臨界ソボレフ空間における非線形分散型方程式の研究

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ６ 月 １６ 日現在

機関番号：１３８０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2013～2016
課題番号：２５８０００７７

研究課題名（和文）臨界ソボレフ空間における非線形分散型方程式の研究

研究課題名（英文）Study of nonlinear dispersive equations in critical Sobolev spaces

研究代表者
赤堀　公史（Akahori, Takafumi）

静岡大学・工学部・准教授

研究者番号：９０４３７１８７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,000,000円

研究成果の概要（和文）：非線形分散型方程式の１つである非線形シュレディンガー方程式を研究した．特に、エネルギー臨界項を含む2重冪型の非線形性の場合を研究した。 研究目的は、 対応する基底状態の近傍から出発した解の挙動を明らかにする事であった。 成果としては、 周波数が十分小さい基底状態に対し、その近傍から出発した球対称解は、 散乱、爆発、基底状態に拘束される、かのいずれかになる事が証明できた。特に、解の挙動と周波数毎に異なるポテンシャルの井戸との関係を明確にした点は意義があると考えている。

研究成果の概要（英文）：I studied a combined power-type nonlinear Schrodinger equation including the energy critical exponent. The aim is to reveal the behavior of the solutions starting from a neighborhood of a ground state. As a result, I proved that for any ground state with a sufficiently small frequency, the radial solutions starting from its neighbourhood exhibit one of the following scenarios: scattering to a free solution, blowup, or trapping by the ground state. Moreover, our proof clarifies the relation between potential wells with different frequencies.

研究分野：偏微分方程式

キーワード：非線形シュレディンガー方程式　散乱問題　基底状態の安定性

１．研究開始当初の背景

非線形分散型方程式に分類される偏微分方程式には、非線形シュレディンガー方程式、Korteweg-de Vries（KdV）方程式、Benjamin-Ono 方程式をはじめとする多くの方程式があり、物理や工学における現象を記述するために用いられている。
 微分方程式が現象を記述できているかは、現象に対応した解が存在するかで決まる。特に、非線形分散型方程式では、分散性と非線形性の兼ね合いから、散乱解、爆発解、定在波（ソリトン）と呼ばれる３つの特徴的な解が考えられ、これらの研究が重要な役割を果たす。
 非線形分散型方程式の数学的な研究は、１９９０年頃から急速に発展した。例えば、初期値問題の適切性の研究は、Cazenave, Weissler, Bourgain, Koch, Tataru をはじめとする研究者達の貢献により、方程式から決まる臨界ソボレフ空間またはそれに近い関数空間において研究が可能になり、最良の結果も得られるようになった。また、爆発解の研究は、Merle や Raphael をはじめとする研究者達により、モジュレーション解析を利用した詳細な解析が行われるようになった。散乱解の研究は、Ginibre や Velo をはじめとする研究者の貢献の後、２０００年以降に新たな発展を遂げた。特に、Bourgain によって発表されたエネルギー臨界単独冪型非線形シュレディンガー方程式に関する論文において現在の発展の基礎が築かれ、その議論を応用・発展させる事により、散乱解に関する多くの問題が解かれてきた。さらに、２００６年に Kenig-Merle の論文で発表された方法、および２０１１年に Nakanishi-Schlag の論文で発表された方法によって、散乱問題はさらなる発展を遂げた。特に、これまで扱う事が困難であった引力型の非線形性を持つ分散型方程式に対しても散乱問題を考えられるようになった。また、質量臨界と呼ばれる非線形性の場合でも散乱問題を扱う事が可能となった。特に、質量臨界の場合は、方程式の対称性が多いため、他の場合よりも難しい事が予想されていたが、Tao, Visan らの研究を経て、近年、Dodson により、引力型の場合も斥力型の場合も完全に解決された。一方で、エネルギー臨界項を含む非線形性の場合には、基本的かつ重要な問題が未解決問題として残っている。実際、エネルギー臨界かつ引力型の単独冪型非線形シュレディンガー方程式に対する散乱問題は完全には解決できていない。この方面のさらなる発展のためには, エネルギー臨界の非線形性を持つ分散型方程式に対して、解の時間大域的な挙動を明らかにする手法を発展させる必要がある。

２．研究の目的

非線形分散型方程式の代表例である非線形シュレディンガー方程式を考察する。特に、基本的な非線形性である冪型の非線形性を持つ場合に対し、以下の内容を明らかにすることが主な目的である。

