静岡大学教育学部附属教育実践総合センター紀要　No.7 p.43～61 (2001)

《論文・実践報告》

中学校数学の授業における導入問題に関する一考察

A study on the problems as introduction to mathematical classes in junior high school

両　角　達　男*

Tatsuo MOROZUMI

（平成13年1月9日受理）

This study focusses on the problems as introduction to mathematical classes in junior high school (introduction problems), considers essential factors to create good introduction problems and examples based on many class practices. The reason to focuss introduction problem is "good introduction problem" can arouse student's learning will and activitis to study mathematics more widely and deeply.

First, six factors are given as "good" introduction problem through analyzing preceding research about problems treated in mathematical classes and Morozumi's mathematical class practices extend over nine years as a teacher of secondary school. These factors cope with next elements (①～⑥) to compose good mathematical classes taken by reciprocal relation between teacher and students, ① to appreciate interest, ② to understand, ③ to know and think of mathematical extent and deep, ④ to rouse several sense, ⑤ to do and solve correctly, ⑥ to have tension comparatively.

Next, 12 examples are presented as "good" introduction problems acuiring through the actual class practices. Every problem concerns about school algebra such as properties about number, linear equation, algebraic expression and symmetric expression, etc. Students have much interest and think about these more mathematically, widely and deeply.

After this, I must develop more "good" introduction problems and give many materials to do "good" mathematical class for many secondary mathematical teachers.

Keywords : introduction problem, good problem, mathematical class

1．はじめに

ある数学の授業がよいか否かを判断する基準や価値観は多様である。数学の授業の中にみられるいくつかの変数の中から、客観的に数量化して量的に分析する方法から、教室空間における教師と生徒との社会的相互作用やそのやりとりの中で変容していく生徒の認識、そして教師の意識や態度の変化などを授業内における言語活動やノンバーバルな表現を分析することによって分析していく質的な方法まで、様々な研究成果が現在までに発表されている。[(1)～(5)]

*数学教育講座（講師）

本稿では、そうした研究や数学の授業で用いる「問題」に関する先行研究のいくつかを背景にふまえつつ、中学校の数学の授業を対象にした「よい授業」をおおまかに捉え、その授業の根幹の一つといえる「授業における導入問題」について考察する。(6)~(13)

その際、筆者自身の8年間にわたる筑波大学附属中学校における授業実践を振り返り、実際に授業実践をしていく中で「生徒が意欲的に学習活動を行った授業」（のってきた授業）に焦点をあて、その素材提示を主に行う。本稿では数式領域に焦点をあて、12題の問題およびその問題のねらいや展開例を簡潔に掲載している。いずれも、筆者自身が実際に授業実践を行ってきたものであり、これに付随する詳細な授業記録をもとにしている。

筆者の提示した素材をさらに改良して実際の中学校数学の授業実践に活かして頂いたり、さらなる題材開発や問題設定に役立てて頂ければ幸いである。なお、筆者自身も、図形領域も含めて今後さらに素材提示を行っていく予定である。

2.「よい数学の授業」として考えられることがら

「よい数学の授業」を語ることばとして、例えば次の6つが挙げられる。

① おもしろい授業
② わかる授業
③ 数学的な拡がりや深まりのある授業
④ 感性を喚起していく授業
⑤ できるようになる授業
⑥ ある程度の緊迫感がある授業

これらのうち、「おもしろい授業」「感性を喚起していく授業」「できるようになる授業」について詳しく述べると次のようになる。

○「おもしろい授業」について

中学校数学の授業において、生徒が「おもしろい」と感じることは次なる学習の推進力となってはたらくことが多い。実際の授業場面では、生徒の目の色が変わって取り組んでいくことや友達と議論することに夢中になっていくことに現れる。そうした「おもしろさ」を挙げていくと、次のようなことがらが考えられる。

（ア）当初掲げた予想と異なる結果が生じることによる意外性のあることへの「おもしろさ」
（イ）題材の中にいくつかの性質が入っていそうな期待感があることに対する「おもしろさ」
（ウ）前提条件を拡げていっても結論として成り立つことが一致する、一般性や適用範囲が拡大していくことに対する「おもしろさ」
（エ）図形や文字式などにみられる対称性、自然界に多くみられるパターンの繰り返しなど美しさが感じられることに対する「おもしろさ」
（オ）公式に適用すれば思考を節約しながら解が出せるなど、省略化できることに対する「おもしろさ」
（カ）パズル的な問題を解いていくときに代表される、一見すると簡単に解決できそうな雰囲気があるが、実際に解くと難しさがあることに対する「おもしろさ」

