三角形の内心・傍心の軌跡に関するテクノロジーを利用した数学的探究の実際：動的幾何ソフトGeoGebraを利用して

【 論文 】

三角形の内心・傍心の軌跡に関するテクノロジーを利用した数学的探究の実際
−動的幾何ソフト GeoGebra を利用して−

大　西　俊　弘

愛知教育大学大学院・静岡大学大学院教育学研究科共同教科開発学専攻

要約

三角形の３つの頂点のうち、２つの頂点を固定し、もう１つの頂点をある曲線上で動かしたとき、三角形の５心がどのような軌跡を描くかについては、古くから考察されてきた。しかし、内心や傍心については、特別な場合を除いては、軌跡が２次曲線などになることがないため、代数的な方法で軌跡を求めることは困難である。近年、動的幾何ソフトが発達し、軌跡を描くだけでなくその方程式も求められるようになってきたが、内心と傍心の軌跡の方程式を求めることはできない。本研究では、曲線上を動く点から内心や傍心への座標変換式を求め、その逆変換式を利用することで、軌跡の方程式を求めることに成功した。その座標変換式は複雑な形となるが、頂点が楕円や双曲線上を動く場合について考察することにより、内心と３つの傍心の間には美しい関係が存在することを明らかにした。その結果は、頂点が動く曲線の種類を問わず、普遍的なものである。本研究は、SSH 校等で実施予定の「理数探究」向けの教材開発を目指すものである。

キーワード

内心、傍心、軌跡、方程式、GeoGebra

Ⅰ　はじめに

(1) 研究の意図と目的

現在、学習指導要領の改訂作業が進められており、高等学校数学科には、「理数探究」という科目が新設される見込みである。この科目は、従来は SSH（スーパーサイエンスハイスクール）で行われていた「課題研究」を発展させたものと考えることができる。理科の分野では、様々な素材があり、高校生による活発な研究が進められているが、数学の分野は適当な教材を見つけることが難しく、研究は比較的低調である。新学習指導要領実施に向けて、新たな教材の開発が急務であるといえる。数学分野が低調である理由の１つに、数学では実験することが難しいこと、一般化すると急に難しくなり高校生の手に負えなくなることが挙げられる。一方、動的幾何ソフトを用いると,高校生でも簡単に数学的実験(シミュレーション）を行うことができ、図形の性質等を発見することができる。また、視覚化することでイメージを持ちやすいという利点がある。本研究では、「理数探究」向けの教材開発の一環として、三角形の内心と傍心の軌跡を求めることに取り組んだ。

本研究では、三角形の１つの頂点が曲線上を動くとき、内心と傍心の軌跡がどのような曲線となるかについて考察する。この問題は多くの先人が考察してきたが、軌跡の曲線群全体については考察されていなかった問題である。

①研究の背景

三角形の２つの頂点を固定し、もう１つの頂点をある曲線上を動かすとき、三角形の５心の軌跡がどのような曲線となるかについては、秋山らによって古くから考察が行われてきた。特に、Cabri などの動的幾何ソフトが普及してからは、作図が簡単に行え、点の残像が残せるようになり、飯島や金田らによって様々な考察が行われてきた。

例えば、図１は、定点 A，B と線分 AB に平行な直線

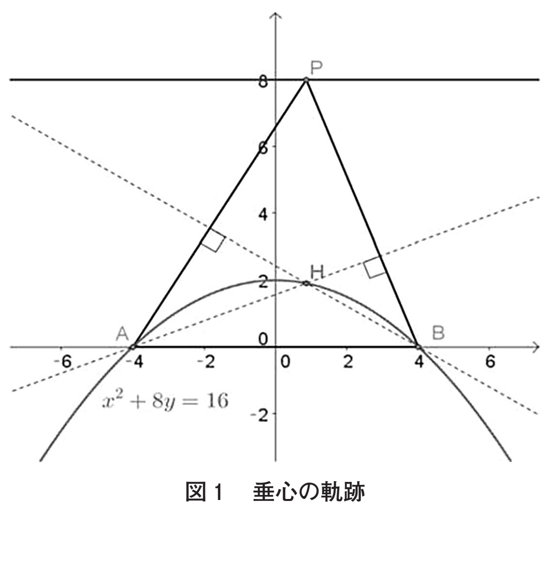

図１　垂心の軌跡

上を動く点Ｐがあるとき、△ ABP の垂心Ｈの軌跡を図示したものである。動的幾何ソフト GeoGebra では、数式処理（CAS）機能を有しているため、LocusEqution コマンドを用いて、図示だけでなく軌跡の方程式を求めることも可能である。

重心や外心についても、垂心の場合と同様の作図を行うことで、軌跡を図示することができ、GeoGebra を用いた場合には軌跡の方程式を求めることができる。

ところが、内心の場合は、図２に示したように軌跡の図示はできるが、その方程式を求めることは出来ない。内心Ｉの軌跡は楕円のように見えるが、詳しく調べてみるとそうではなく、見慣れない種類の曲線（楕円曲線）である。また、手計算でこの軌跡の方程式を求めることも難しい。