（１）エネルギー臨界項と劣臨界項を含む２重冪型の非線形楕円型方程式の基底状態に対し、適当な変換を施した後の、周波数ゼロおよび無限大での極限を明らかにする。この問題は、エネルギー臨界項と劣臨界項を含む２重冪型の非線形シュレディンガー方程式のダイナミクスを知る上で重要な役割を果たすことが、これまでの研究から分かっている。さらに、周波数ゼロおよび無限大での極限の情報を利用し、周波数が十分小さい場合および周波数が十分大きい場合の基底状態の一意性、周波数に関する微分可能性、さらに、基底状態のまわりの線形化作用素の性質を明らかにする。

（２）エネルギー臨界項と劣臨界項を含む２重冪型の非線形シュレディンガー方程式に対し、対応する楕円型方程式の基底状態の周波数（方程式に現れるパラメータ）が十分小さい場合、および十分大きい場合に、それらの基底状態の近傍から出発した解の挙動を、散乱、爆発、基底状態への拘束（基底状態の安定性）の観点から明らかにする。特に、基底状態を利用した不変集合（ポテンシャルの井戸）を導入し、そこから出発した解の挙動を明らかにする。非線形分散型方程式に関するこのような研究は Nakanishi-Schlag による研究から進展したものの、まだまだ発展途上である。本研究における場合でもスケール不変性の欠如などから生じる困難があり、基底状態の近傍のダイナミクスは決して自明なものではない。

（３）エネルギー臨界かつ引力型の単独冪型非線形シュレディンガー方程式に対して、基底状態よりもエネルギーが小さい解の挙動を、散乱・爆発の観点から明らかにする。この問題は５次元以上では、Killip-Visan によって肯定的に解決されているが、３次元および４次元の場合の非球対称解に対しては未解決である。かなり難しい問題であるため、解決の手掛かりとなるようなアイデアの開発を目指す。特に、波の重心に注目し、波の重心がどのようなスピードで動くかを明らかにしたい。また、まだプレプリントの段階ではあるが、Dodson によって、４次元の場合を肯定的に解決したという報告もあるため、検証を行い、Dodson による研究手法が３次元にも拡張可能かを検証する。さらに、既に解決された質量臨界の場合の研究手法も取り入れ、解決を目指す。

３．研究の方法

（１）エネルギー臨界項と劣臨界項を含む２重冪型の非線形楕円型方程式の基底状態に対し、適当な変換を施した後の周波数ゼロおよび無限大での極限を明らかにするために、基底状態の変分的特徴付けと凝集コンパクト性の議論を用いる．周波数ゼロでの極限に対しては、周波数に応じたスケール変換を行う。この変換により、極限方程式がエネルギー劣臨界の単独冪型の非線形楕円型方程式になり、極限はその方程式の基底状態となる事が予想できる。一方で、周波数が無限大での極限は、周波数ゼロでの極限と同じ変換を施しても極限が存在しないため、基底状態の原点での値（基底状態の最大値）を利用した変換を用いる。この変換により、極限方程式は質量項のないエネルギー臨界の単独冪型楕円型方程式になり、極限は Talenti 関数となる事が予想できる。

周波数ゼロおよび無限大での極限が明らかになった後は、周波数が十分小さい場合と十分大きい場合の一意性の証明に着手する。基底状態の一意性の問題は、それ自体が楕円型方程式に関する重要な問題であると共に、基底状態の周波数に関する微分可能性を証明する際にも必要となる。一意性を証明するためには、上述した周波数に関する極限と摂動論を応用する。

（２）エネルギー臨界項と劣臨界項を含む２重冪型の非線形シュレディンガー方程式に対し、対応する楕円型方程式の基底状態の近傍から出発した解の挙動を明らかにするために、基底状態の変分的特徴付を利用したポテンシャルの井戸を導入し、さらに、Nakanishi-Schlag の議論を応用する．ここでは，基底状態のまわりの線形化作用素の性質が重要な役割を果たす．線形化作用素の性質を明らかにするためには、上述した基底状態の極限の情報と摂動論を応用する．また、Nakanishi-Schlag の議論の応用において、スケール不変性の欠如などから生じる困難があるため、周波数毎の詳細な解析も行う．

（３）エネルギー臨界かつ引力型の単独冪型非線形シュレディンガー方程式の解の挙動を明らかにするためには、Kenig-Merle, Killip-Visan, および Dodson によって開発された議論を応用する。特に、これらの議論の中で登場する最小爆発解と呼ばれる解に対し、その波の重心運動に関する詳細な解析を行う。特に、波の重心が 1 次以上のスピードで動かない事が分かれば、最小爆発解の様子が分かり、問題解決への重要な手がかりとなる。そのために、まずは波の重心の運動量に関する考察を行う。