（キ）問題のからくりを解き明かしていくことに対する「おもしろさ」
（カ）問題の構造を理解する上で、大変わかりやすい比喩があることを知ったり、みつけたりすることに対する「おもしろさ」
（ク）友達と議論しあったり、議論することそれ自体がもつ「おもしろさ」（中学校以降では学年進行につれて、他者の議論をきくことに対する「おもしろさ」も増える。）
（ケ）問題に対する「答え」が自分なりに導き出せることに対する「おもしろさ」さらに正解を出すことができる成就感に対する「おもしろさ」
（コ）「それは何だろう？どうなっているんだろう？」という知的好奇心をいだくことに対する「おもしろさ」

これらのことがらは、「感性を喚起していく授業」にも対応している。感性を喚起していくとは、生徒がすでにもっている感性を数学の授業の中で奮い立たせていくことである。

数学の授業の中で活用される感性として、次のようなものが考えられる。

○「感性が喚起していく授業」における感性として考えられること

（ア）美しさを感じること
（イ）不思議さを感じること
（ウ）意外性を感じること
（エ）簡潔さや単純さを感じること
（オ）便利さを感じること
（カ）有用性や応用性などの拡がりを感じること

○「できるようになる授業」について

わかるからできるようになる、できるようになるからおもしろくなってくる、できるようになるからわかってくる、といったように「できる」という用語と「わかる」「おもしろい」などとの関係をふまえていく必要があるが、「できるようになる」ためには次のように様々なレベルが考えられる。

（ア）計算それ自体ができるようになること
→理由はよくわからないけれど計算はできるようになる～理由や意味もわかっていて計算ができるようになる～計算をしていくそれぞれのステップの意味がわかって、計算できるといったように様々な段階がある。
（イ）模範解答をみながら、同じように解けるようになること
（ウ）問題をみて、問題を解く見通しがたつようになること
（エ）問題を解くことができること
（オ）問題に応じての解答がしっかり書けるようになること
（カ）問題の作り手の意図が読めるようになること
（キ）同じような問題が自分で作れるようになること
（ケ）いくつかの関連する問題の共通点がわかるようになること
（コ）いくつかの問題の構造がみえるようになること

「おもしろい授業」「感性を喚起していく授業」「できるようになる授業」として考えられることを列挙してみたが、こうしたことがらを数学の授業で達成していくためには、数学の授業時間で扱う問題と授業内での教師と生徒および生徒相互のやりとりの2つが非常に重要な役目を果たす。先述したように、本稿では前者の「数学の授業で扱う問題」に焦点をあてて述べていく。

3．「数学の授業で扱う導入問題」について

現在、多くの中学校の数学の授業としてとられている方法は、右のチャートのように、主に6つの段階によって組まれているものであろう。日本の数学の授業では「述べる・練り上げる」という段階が優れている、といったことがTIMSSによる他国の数学授業との比較などから報告されているが、ここでは「きっかけ」にあたるところに焦点をあてたい。[注]

1時間の数学の授業を、右のようなチャートによって組んでいく場合には、授業の最初にある「きっかけ」づくりが大変大きな役割を果たす。その「きっかけづくりの重要性については、今まで多くの方が述べている。例えば、相馬（1997）は次のように述べる。[14]

きっかけ ⟶ 問題場面の提示（場の設定）
↓ ↓
つかむ ⟶ 問題把握の段階
↓ ↓
みつける・考える ⟶ 個人での追求過程
↓ ↓
述べる・練り上げる ⟶ 考えの発表・話し合い
↓ ↓
まとめる ⟶ まとめの段階
↓ ↓（板書やプリントの活用）
定着させる ⟶ 教科書を用いての練習
および一般化などの発展