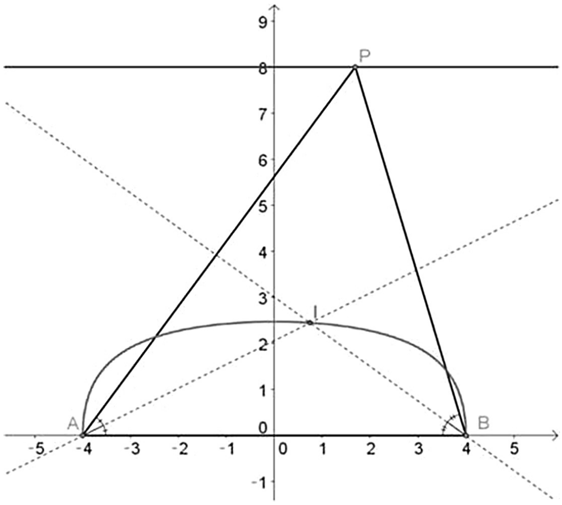

図２　内心Iの軌跡（Pが直線上を動く場合）

図３は、点Ｐが円周上を動く場合であり、やはり内心Ｉの軌跡は図示できるものの、その方程式を求めることができない。

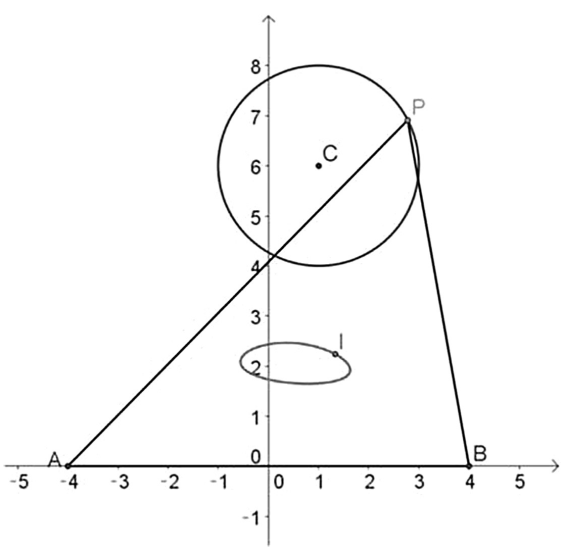

図３　内心Iの軌跡（Pが円周上を動く場合）

円以外のいろいろな曲線で試した結果、三角形の５心のうち、内心と傍心に関しては、軌跡の方程式が求められないことが分かった。本研究では、内心や傍心の軌跡の方程式が簡単に求められない理由を考察し、その壁を越える手法を開発する。

Ⅱ．頂点→内心の座標変換式

(1) 考察の方針

重心・垂心・外心の作図では、中点や垂線が重要な役割を演じるが、それらは数式で表現しやすい対象である。それに対して、内心と傍心の作図では、どちらも角の２等分線を用いるが、角の二等分線は数式では表しにくい。GeoGebra で軌跡の方程式が求められない理由として、角の２等分線の作図作業を、GeoGebra 内部で数式に変換する部分に無理があるのではないかと推察している。そこで、角の二等分線を表に出さずに内心を扱う方法を考えることにした。

内心の軌跡は一般に見慣れない曲線になることが多い。ところが、図４に示したように線分 AB を弦とする円周上を点Ｐが動く場合には、内心と３つの傍心の軌跡を合わせると２つの円となることが知られている。しかも、２つの円の中心を結ぶと元の円の直径となる。このことから内心と３つの傍心は密接な関係にあることが予想されるので、両者を統一的に扱う手法を考えることにした。

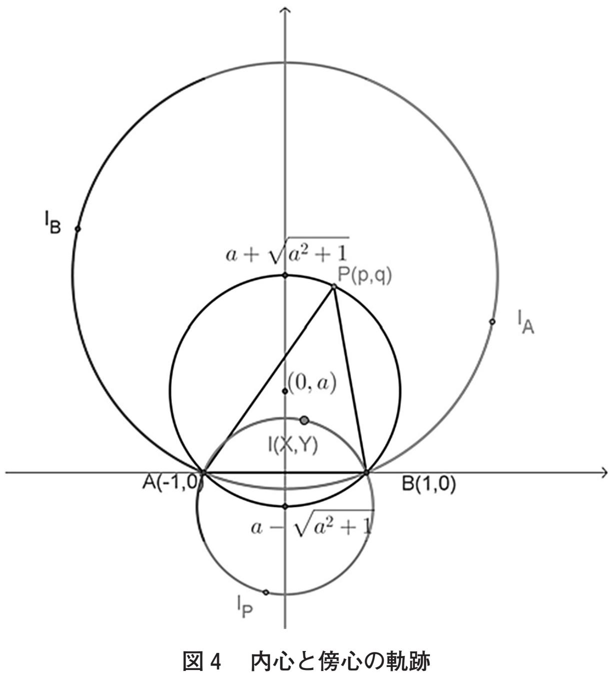

図４　内心と傍心の軌跡

(2) 考察の実際

内心と傍心を角の二等分線の交点と捉えるのではなく、三角形の各頂点を結ぶ３本の直線から等距離にある点と考えて、考察を進めることにする。問題を簡単にするため、図５に示したように座標平面上に３点Ａ(−1, 0)、B(1, 0)、P(p, q) をとり、△ ABP で考察することにする。

