\sqrt{(a+b)^2 - e^2}$ の楕円を表す。また，焦点の座標は $(e, 0)$ ， $(0, 0)$ となる。

(1) $e=b$ のとき，円孔は y 軸に接する。

$$\left(\frac{x-b/2}{(a+b)/2}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{a(a+2b)}/2}\right)^2 = 1$$

(2) $e, b=a/2$ のとき，円孔は y 軸と円に接する。

$$\left(\frac{x-a/4}{3a/4}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{2}a/2}\right)^2 = 1$$

(3) $e=0$ のとき，円孔と円は同心円となり，稜線は半径 $(a+b)/2$ の円となる。

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

次に，塩山の体積について考える。

図8 (b) において，範囲①，②の塩山の体積を V_I, V_{II} とすると，体積 V は次式となる。

$$V = V_I + V_{II} \tag{13}$$

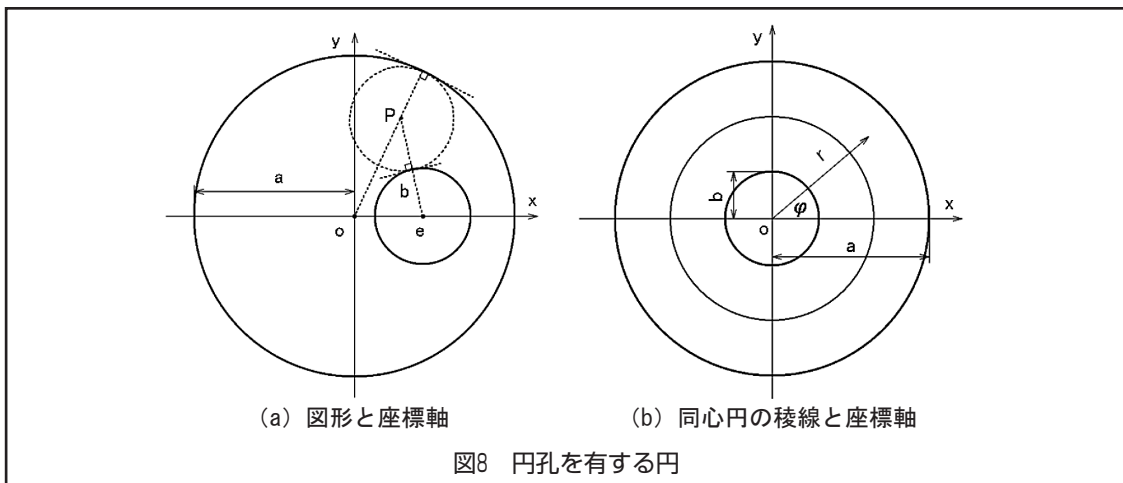
$$V_I = \int_b^{\frac{a+b}{2}} dr \int_0^{2\pi} r(r-b) \tan \theta d\varphi = \int_b^{\frac{a+b}{2}} 2\pi r(r-b) \tan \theta dr = \frac{\pi}{12} (a^3 - 3ab^2 + 2b^3) \tan \theta$$

$$V_{II} = \int_{\frac{a+b}{2}}^a dr \int_0^{2\pi} r(a-r) \tan \theta d\varphi = \int_{\frac{a+b}{2}}^a 2\pi r(a-r) \tan \theta dr = \frac{\pi}{12} (2a^3 - 3a^2b + b^3) \tan \theta$$

したがって，塩山の体積（式 (13)）は次式となる。

$$V = \frac{\pi}{4} (a+b)(a-b)^2 \tan \theta$$

次に，塩山の等高線について考える。塩山の安息角を一定の値 θ と仮定しているため，等高線は境界からの等しい距離にある点の集合となる。したがって，図8 (b) において境界および稜線がすべて円であるため，同心円として等高線を形成する。



4. 塩山形状の測定実験

塩山の安息角、頂点の位置・高さなどを明らかにするために、塩山をつくり写真撮影し画像解析を行う。

様々な図形の土台を使用し実際に塩山をつくり、頂点の位置・高さ、安息角、塩の量を測定する。ここでは正三角形の土台を使用した実験について扱う。実験では一般家庭で使用する塩、グラニュー糖、エンリッチ塩を使用した。条件を表2に示す。

表2 実験の条件

<p><実験条件></p> <ul style="list-style-type: none"> ・使用する粒子は、市販の塩・グラニュー糖・エンリッチ塩の3種類 ・各粒子に対して5回試行 ・同一日に連続して測定 ・土台は正三角形 ($S=2.5 \times 10^3 \text{mm}^2$)