【1時間の数学の授業のプロセス】

「授業成功の7割は問題の善し悪しによる。中学校の現場で15年間授業をしてきた私の実感である。よい「問題」を用意した時には、「ワクワクした気持ち」で授業に望むことができた。そして、授業のための教材研究で、私が最初に時間をかけたのが「問題づくり」であった。「どんな問題を提示するのか」というのが、「問題解決の授業」のポイントである。」

そして、相馬（1997）は同著の中でよい「問題」としての主たる条件として次の2つを挙げる。

「このような、「問題解決の授業」に生きる、よい「問題」を工夫したい。

そのための「問題」の条件として、私は次の2点を基本にしたい。

① 生徒の学習意欲を引き出すことのできる問題

② 問題の解決過程で新たな指導内容（知識や技能、見方や考え方）を身につけさせることのできる問題」

また、Do Mathの指導を重視している古藤ら（1990）は、Do Mathを重視するきっかけとなったHalmos（1989）らの考えを次のように紹介する。[15]

「知識は経験から生まれるものであるから、学習活動は問題場面から起こると考えることができる。つまり、学習は教師の側から与えられるものではなく、一人一人の子どもの自発的な構成活動によって成立する。

"Knowing" mathematics is "doing" mathematics.

われわれは、一方的に与えられた知識では価値がないと主張するのではなく、その価値は、目的的な活動過程で活用して初めて意義が生まれてくるのである。」

こうした主張は、場（situation）の設定を重視する平林一栄らの主張とも相通じるところが多い。

これらの主張を概観すると「よい問題」開発が、数学の授業における「よい問題」設定につながり、「よい問題」を用いて授業展開していくことによって、最終的に「よい数学の授業」に結びついていくと考えられる。本稿では、中学校数学における「よい問題」に焦点をあてているが、この「よい問題」を規定する条件としては先にあげた「よい数学の授業」を語ることばに対応した条件が必要となってくる。

① おもしろい授業

→ (1)　**生徒の知的好奇心や学びの中にみられる「おもしろさ」をふまえた問題**

② わかる授業

→ (2)　**問題解決のプロセスの中で、既知の知識と関連できたり、新しい知識や見方・考え方を得ることができる問題**

③ 数学的な拡がりや深まりのある授業

→ (3)　**数学的な拡がりや深まりを内在した問題、あるいは数学的な拡がりや深まりをふまえて作成された問題**

④ 感性を喚起していく授業

→ (4)　**生徒の感性を喚起することができる問題**

⑤ できるようになる授業

→ (5)　**多様なレベルで解決できる問題**

⑥ ある程度の緊迫感がある授業

→ (6)　**その段階の生徒にとって、ある程度の難度がある問題**

（注：緊迫感は思考の上で重要と考えるが、あまりに緊迫感がありすぎると学習の弊害となることを踏まえる必要がある。発達段階や生徒なりの領域を踏まえた難度を授業実践の中からつかむ必要がある。）

上記の(1)〜(6)が、筆者の考える「よい問題」の条件であり、以下に挙げる**【問題1】**〜**【問題12】**がその例である。(1)〜(6)の諸条件は複合的に関わってくるので、それぞれの問題と条件とを対応させて述べることはしていない。ただし、問題の問いかけ方を変えることによって、指導者側の意図としての(1)〜(6)の条件の強弱は変えることが可能である。

【問題1】〜**【問題12】**は、いずれも数式領域から選んでいるため、今後図形領域など多領域についても「問題開発」を行ったり、「よい問題」を生むための素材提供を行っていく予定である。12個のいずれの問題とも、実際に筆者の授業実践を通して改良を加えたり、オリジナリティーを出したものである。今後に向けて、特に数学的な拡がりと深まりを視野に入れ、中学校と高等学校との接続を意識した、よい問題を開発していきたい。

【問題１】 右のように、Ａ～Ｇの位置に、自然数を小さい順に
① 左からは５つまで
② 右からは６つまで
順に書いていく。このとき、次の各問に答えなさい。

	A	B	C	D	E	F	G
(１段目)	1	2	3	4	5		
(２段目)		11	10	9	8	7	6
(３段目)	12	13	14	15	16		
(４段目)		22	21	20	19	18	17
(５段目)	・	・	・	・	・		
(６段目)		・	・	・	・	・	・