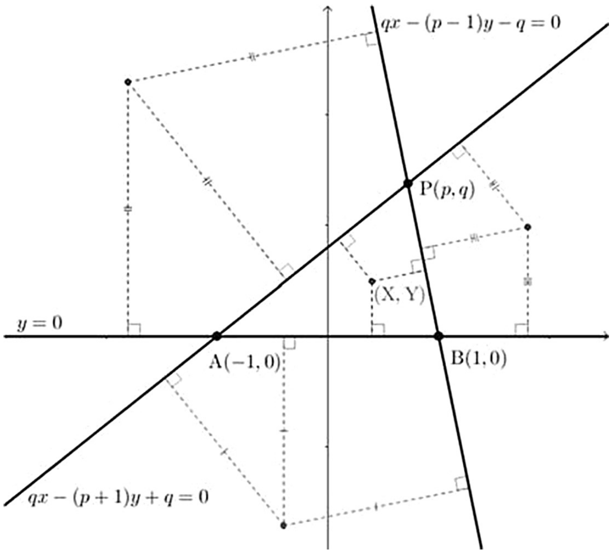

図５　3直線から等距離にある4つの点

直線 AP の方程式は

$$qx-(p+1)y+q=0 \quad \cdot\cdot\cdot (1)$$

直線 BP の方程式は

$$qx-(p-1)y-q=0 \quad \cdot\cdot\cdot (2)$$

直線 AB の方程式は

$$y=0 \quad \cdot\cdot\cdot (3)$$

点 (X, Y) と直線（1）との距離は

$$\frac{|qX-(p+1)Y+q|}{\sqrt{q^2+(p+1)^2}}$$

点 (X, Y) と直線（2）との距離は

$$\frac{|qX-(p-1)Y-q|}{\sqrt{q^2+(p-1)^2}}$$

点 (X, Y) と直線（3）との距離は

$$|Y|$$

点 (X, Y) が、3 つの直線（1)、(2)、(3）から等距離にあるとすると、次の関係が成り立つ。

$$\frac{|qX-(p+1)Y+q|}{\sqrt{q^2+(p+1)^2}}=|Y|$$

$$\frac{|qX-(p-1)Y-q|}{\sqrt{q^2+(p-1)^2}}=|Y|$$

この２式の絶対値の外し方によって、４組の式が得られる。それらを X, Y に関する連立方程式とみなして解くと次の４組の解が得られる。

（ア）内心 I

$$X=\frac{2p}{\sqrt{(p+1)^2+q^2}+\sqrt{(p-1)^2+q^2}}$$

$$Y=\frac{2q}{2+\sqrt{(p+1)^2+q^2}+\sqrt{(p-1)^2+q^2}}$$

（イ）傍心 $\mathrm{I_P}$

$$X=\frac{-2p}{\sqrt{(p+1)^2+q^2}+\sqrt{(p-1)^2+q^2}}$$

$$Y=\frac{-2q}{-2+\sqrt{(p+1)^2+q^2}+\sqrt{(p-1)^2+q^2}}$$

（ウ）傍心 $\mathrm{I_A}$

$$X=\frac{2p}{\sqrt{(p+1)^2+q^2}-\sqrt{(p-1)^2+q^2}}$$

$$Y=\frac{2q}{2+\sqrt{(p+1)^2+q^2}-\sqrt{(p-1)^2+q^2}}$$

（エ）傍心 $\mathrm{I_B}$

$$X=\frac{2p}{-\sqrt{(p+1)^2+q^2}+\sqrt{(p-1)^2+q^2}}$$

$$Y=\frac{2q}{2-\sqrt{(p+1)^2+q^2}+\sqrt{(p-1)^2+q^2}}$$

これら４式は、頂点 P(p, q) から内心 I（X, Y）等への座標変換式となっている。根号が登場するやや複雑な式ではあるが、別の形に変形することもできる。また、変換式を求める際に、角度を一切用いていないことに注意する。

Ⅲ．逆変換式から軌跡の方程式を求める

上記の変換式（ア）の逆変換を求めるため、次のようにおく。

$$\mathrm{L}_+=\sqrt{(p+1)^2+q^2} \qquad \mathrm{L}_-=\sqrt{(p-1)^2+q^2}$$

点 P(p,q)→内心 I(X,Y) の変換式を、L_+ , L_- を用いて表すと

$$\mathrm{X}=\frac{2p}{\mathrm{L}_++\mathrm{L}_-}$$

$$\mathrm{Y}=\frac{2q}{2+\mathrm{L}_++\mathrm{L}_-}$$

この２式から L_+ , L_- を消去すると

$$\frac{2q}{\mathrm{Y}}=2+\frac{2p}{\mathrm{X}}$$

$$q=\left(1+\frac{p}{\mathrm{X}}\right)\mathrm{Y}$$

ここで $\mathrm{L}_+{}^2-\mathrm{L}_-{}^2=\left\{(p+1)^2+q^2\right\}-\left\{(p-1)^2+q^2\right\}=4p$ より

$$2\mathrm{X}=\mathrm{L}_+-\mathrm{L}_-$$

この式と元の変換式から L_+ , L_- を消去すると

$$\mathrm{X}^2+2p+\frac{p^2}{\mathrm{X}^2}=(p+1)^2+q^2$$

$$\mathrm{X}^2+2p+\frac{p^2}{\mathrm{X}^2}=p^2+2p+1+\left(1+\frac{p}{\mathrm{X}}\right)^2\mathrm{Y}^2$$

$$\mathrm{X}^4+p^2=p^2\mathrm{X}^2+\mathrm{X}^2+\left(\mathrm{X}^2+2p\mathrm{X}+p^2\right)\mathrm{Y}^2$$

pに関して整理すると

$$(\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2-1)p^2+2\mathrm{XY}^2p-\mathrm{X}^2(\mathrm{X}^2-\mathrm{Y}^2-1)=0$$