4-1 粒子の形状と安息角

塩山の真横から写真を撮影し、JW-CADを使用して長さを測定し(図9)、既知の値との比によって実際の長さを算出する。頂点の高さと安息角の実験結果をそれぞれ表3,4に示す。また、3種類の粒子の顕微鏡写真を図10に示す。

表3,4において、頂点の高さのばらつき(平均値に対する偏差の百分率)は、市販の塩、エンリッチ塩、グラニュー糖に対して、それぞれ(-4.4,5.0), (-2.0,3.6), (-3.7,5.9)の範囲となり、エンリッチ塩は他の粒子と比較して約1/2の偏差である。また、安息角のばらつき(平均値に対する偏差の百分率)は、それぞれ(-11.6,5.2), (-1.5,3.0), (-6.1,8.4)の範囲となり、エンリッチ塩は他の粒子と比較して1/3以下の偏差である。以上の結果および塩山形成過程の観察から、エンリッチ塩を使用したときに安定してばらつきのない塩山を形成することが明らかとなった。

市販の塩(図10(a))は、粒子の大きさは他の2種類と比較して大きな差はみられないが、湿気に弱いため粒子が結合して存在していることがわかる。粒子の結合により複雑な形状となり、安息角は他の2種類の粒子と比較して急角度となる。高さにおいて約1.9倍の大きさを示す。エンリッチ塩(図10(b))に関しては、立方体に近い形状であり、粒子の角は面取りをしたような状態である。安息角は緩やかな角度となっている。グラニュー糖(図10(c))に関しては、エンリッチ塩と比較して粒子の角が立っており、立方体ではなく直方体の形状に近い。

安息角は、粒子の径・形状、湿度、微粉末の混入などに影響され、粒子径が小さいと安息角は大きい値となり、球形化にともない安息角は減少する^{15,16)}。グラニュー糖よりエンリッチ塩の方が立方体に近い形状であるが、粒子の大きさはエンリッチ塩よりグラニュー糖の方が大きい。粒子径の影響と球状化の影響が打ち消し合い、安息角に大きな差が現れないことがわかる。

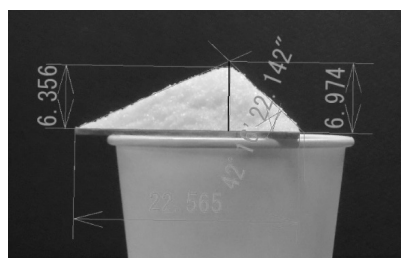


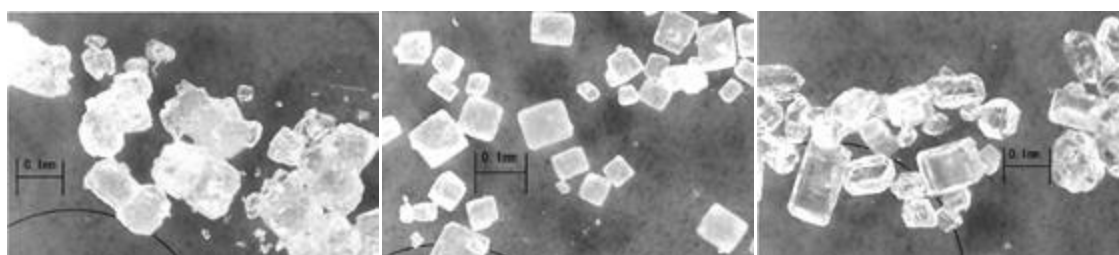
図9 写真解析の例

表3 頂点の高さ [mm]

試行	市販の塩	エンリッチ塩	グラニュー糖
1回目	34.7	19.2	19.1
2回目	36.7	19.8	18.5
3回目	35.0	20.3	18.2
4回目	35.4	19.5	18.0
5回目	38.1	19.3	19.8
平均値	36.3	19.6	18.7

表4 安息角[°]

試行	市販の塩	エンリッチ塩	グラニュー糖
1回目	54.43	44.31	45.09
2回目	63.24	45.03	42.27
3回目	62.36	47.02	39.06
4回目	62.98	46.01	39.64
5回目	64.77	46.11	41.82
平均値	61.56	45.70	41.58