(1) 500は、Ａ～Ｇのどの位置で何番目にありますか。
それはなぜですか。

(2) 4554は、Ａ～Ｇのどの位置で、何番目にありますか。
それはなぜですか。また、5291ではどうですか。

【問題のねらい】

Ｂの位置で偶数段目にある数が「11の倍数」であることや、自然数を11で割った剰余が（１段目）と（２段目）にならぶ数と同じになることに気づかせ、11の倍数の性質や11の倍数の見分け方に関する問題に発展させていく。

みつけることのおもしろさ、なぜそうした数になるのかなという疑問を抱くこと、からくりを暴いていくことのおもしろさなどを味わわせたい。なお、【問題１】は７を法とする数表にすればカレンダーになるし、一般の整数ｎとして問題を拡げていくことができる。

【展開例】

１．500は、Ａ～Ｇのどの位置にあるだろうか？

① 数表をみて気づくことは何だろうか。
- ・偶数番目のＢの位置にある数は、すべて11の倍数になっている。
- ・Ａの位置にある数のそれぞれの位の数の和が、段数と一致している。
- ・Ａ～Ｇのどの列でも共通していえることが、一つおいた段への数の増え方が11で一定。
- ・奇数段から偶数段にある、縦の列の数の増え方に規則性がある。
- ・10の倍数を記していくと、ちょうど将棋の桂馬飛びのような分布になっている。

② 500はどの位置にあるだろうか。
- ・500÷11＝45…５　ゆえ、偶数段で45サイクルのところ。すなわち、45×２＝90段目のＢの位置に495がある。
- ・Ｅの位置の数は、11で割って５余る数が入るところなので、91段目のＥの位置に500が出てくる。

２．4554や5291は、Ａ～Ｇのどの位置にあるだろうか？

・１～11の数で１サイクル（２段で１サイクル）になっているとみると、
4554÷11＝414あまり０　→ 414×２＝828段目のＢの位置にある。
5291÷11＝481あまり０　→ 481×２＝962段目のＢの位置にある。

３．この問題でもとになっていることは何だろう？

・11の倍数に着目すると、数表の中のどこに数が位置付くかがわかる。
・11で割った余りの数によって、Ａ～Ｇのどの列にあるかがわかる。

【問題２】

(1) 右の数に共通にいえることは何だろうか。
また、それはいつでもいえることなのだろうか。

121
242
484
5445
6776

（※5291や7051を後から提示する。）

(2) ※(1)の議論の中で仮説として提示する。

> 数を左からみて、
> （奇数番目の位の数の和）－（偶数番目の位の数の和）＝（11の倍数）
> であるならば、もとの数は必ず11の倍数になっている。

このことは、いつもいえるだろうか。

【問題のねらい】

３桁や４桁の11の倍数のうち、数自体が左右対称であったり、リズミカルに数が配置されている数をじっくりと観察することから、11の倍数のもつ性質や「11の倍数の見分け方」に着目していく。ある範囲で性質を見いだしたり、これが成り立ちそうかなという仮説をたてた後に、その範囲を広げていくことを通して「不変な性質」や変わっていく性質を見つけていく。生徒の議論の中で出てくると予想される(2)の仮説が、電卓などを用いながら検証していくプロセスの中で、この仮説以外のものが見いだされるプロセスはまさにDo Mathといえよう。

【展開例】

１．(1)の数で共通にいえることは何だろうか？

・いずれの数も左右対称になっているし、11の倍数である。

・４桁の数を２桁ずつに分けた数にすれば、左右対称になっている。また、２桁ずつに分けた数同士を足すと $45+54=99$、$67+76=143$ で「11の倍数」になっている。

・３桁の数では百の位と一の位の数の和が十の位の数になっているし、４桁の数では左から奇数番目の位の数の和と偶数番目の位の数の和が同じになっている。

・5291や7051では、$(5+9)-(2+1)=11$ のように「位の数の和」の差として11が出てくる。

２．（奇数番目の位の数の和）－（偶数番目の位の数の和）＝（11の倍数）ならば、もとの数はいつも11の倍数だろうか？

・$(8+9)-(5+1)=11 \rightarrow 8591\div 11=781$、$(3+4+5)-(9+3)=0 \rightarrow 39435\div 11=3585$
電卓を用いて、「位の数の和」の差が11または０となる数は、みな11で割り切れる。