因数分解すると

$$\left(p+\mathrm{X}\right)\left\{(\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2-1)p-\mathrm{X}(\mathrm{X}^2-\mathrm{Y}^2-1)\right\}=0$$

$p+\mathrm{X}\neq 0$ より $p=\dfrac{\mathrm{X}^2-\mathrm{Y}^2-1}{\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2-1}\mathrm{X}$

$$\begin{aligned} q&=\left(1+\frac{p}{\mathrm{X}}\right)\mathrm{Y}\\ &=\left(1+\frac{1}{\mathrm{X}}\cdot\frac{\mathrm{X}^2-\mathrm{Y}^2-1}{\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2-1}\mathrm{X}\right)\mathrm{Y}\\ &=\frac{2(\mathrm{X}^2-1)}{\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2-1}\mathrm{Y}\end{aligned}$$

よって、内心I(X,Y)から頂点P(p,q)への逆変換式は、次のようになる。

$$p=\frac{\mathrm{X}^2-\mathrm{Y}^2-1}{\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2-1}\mathrm{X}$$

$$q=\frac{2(\mathrm{X}^2-1)}{\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2-1}\mathrm{Y}$$

次に、変換式（イ）の逆変換を求める。

点P(p, q)→傍心$\mathrm{I_P}$(X, Y)の変換式を、L_+ , L_-を用いて表すと

$$\mathrm{X}=\frac{-2p}{\mathrm{L}_++\mathrm{L}_-}$$

$$\mathrm{Y}=\frac{-2q}{-2+\mathrm{L}_++\mathrm{L}_-}$$

この2式から$\mathrm{L}_++\mathrm{L}_-$を消去すると

$$\frac{-2q}{\mathrm{Y}}=-2-\frac{2p}{\mathrm{X}}$$

$$q=\left(1+\frac{p}{\mathrm{X}}\right)\mathrm{Y}$$

ここで、$\mathrm{L}_+{}^2-\mathrm{L}_-{}^2=\left\{(p+1)^2+q^2\right\}-\left\{(p-1)^2+q^2\right\}=4p$より

$$-2\mathrm{X}=\mathrm{L}_+-\mathrm{L}_-$$

この式と元の変換式からL_+ , L_-を消去すると

$$\mathrm{X}^2+2p+\frac{p^2}{\mathrm{X}^2}=(p+1)^2+q^2$$

となり、（ア）の場合と同じ途中式が得られ、変換式も同様となる。

よって、傍心$\mathrm{I_P}$(X, Y)から頂点P(p, q)への逆変換式は、次のようになる。

$$p=\frac{\mathrm{X}^2-\mathrm{Y}^2-1}{\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2-1}\mathrm{X}$$

$$q=\frac{2(\mathrm{X}^2-1)}{\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2-1}\mathrm{Y}$$

詳細は省略するが、上記（ウ）～（エ）についても同様に逆変換を求めると、上記の逆変換と全く同じ式となる。

逆変換式が分かれば、軌跡の方程式を求めることができる。

例えば、図4に示した線分ABを弦とする円周上を点Pが動く場合について考える。円の中心を$(0,a)$とすると、円の方程式は

$$x^2+(y-a)^2=a^2+1$$

点P(p, q)は、この円上にあるので、

$$p^2+(q-a)^2=a^2+1$$

この式に、逆変換式を代入することによって、X，Yに関する等式が得られ、これが軌跡の方程式となる。

手計算では代入・展開が煩雑となるが、GeoGebraならば数式処理（CAS）機能が使えるので、簡単に結果を求めることができる。$a=1$の場合の様子を示したのが図6である。軌跡が2つの円なので方程式は4次式と予想できるが、軌跡の方程式の計算結果は6次式となり、一瞬戸惑う。しかし、この6次式は$(x+1)(x-1)$を因数に持つことが分かり、これは2直線$x=-1$，$x=1$が