４．研究成果

（１） エネルギー臨界項と劣臨界項を含む２重冪型の非線形楕円型方程式の基底状態に対し、適当な変換を施す事によって、周波数ゼロおよび無限大での極限を明らかにした。特に、周波数ゼロでの極限に関しては、エネルギー劣臨界の単独冪型楕円型方程式の基底状態に収束する事が証明できた。さらに、この収束の情報と摂動論を用いて、周波数が十分小さい場合に、基底状態の一意性および基底状態のまわりの線形化作用素のスペクトルに関する情報を得る事もできた。一方、周波数無限大での極限に関しては、期待する極限の情報から基底状態自身の最大値を用いた変換を考えた。この変換を施す事によって、極限が Talenti 関数になる事を証明した。さらに、周波数が十分大きい場合にも、基底状態は平行移動と位相差を除いて一意である事を空間５次元以上の場合に証明した。上述したように、周波数が十分大きい場合は、Talenti 関数のまわりでの線形化作用素の核が非自明な球対称関数を含むため問題が非常に複雑になる。さらに、Talenti 関数が空間３次元と４次元では２乗可積分にならないため、周波数ゼロの場合と比べて非常に難しい問題となっている。そのため、空間５次元以上に制限された結果であっても、一意性を証明できた事には十分意義があると考えらえる。

（２）エネルギー臨界項と劣臨界項を含む２重冪型の非線形シュレディンガー方程式に対し、対応する楕円型方程式の基底状態の周波数が十分小さい場合に、その基底状態の近傍から出発した解の挙動が、散乱、爆発、基底状態への拘束、のいずれかになる事を証明した。証明には、Nakanishi-Schlag の議論を応用するが、考えている方程式にスケール不変性がないため、周波数に関する詳細な解析を行う必要があった。また、本研究により、周波数毎に定義されるポテンシャルの井戸が、Nakanishi-Schlag の議論においてどのような役割を果たしているかが明らかになった。

（３）エネルギー臨界かつ引力型の単独冪型非線形シュレディンガー方程式に対し、Talenti 関数よりもエネルギーが小さい解の挙動を散乱・爆発の観点から研究した。この問題は３次元と４次元の場合が未解決である。まず、４次元の場合を肯定的に解決した論文がプレプリントサーバーに投稿されたため検証を行った。また、そのプレプリントのアイデアを３次元にも拡張できるか試みたが、別のアイデアも必要であると考えられる。次に、Kenig-Merle の議論を応用した際に得られる最小爆発解に対して、その波の重心に関する考察を行い、重心の運動量に関する詳細な情報を得ることができた。また、ま

だ解決には至っていないが、最小爆発解に対し、周波数に依存しない緊密性を証明できれば、運動量に関する情報と合わせて、波の重心がどのようなスピードで動くかを特定できる事が分かった。さらに、最小爆発解の可積分性に関する情報も得る事ができた。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　2　件）

① 赤堀公史、名和範人、菊池弘明、
Blowup and scattering problems for the nonlinear Schrodinger equations,
Kyoto Journal of Mathematics, 査読有, 53, 629-672, 2013.

② 赤堀公史、 Slim Ibrahim、名和範人、菊池弘明、
Existence of a ground state and scattering problem for a nonlinear Schrodinger equation with critical growth, 査読有,
Selecta Mathematica 19, 545-609, 2013.

〔学会発表〕（計　5　件）

① 赤堀公史、
Dynamics around ground states for combined power-type nonlinear Schrodinger equations with critical growth,
Applied Math Seminar,
2016 年 11 月 30 日、University of Victoria（Canada）

② 赤堀公史、
Global dynamics for the nonlinear Schrodinger equation with combined power-type nonlinearities,
Applied Math Seminar,
2015 年 10 月 6 日、 University of Victoria (Canada)

③ 赤堀公史、
Global dynamics above the ground state energy for a class of nonlinear Schrodinger equations with critical growth -small frequency case-
第 12 回青葉山勉強会、
2015 年 6 月 30 日、東北大学大学院情報科学研究科（宮城県仙台市）

④ 赤堀公史、
Global dynamics above the ground state energy for a class of nonlinear Schrodinger equations with critical growth -small frequency case-
線形および非線形分散型方程式の研究、
2015 年 5 月 19 日、京都大学数理解析研究所（京都府京都市）

⑤ 赤堀公史、
On nonlinear Schrodinger equations with critical growth,
線形および非線形分散型方程式の研究、
2014 年 5 月 20 日、京都大学数理解析研究所（京都府京都市）

６．研究組織

(1)研究代表者
赤堀 公史（AKAHORI TAKAFUMI）
静岡大学・工学部・准教授
研究者番号：90437187

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
なし

(4)研究協力者
なし