・8591という数を１の位から逆に書いていくと「1958」という数が出てくるけど、これも11で割り切ることができる。でも、「位の数の和」の差は、$(1+5)-(9+8)=-11$ だ。

・「位の数の和」の差が22となる数として、91927という５桁の数がある。これも11の倍数になる。また、「位の数の和」の差が33となる数として、9090903が作れるけどこれも11の倍数になっている。

３．11の倍数の見分け方をまとめよう。

・(2)の「位の数の和」の差が０と11のときだけでなくて、「11の倍数」のときにもとの数も11の倍数になっている。これは、９の倍数の見分け方に似ている。

【問題２】の「11の倍数の見分け方」を検証していくプロセスでは、文字を用いて説明を

する前に次のような学習活動を行うと、擬変数（一般化された数）としての証明を見いだしたり、数多くの事例を携えることによる意識の高まりをもって、文字式での説明（証明）のプロセスに移行することができる。

(1) 電卓を用いて、「位の数の和の差」が11の倍数となる数をいくつも作り、その数を11で割ってみること。

(2) BASICなどで、次のような簡素なプログラムを組んでみて、いくつか試行してみること。

〈BASICで作成したプログラム〉

Aの値を入力	10 INPUT "A"; A
Bの値を入力	20 INPUT "B"; B
Cの値を入力	30 INPUT "C"; C
Dの値を入力	40 INPUT "D"; D
↓	50 X1=((A+C)-(B+D))/11
位の数に着目した	60 X2=(1000*A+100*B+10*C+D)/11
式を11でわる計算	70 PRINT "1000*A+100*B+10*C+D="; 1000*A+100*B+10*C+D
もとの4桁の数を	80 PRINT "((A+C)-(B+D))/11="; X1
11でわる計算	90 PRINT "(1000*A+100*B+10*C+D)/11="; X2
↓	100 END

位の数に着目した式の値や4桁の数を表示

なお、文字式を用いた説明を行う中2の段階では、上記の簡素なプログラムの意味を理解することは十分できるし、50～90の命令文にみられる指示を変えていけば他の桁の数に拡げてみたり、もっとうまいプログラムを組むことができる。また、基本的な命令文を教えればこうした簡素なプログラムを生徒の方からつくることは可能である。さらに、プログラムを組んでいくプロセスが、条件の整理と、仮定や結論を明確にすることに大きく関わっていくために、文字式を用いた説明（証明）に移行する上で大変効果的である。

（※上記のような簡素なプログラムであれば、ハンディーなポケットコンピュータなどで十分である。）

【問題2】は、次の**【問題3】**のようにして導入することもできる。

【問題3】 次の6ケタの数は、何の倍数だろうか。また、これらの数に共通にいえることは何だろうか。	1 2 3 1 2 3 2 3 4 2 3 4 4 5 6 4 5 6 5 4 3 5 4 3 7 5 3 7 5 3

【問題のねらい】

123123＝123×1001＝123×7×11×13 のように、3桁の数が連続してできる6桁の数は、11の倍数始め、7や13の倍数になっている。見方を変えると、7、11、13の倍数で10の累乗の数に近いものとして1001が見いだされることから、7、11、13の倍数の見分け方を見いだしていくヒントをこれらの数に共通することの考察から得ることが期待される。

【問題４】 現在、達也君は13歳、達也君の父は45歳である。父親の年齢が、達也君の年齢の□倍になるのは何年後だろうか。

(1) □＝３、□＝５、□＝９
それぞれの場合について、いろいろな方法で求めよう。

(2) □が、３、５、９の場合以外ではどうなるだろうか。

【問題のねらい】

この問題は、場面にあう一次方程式を立式して解いていく方法、年齢差の約数に着目する方法、線分図を用いて解く方法など様々な方法により求めることができる。(1)では、解の絶対値と□にあたる数が同じになるということのおもしろさがある。(３倍のとき３年後、５倍のとき５年前、９倍のとき９年前となる)