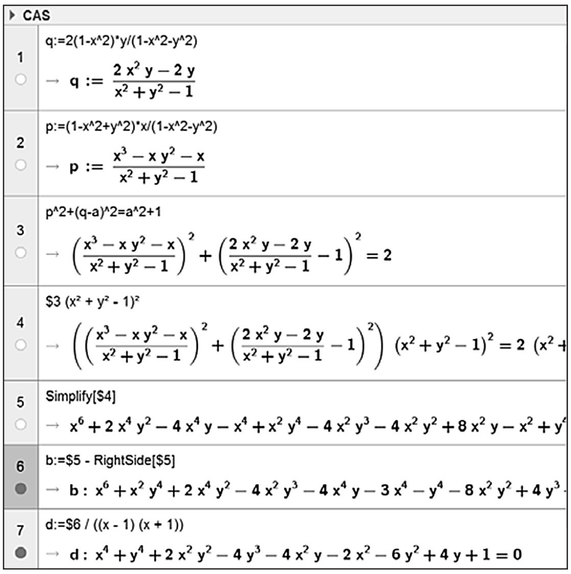

図6　CAS機能で軌跡の方程式を算出（$a=1$の場合）

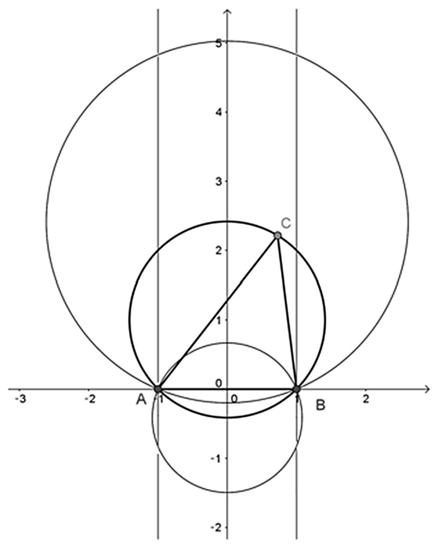

図7　内心と傍心の軌跡（CAS計算を結果，$a=1$ の場合）

内心と傍心の境界線となることを示している。その計算結果を図示したのが、図7である。

（ア）～（エ）の逆変換式が全く同じであるため、一度の計算で内心と傍心の軌跡を合わせて求めることができる。初等幾何的な証明では、内心と傍心それぞれについて証明しなければならないのに対して、一括して扱えることは明かなメリットといえる。

Ⅳ．内心と傍心の軌跡の本質

(1) 2頂点を焦点とする楕円上を動く場合

定点A, Bを焦点とする楕円上を点Pが動くとき、△ABPの内心Iの軌跡は、A, Bを頂点とする楕円となる。問題を簡単にするため、図8に示したように座標平面上に3点A(-1, 0)、B(1, 0)、P(p, q)をとり、△ABPで考察することにする。

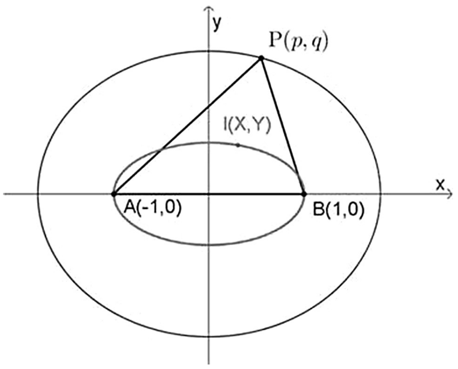

図8　内心Iの軌跡

A, Bを焦点とする楕円の方程式は、$a>1$として

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-1}=1$$

とおける。点Pがこの楕円上を動くとき、内心Iの軌跡の方程式は

$$x^2+\frac{y^2}{\frac{a-1}{a+1}}=1$$

となる。この楕円を図示すると図9のようになる。但し、2点A(-1, 0)、B(1, 0)は除く。

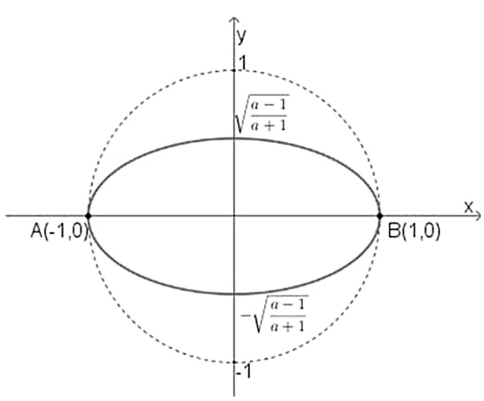

図9　内心Iの軌跡である楕円と4頂点

一方、傍心I_pの軌跡の方程式は

$$x^2+\frac{y^2}{\frac{a+1}{a-1}}=1$$

となり、この楕円を図示すると図10のようになる。但し、2点A(-1, 0)、B(1, 0)は除く。

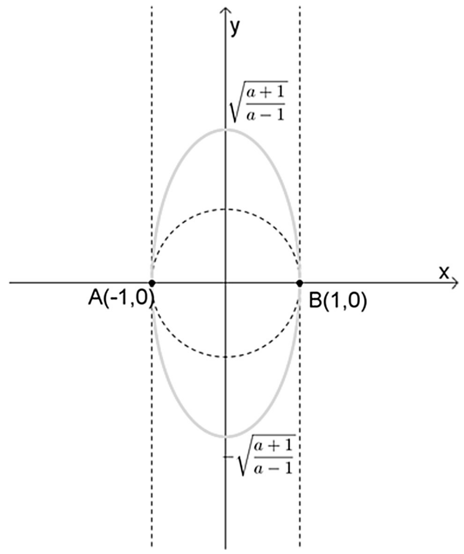

図10　内心I_pの軌跡である楕円と4頂点

次に、傍心I_Aについて考察すると、軌跡の方程式は、図11に示したように直線$x=a$(但し、点(a, 0)は除く)となり、楕円の頂点での接線という意外な結果が得られる。