(a) 市販の塩

(b) エンリッチ塩

(c) グラニュー糖

図10 粒子の形状

4-2 塩の質量

様々な図形の土台における塩山の塩の質量を推測するために、塩山の基本となる円錐における塩山の体積に対する塩の質量から塩山としての密度（塩の密度とは異なる）を測定する。ここでは、エンリッチ塩を使用する。

半径 a の円の土台に対し、塩山の頂点の高さは $h = a \tan \theta$ 、底面積は $S = \pi a^2$ となり、塩山の体積 V は

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{\pi}{3}a^3 \tan \theta$$

塩山の質量を測定すると、塩山としての密度

$$\rho = \frac{m}{V} = 3.1 \times 10^{-3} \text{ g/mm}^3$$

をえる。

測定した塩山の密度を用いて、三角形の板の塩山の質量を推定する。

一辺の長さ a の正三角形の土台に対し、塩山の頂点の高さは $h = (\sqrt{3}a/6)\tan\theta$ 、底面積は $S = (\sqrt{3}/4)a^2$ となり、塩山の体積 V は

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{24}a^3\tan\theta$$

で与えられる。塩山としての密度から、塩の質量が

$$m = \rho V = \frac{1}{24}\rho a^3\tan\theta = 5.40\text{g}$$

で推定される。実験による塩の測定値は $m=5.62\text{g}$ となり、誤差3.86%で塩の質量を推定したことになる。

5. 数学的ものづくり活動

塩山における数学的ものづくり活動全体の流れ（概要）を以下に示す。

- (1) 仮定「塩山は一定の角度で立ち上がり、その高さは境界からの距離に比例する」のもとで、塩山のモデル化を行う
- (2) モデルに従って数学的考察を行い、塩山の形状等を予測する
- (3) 実際に塩山を作り、形状の測定を行う
- (4) 予測と実験結果を比較し、考察する

5-1 塩山の活動

構想する塩山の活動展開を、知的好奇心を引き出す導入実験、基礎的概念・原理を探究する実験、未知の塩山に挑戦する製作・実験、塩山の形状パラメータに挑戦する実験、数学的ものづくり活動のまとめ、の各段階に分け、活動の詳細を以下に示す。

【知的好奇心を引き出す導入実験】

- ①：塩山の概要を簡単に説明する。
- ②：簡単な図形の土台（不等辺三角形）を提示し、塩山の形状と稜線を平板に投影した時の図形を予想する。具体物や具体的な体験なしの抽象的思考となる。
- ③：実際に塩山をつくる活動を通して、②で予想した稜線と実際の稜線を比較する。予想と一致しない場合にはなぜ実際の稜線がその形になっているのかを考え、他の生徒と話し合いの時間も設け、対話的探究を行う。三角形においては頂点の位置が内心と一致することなどの意見が出現する。

【基礎的概念・原理を探究する実験】

- ④：平面上で塩山をつくる活動を通して、塩山の形成過程（図2）とその性質を探究し、基礎的概念・原理を明らかにする。具体物・具体的量の抽象化を行い、稜線が現れず頂点のみの円錐形状、塩の量の増加に伴う円錐の拡大を明らかにする。
- ⑤：異なる粒子で塩山を製作し、差異を明らかにする。粒子の顕微鏡観察（図10）などに探究活動が発展し、塩山の形状の違いを表すパラメータ、安息角に気づく生徒が出現する。
- ⑥：平面図形の頂点部分での塩山の形成過程と稜線の出現（図3）に関する探究を行う。

稜線は境界から等距離にある点の集合という数学的概念に到達する生徒が出現する。

⑦：④～⑥について話し合いの時間を設け、対話的探究を行い、基礎的概念・原理についてまとめる。この基礎的概念・原理の上に、今後の探究を積み上げていく。

【未知の塩山に挑戦する製作・実験】

⑧：多角形（四角形）や円弧を含む形状、穴が開いた形状などの板を製作し、未知の塩山に挑戦する。

⑨：⑦における基礎的概念・原理を用い、稜線を数式で表現する活動を行い、知識を活用する能力を養う。境界が数式で表せないような複雑な図形の土台に対して、また、数式の導出が困難なときには、境界に接する円の中心をプロットすることにより、稜線を推測することが可能であり、このような方法を見つけ出すことで知識を活用する能力を養うこととなる。