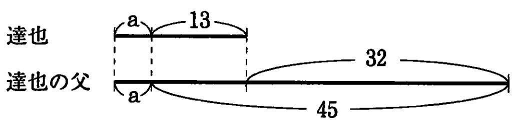
また、(2)では□の中に帰納的に数を入れて計算する段階から、徐々に場合を整理して考えたり、文字などを用いて考えることが期待される。その際に、得られた数値が現実場面に適しているかどうかという「解釈のプロセス」をしっかり行っていくことが必要である。【問題４】は(2)の扱い方により、おもしろさが生まれる。

【展開例】

１．お父さんの年齢が、達也君の年齢の３倍になるのは何年後だろうか？

① 現在を０年とみて、現在からの年、達也の年齢、父親の年齢について、表をつくって(父親の年齢)＝□×(達也の年齢) をみたすときを調べていく。

② (父の年齢)＝３×(達也の年齢) のとき
右の線分図のように、ａ年度の達也の年齢の２倍がちょうど「父と達也の年齢差」に一致することより、



(父の年齢)－(達也の年齢)＝２×(ａ年後の達也の年齢)
　45　－　13　＝２×(13＋３) → ３年後

③ ｘ年後に達也の年齢が父の年齢と同じになるとする。
３(13＋ｘ)＝45＋ｘ　これを解いて、ｘ＝３
３年後は、達也16歳、父48歳で題意を満たしているので、答えは３年後となる。

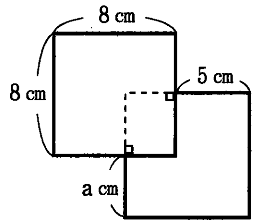
２．３倍、５倍、９倍のときをみて、どのようなことがいえそうだろうか？

・□に入る数と、ｘ年後のｘに入る数の絶対値が同じ。
・３、５、９はすべて奇数である。それゆえ、７倍のときには－７年後すなわち７年前になるのではないだろうか。
・７年前は達也６歳、父39歳で、6.5倍となっていて７倍になっていない。
７(13＋ｘ)＝45＋ｘを解くと、ｘ＝－23／３が出てきて「－７年８ヶ月後」すなわち「７年８ヶ月前」と考えられるけど、この場合達也と父の誕生日まで条件に入っていないから、題意に適しているとはいえない。

３．３倍、５倍、９倍以外のときにはどうなるのだろうか。

・父と達也の年齢差が32であることから、32の約数｛1，2，4，8，16，32｝に関する答えが得られる。(線分図による考えに連動)
・□として分子と分母の差が１となる分数でも、成り立つ場合が出てくる。

【問題５】 同じ２枚の正方形の紙を右の図のように重ね合わせたときにできる図形の「周の長さ」と「面積」をいろいろな方法で求めよう。



【問題のねらい】

【問題５】は、正方形の枚数を２枚からｎ枚に変えてみたらどうなるか、重なっている部分が長方形以外の形だったらどうなるか、正方形の１辺の長さを８cmからｘcmに変えたらどうなるか、といったように発展して考えていくことができる。また、すべて数値の場合では計算した結果が数になってしまうために、周長や面積をどのようにして求めたのかというプロセスが式に残らないが、文字式で考えていく際にはそうした思考過程が式に残ることが学習できる。さらに、正方形の１辺をｘcmで計算していくと、周長は１次式、面積の場合は２次式といったように式の次数と次元を対応させながら考察していくことができる。

【展開例】

１．同じ２枚の正方形の紙が、直角になるように交わってできる図形の「周の長さ」や「面積」はどのようになるのだろうか？

(a) 周の長さの求め方として

（ア）辺を移動して、外側に長方形をつくる方法　$(8+5+8+a)\times 2$

（イ）重なっている部分を後からひく方法　$8\times 4\times 2-(3+8-a)\times 2$

（ウ）対角線に対して対象であることを用いる方法　$(8+a+5+8)\times 2$

(b) 面積の求め方として

（ア）３つの長方形に分割してそれぞれを計算する方法

$8\times 8+(8-5)\times 5+8a$，$8\times 5+(8+a)\times 3+8\times 5$，$8\times a+(8+5)\times(8-a)+8a$