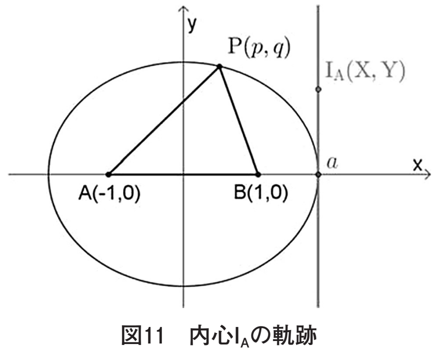

図11　内心I_Aの軌跡

最後に、傍心I_Bについて考察すると、軌跡の方程式は、図12に示したように、直線$x=-a$（但し、点(−a, 0)は除く）となる。この軌跡も、楕円の頂点での接線である。

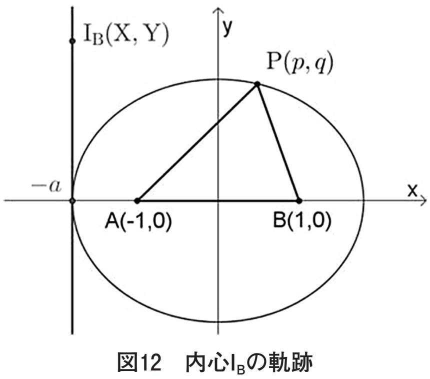

図12　内心I_Bの軌跡

(2) 軌跡を動的に考察

ここまでは、aを定数とみなしてきたが、これ以降は、aを変数とみなして考察を進める。

$a \to \infty$のとき、元の楕円は限りなく大きくなり、（線分ABを除いた）全平面を埋め尽くす。このとき、点Pは（線分ABを除いた）全平面上を動くことが出来る。（図13参照）

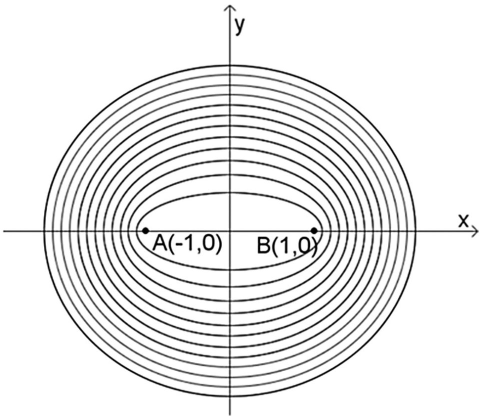

図13　元の楕円の変化の様子

aを少しずつ大きくして行くと、内心の軌跡の楕円は次第に大きくなり、単位円に近づいていく。（図14参照）

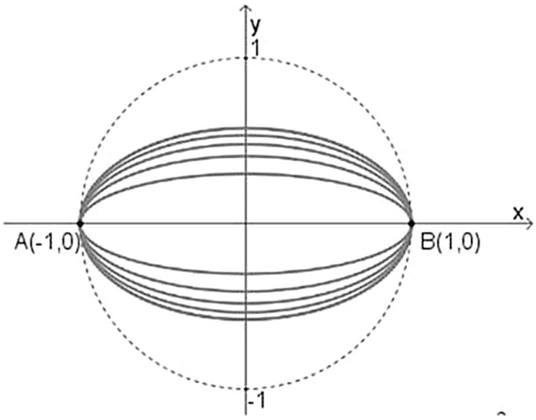

図14　内心の軌跡の変化の様子

このことより、内心Iは（線分ABを除いた）単位円の内部を全て動くことが出来る。すなわち、点Pが座標平面上を動くとき、内心Iは単位円の内部にのみ存在することが分かる。幾何学辞典等でこのことに関する先行研究を調べてみたが、見付けることができなかった。（図15参照）