⑩：⑨の数学的推論・数式表現を検証するために、実験・観察を行い、数理的考察・批判的考察を行う。

⑪：⑨、⑩について話し合いの時間を設け、対話的探究を行い、数学的推論の変更を行い、数学的味方・考え方の変革が起こる。

⑫：⑧～⑩を繰り返し、具体物・具体的量と一致した数式表現に到達し、知識・法則を獲得する。

【塩山の形状パラメータに挑戦する実験】

⑬：塩山の形状パラメータ、頂点の高さ、等高線の探究を行う。定規を使用しての測定、写真撮影・画像解析による測定、数式との比較など、知識を活用する能力が要求される。

⑭：塩山の体積、質量の探究を行う。数式を用いた積分による推定を行うが、土台の図形によっては算出式の立式が困難であるものもある。⑬における等高線の探究で到達した知識が重要となる。また、最も発展的な活動であるため、教師が積極的にかかわったグループ活動と同時に進めていく必要がある。

⑮：⑬、⑭の塩山の形状パラメータ、頂点の高さ、等高線、体積、質量の探究についても、数理的考察・批判的考察、対話的探究、数学的推論の変更を繰り返し、具体物・具体的量と一致した数式表現に到達し、知識・法則を獲得する。

【数学的ものづくり活動のまとめ】

⑯：塩山の数学的ものづくり活動について、獲得した知識、活用する能力、問題探究の手法、見通しなど、話し合う。

5-2 数学的ものづくり活動の枠組み

塩山以外にも、抽象化と具体物、具体的量の間を往還する数学的ものづくり活動教材として、相貫体、受動歩行模型²⁴⁾などを提示しているが、これらの教材においても適用できる可能性がある。導入から操作・実験・観察、基礎的概念の獲得、数学的推論、検証、数理的考察・批判的考察、法則・知識の枠組みを図11に示す。

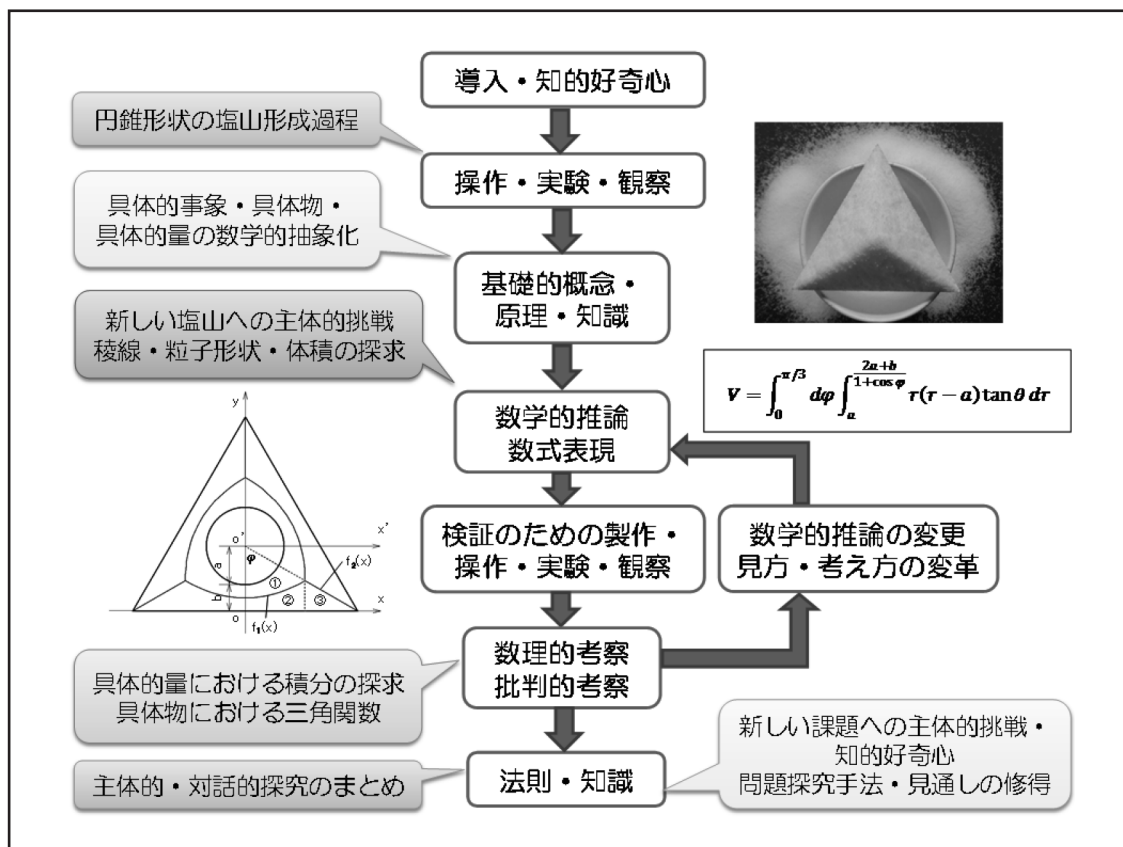


図11 数学的ものづくり活動の枠組み (「塩山」松永*)