（イ）重なっている長方形の部分をあとからひく方法

$8\times 8\times 2-3\times(8-a)$

２．どのように求めたのか、考え方のわかる式の形で発表しよう。

３．それぞれの式で、計算の結果が同じになるかどうかを確かめよう。また、自分のたてた式と友達のたてた式を比べてみて、気づいたことをまとめよう。

・「周の長さ」は $2a+42$cm、「面積」は $8a+104$㎠となりそうだ。

・同じ形の文字式でも、図形の分割の仕方が違っていたり、辺の移動があったりなかったりで考え方の違いがみられる。

・図形の分割の仕方によっては、かなり長い式が出てきたり複雑な形の式が得られたりする。

４．この問題で「正方形の１辺の長さ」をｘcmにしてみたら、どうなるだろうか。

・例えば、辺を移動して外側に大きな長方形をつくる方法で周の長さを求めると $(x+5+x+a)\times 2=4x+2a+10$ が出てくる。また、重なっている部分を後からひく方法を用いると、面積は $x\times x\times 2-(x-a)(x-5)$ という式が出てくる。

・長方形を分割する方法を用いると、面積では $x^2+5x-ax-5a$ という式が出てくる。

【問題６】（電卓を用いて従業を展開する）

(1) 次の計算の結果はどうなるのだろうか。また、それはなぜだろうか？

$$11 \times 11$$
$$111 \times 111$$
$$1111 \times 1111$$
$$11111 \times 11111$$
$$111111 \times 111111$$

(2) 次の計算の結果はどうなるだろうか。また、かける数９を８に変えたときにはどうなるだろうか？

また、それらは美しいなあと思える計算だろうか。

$$1 \times 9 + 2$$
$$12 \times 9 + 3$$
$$123 \times 9 + 4$$
$$1234 \times 9 + 5$$
$$12345 \times 9 + 6$$
$$123456 \times 9 + 7$$

(3) 電卓を用いて、あなたが美しいなあと思える計算を探してみよう。また、どこが美しいのかを自分のことばでまとめてみよう。

【問題のねらい】

【問題６】(1)、(2)は、平山諦著「東西数学物語」（恒星社）を参考にして設定した問である。(1)では$11 \times 11 = 121$、$111 \times 111 = 12321$、$1111 \times 1111 = 1234321$のように、答えの各位の数は規則的に数が配列されていく。１が同じ数だけならぶ２数の積では、答えとして出てくる位の数は奇数個出てくるとともに、その配列はあたかも山のようなリズムがある。そのからくりは、筆算を用いて考えると一目瞭然である。また(2)では $1 \times 9 + 2 = 11$, $12 \times 9 + 3 = 111$, $123 \times 9 + 4 = 1111$, $1234 \times 9 + 5 = 11111$, … のように、答えに出てくる数はすべて１が並ぶ数である。(1)は１が並ぶ数をもとに作っていくこと、(2)では一見すると１が並ぶ数とは関係のなさそうな数が、組み合わせていくと１が並ぶ数がつくれるといった「１が並ぶ数」という視点で保管しあうものになっている。

「数にはおもしろい性質があるなあ」「不思議な性質があるなあ」「１が並んで美しいなあ」という感覚をいだき、数に関する関心を高めながら(3)に入っていくことが期待される。

【展開例】

１．(1)や(2)では、どんな数が答えとしてでてくるのだろうか？

・１が同じだけ並んでできる数同士の積では、1234321、123454321のように答えの数の中央の数に向かって、規則的に数が増えていって減っていくような「山」のような数が出る。

・(1)の答えとして、「山」のような形の数が出てくるのは右のように筆算で考えてみると、１が並んでできる数が次々のずれた形で足されていることから説明することができる。最も多く１が足されるのが、答えの中央に出てくる数だ。

$$\begin{array}{r} 11 \\ \times\ 11 \\ \hline 11 \\ 11 \\ \hline 121 \end{array}$$

・(2)では、123×9＋4＝1111，1234×9＋5＝11111のように、答えとして出てくる数はすべて1が並ぶ数である。電卓で答えを出していくと、答えに出てくる1の数は足される数と同じである。例えば、12345×9＋6では、足される数が6なので答えとして出てくる数は、1が6こ並ぶ数、すなわち111111である。