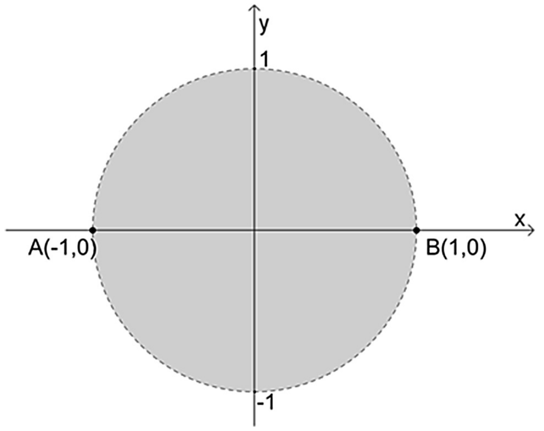

図15　内心Iの存在領域

内心と3つの傍心の軌跡を一括して図示すると図16のようになる。

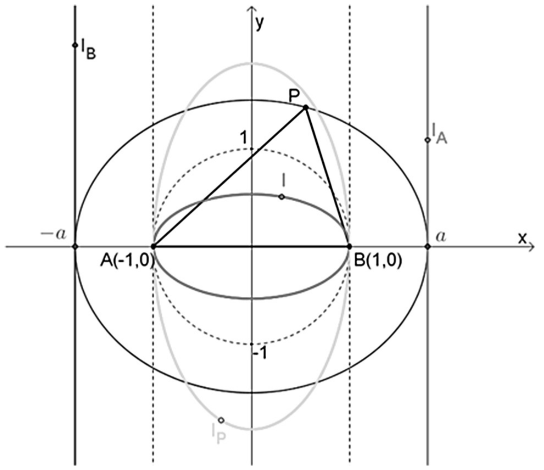

図16　内心と傍心の軌跡（楕円の場合）

aを少しずつ大きくして行くと、内心と3つの傍心の軌跡は、図17のように変化していく。

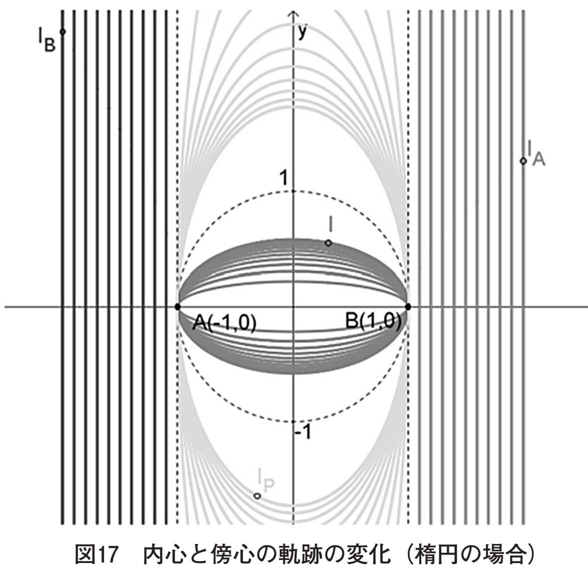

図17　内心と傍心の軌跡の変化（楕円の場合）

このことより、内心と３つの傍心を合わせると、（線分 AB を除いた）全平面上を動く。すなわち、点Ｐが全座標平面上を動くとき、内心や３つの傍心は特定の領域にのみ存在することが分かる。（図 18 参照）

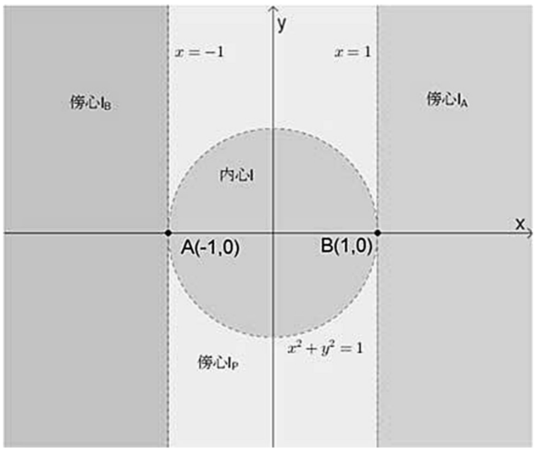

図18　内心と3つの傍心の存在領域

(3) ２頂点を焦点とする双曲線上を動く場合

Ａ，Ｂを焦点とする双曲線の方程式は

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{1-a^2}=1$$

とおける。（ただし、$0<a<1$）

定点Ａ，Ｂを焦点とする双曲線上を点Ｐが動くとき、△ ABP の内心の軌跡は、Ａ，Ｂを頂点とする双曲線となる。内心と３つの傍心の軌跡を一括して図示すると図 19 のようになる。

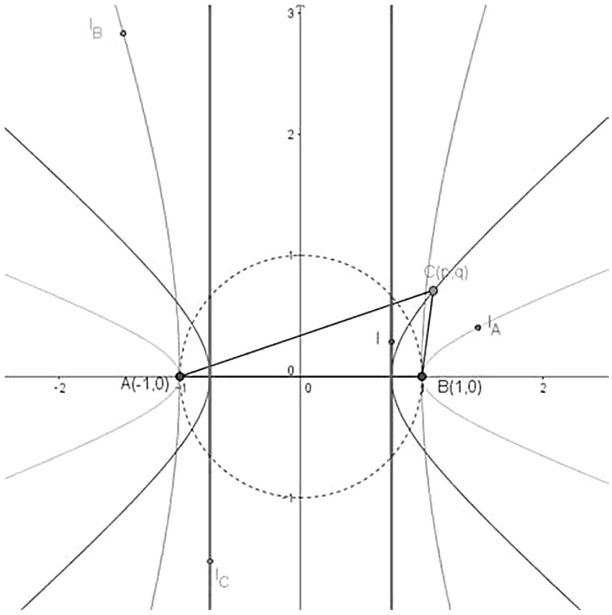

図19　内心と傍心の軌跡（双曲線の場合）

$a\to 1$ のとき、元の双曲線は限りなく x 軸に近づき、（x 軸上の点を除いた）全平面を埋め尽くす。このとき、点Ｐは（x 軸上の点を除いた）全平面上を動くことが出来る。（図 20 参照）