6. 結言

本論文では、新教科「理数探究（仮称）」における教材として、また、STEM教育における教材として、数学的活動とものづくりを結び付けた数学的ものづくり活動教材「塩山」を開発し、抽象化と具体物、具体的量の間を往還する活動教材として提示した。

これまでの塩山の稜線、頂点を平板に投影した図形を探究する数学的活動に加えて、粒子の形状、安息角、高さや体積・質量など塩山の形状に関する様々なパラメータについて主体的・対話的に探究する教材として示した。

構想する塩山の活動展開を、知的好奇心を引き出す導入実験、基礎的概念・原理を探究する実験、未知の塩山に挑戦する製作・実験、塩山の形状パラメータに挑戦する実験、数学的ものづくり活動のまとめ、各段階に分け、活動の詳細を示した。また、塩山以外の教材、相貫体、受動歩行模型などにも適用できる可能性がある、導入から操作・実験・観察、基礎的概念の獲得、数学的推論、検証、数理的考察・批判的考察、法則・知識の枠組みを示した。

本研究は、平成29年度科学研究費補助金（課題番号：15K00972）の援助による。

参考文献

- 1) 黒田俊郎：塩山が教える幾何学，西三数学サークル，(2000)
- 2) 松永泰弘，八木涼，古田このみ，松永元輝：STEM教育における数学的ものづくり活動教材，日本産業技術教育学会第60回全国大会（弘前）講演要旨集，p.47（2017）
- 3) 松永泰弘，前田耕典：みらい創造科教材としての紙製4足受動歩行模型の開発，静岡大学教育学部研究報告，人文・社会・自然科学篇，第65号，pp.165-179（2015）
- 4) 松永泰弘，古田このみ：4足受動歩行模型教材を用いた授業提案と上肢下肢をもつ歩行模型の開発，第7回教科開発学研究会 発表論文集，pp.23-30（2017）
- 5) 矢崎成俊：実験数学読本，日本評論社，(2016)
- 6) 早苗雅史：数学玉手箱，デザインエッグ社，(2016)
- 7) 文部科学省：高等学校学習指導要領解説 数学編，(2009)
- 8) 文部科学省：中学校学習指導要領解説 数学編，(2017)
- 9) 文部科学省：小学校学習指導要領解説 算数編，(2017)
- 10) 文部科学省：数理探究（仮称）に関する資料，(2015)
http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo3/070/siryu/_icsFiles/afieldfile/2015/12/11/1363093_10_1.pdf (2017.9.17 確認)
- 11) 文部科学省：数理探究（仮称）に関する資料，(2016)
http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo3/073/siryu/_icsFiles/afieldfile/2016/05/11/1370455_14.pdf (2017.9.17 確認)
- 12) 内閣府産業競争力会議：成長戦略の進化のための今後の検討方針，(2016)
http://www.kantei.go.jp/jp/singi/keizaisaisei/pdf/housin_gaiyou_160125.pdf
(2017.9.17 確認)
- 13) 山崎貞登，大森康正，磯部征尊：イノベーション型学習能力を育むSTEM/STEAM教育からの小学校国語・社会・理科教科書の教材解釈，上越教育大学研究紀要，第36巻第1号，pp.203-2015（2016）
- 14) ITEA (International Technology Education Association), Standards for Technology Literacy – Content for the Study of Technology –, ITEEA (2000) 宮川秀俊，桜井宏，都築千絵（編訳）：国際競争力を高めるアメリカの教育戦略－技術教育からの改革－，教育開発研究所，(2002)
- 15) 大坪建：粉粒体の集合特性の役割－安息角に関する実験法則について－，粉体工学研究甲会誌，Vo.2, No.1, pp.179-188（1965）
- 16) 蓑嶋裕典，尾谷賢，内山智幸，篠原邦夫，高屋敷一仁，浦哲也：粒子形状による粉体物性の変化，北海道立工業試験場報告，No.295, pp.129-136（1996）