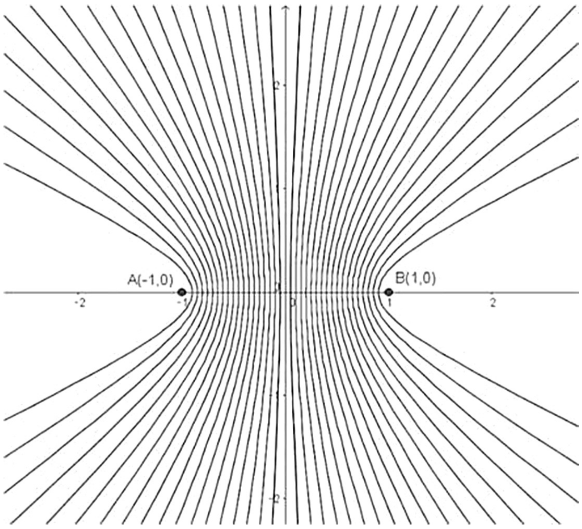

図20　双曲線の変化の様子

a を少しずつ１に近づけて行くと、内心と３つの傍心の軌跡は、図 21 のように変化していく。このことより、図 18 の場合と同じ結果が得られる。すなわち、点Ｐの動かし方に依存しないことが分かる。

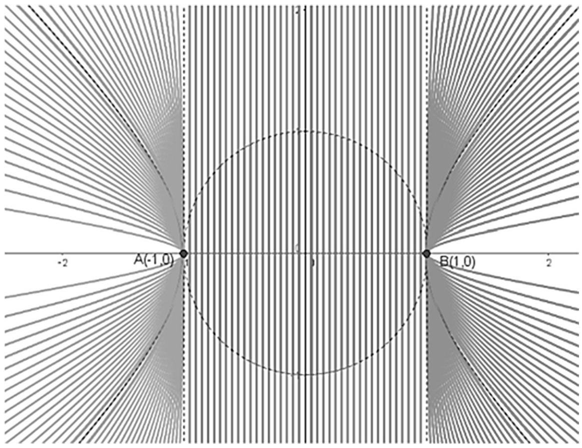

図21　内心と傍心の軌跡の変化（双曲線の場合）

Ｖ．おわりに

本研究を進めていく途中では、様々なシミュレーションを行い、楕円上を動く場合に面白い結果が得られることが次第に明らかになった。それをきっかけに、手計算で証明を試み、内心と傍心に関する全体像が明らかとなった。そこで用いた手法は、高校レベルのものであり、結果は高校生でも理解できるものである。数式変形等を記述すると長くなるので本稿ではその一部を示した。

GeoGebra などの動的幾何ソフトを利用した図形の性質の探究は、高校生などでも十分に可能なものである。高校生が探究活動を行った場合に、彼らが発見する性質の多くは既知のものであろうが、高校生に探究する面白さを伝えることができる。また、探究の結果がまだ知られていないものでもあれば、それを証明することによって立派な研究成果となるであろう。次期学習指導要領で

はSSH校向けの科目として「理数探究」新設されるが、そこで動的幾何ソフトを利用した幾何学的探究は重要な教材となる可能性を秘めている。今回の成果は、「理数探究」向けの教材の例としてまとめる予定であり、来年度にはSSH校で授業実践を目指したい。

引用・参考文献

秋山武太郎,「新版幾何学つれづれ草」, サイエンス社, 1993,（原本は大正8年, 高岡書店）

飯島康之,「作図ツールGeometric Constructorを使った探究事例と教育実践について」, 数理解析研究所講究録第1674巻, 2010, pp. 99-111

飯島康之,「内心・傍心の軌跡」, http://www.auemath.aichi-edu.ac.jp/teacher/iijima/gc/w2j/w_wrong-01.htm

小野田啓子,「内心, 垂心, 重心の軌跡」2009, http://www.u-gakugei.ac.jp/~onodakk/math/kyouzaikenkyuu/naisinsuisinjusin_kiseki/naisinsuisinjusin_kiseki.doc

金田和豊,「作図ソフトを利用したいろいろな軌跡についての探究」, T3年会論文集, 2010, pp.120-125, http://www.t3japan.gr.jp/pdf2010/24_kaneda.pdf

参拾萬数学工房,「内心と傍心の軌跡」, 2007, http://map.300000.net/math/2007web.pdf

【連絡先　大西　俊弘
077-544-7198】

Case Study of Mathematical Inquiry on Locus of Incenter and Excenters of Triangle with Dynamic Geometry Software GeoGebra

Toshihiro Onishi
Cooperative Doctoral Course in Subject Development in the Graduate School of Education, Aichi University of Education & Shizuoka University

Abstract

Many mathematicians have been studied what kind of locus of triangle centers draw when two vertices of triangle are fixed points and another vertex move on curves. Since the locus of incenter and excenters never become quadratic curves except for special cases, it was difficult to obtain the locus equations by algebraic methods. In recent years, we can draw locus with dynamic geometric software easily, but it is impossible to obtain locus equations of incenter and excenters. In this study, we find the coordinate transformation formula from the point moving on the curve to incenter and excenters. We obtain locus equations of incenter and excenters by using the inverse transformation formula. The coordinate transformation formulas are complicated. But, we find beautiful relationships between the incenter and excenters by considering the case that the vertex moves on ellipse or hyperbola. The results are universal, regardless of the type of curve the vertex moves.

Keywords

incenter, excenter, locus equation, GeoGebra