・(1)では1から9までの数がリズミカルに並んでいるし、(2)ではかけられる数が(1)の答えの左半分の数であるのに関わらず、答えはすべて1が並んでいる。(1)と(2)では何か関係があるのだろうか。なんだか不思議だなあ。

2．(1)と(2)でちょっと条件を変えてみたら、どんな答えが出てくるのだろうか？

・11×11＝121，111×111＝12321のように、1が同じ数ずつ並ぶ数同士の積では答えに連続する自然数が出ていた。ここで、11×□のようにかけられる数を固定して、かける数を変えていくと、11×111＝1221，11×1111＝12221，11×11111＝122221,…のように、外側に1、内側に2が並ぶ数が出てくる。

さらに、答えにみられる2の個数はかける数の「1の個数−1」となっている。

・111×□とみて、111×1111＝123321，111×11111＝1233321,…のようにかける数の「1の個数」を規則的に変えていくと、外側に1と2、内側に3が並ぶ数が出てくる。

→こうした性質は、かけ算を筆算で筆記していくとその理由がわかる。

・12×9＋3＝111，123×9＋4＝1111，1234×9＋5＝11111,…の計算では、答えはすべて1が並ぶ数であることと同時に、足された数と同じ個数だけ1が並んでいることがわかる。また、かけられる数と足される数を並べていくと、1から連続する自然数になっている。こうしたことは、かける数9に変わってもいえるのだろうか。

12×8＋3＝99，123×8＋4＝988，1234×8＋5＝9877，12345×8＋6＝98766,

このように計算してみると、答えの下2桁の数が連続する数といえる。

・12×8＋3＝99 → 12×8＋2＝98のように、加える数を(2)の式より1ずつ減らした数、あるいは□×8＋○の「□の1の位の数」と同じにすると、9から連続する数が答えに出てくる。（注：分配法則などを用いると理由が示せる）

123×8＋3＝987，1234×8＋4＝9876，12345×8＋5＝98765,…

3．電卓を用いて、自分で美しいなあと思う数の計算をみつけてみよう。

例えば、生徒から出された数の計算として、次のものが挙げられる。

① 1＋2＝3，4＋5＋6＝7＋8，9＋10＋11＋12＝13＋14＋15,…

② 13×9＋4＝121，135×9＋6＝1221，1357×9＋8＝12221，13579×9＋10＝122221

③ 12321×9＋222＝111111，12321×18＋444＝222222，12321×27＋66＝333333,…

④ 1×9＋1＝10，22×9＋2＝200，333×9＋3＝3000，4444×9＋4＝40000，
555555×9＋5＝500000，666666×9＋6＝6000000，7777777×9＋7＝70000000,…

⑤
142857×1＝142857	142857×7＝ 999999
142857×2＝285714	285714×7＝1999998
142857×3＝428571	428571×7＝2999997
142857×4＝571428	571428×7＝3999996
142857×5＝714285	714285×7＝4999995
142857×6＝857142	857142×7＝5999994

※142857は、1÷7を計算したときに出てくる循環節である。

【問題７】 ①～③のあいているます目に数を入れ、縦・横・斜めの数の和がみな等しくなるようにしたい。どのような数を入れたらよいだろうか。
また、どのように考えたのか、自分の考えをまとめておこう。

①

3		
	12	
	0	21

②

5	25	
40		

③

	13	
		1
7		

【問題のねらい】

3×3の魔方陣であるが、①を解いた後に魔方陣の性質を見いだしていくことによって、②や③を解いていく上での見方・考え方を得ることができる。①～③の魔方陣は、中央の数を基準にしてみると縦・横・斜めが等差数列になるようになっている。例えば、①の魔方陣の正解は、次の（ア）のようになるが、（イ）のように中央の数を０として捉えると等差数列になっている様子が見やすくなる。

①では、中央の数を基準にして表すと他の数が正・負の数で表せることより、①から示せる性質をまとめることを通して負の数の導入をしていくことができる。

②では、右の(a)のように縦の１列と斜めの列において「共通の数」があることに着目すると、□にあたる数を求めることができ、順次数を決定できる。

①

3	24	9
18	12	6
15	0	21

中央の数を基準にする →

負の数の出現

−9	+12	−3
+6	0	−6
+3	−12	+9

②

共通		
5	25	
40		□

(a) 40＋５＝25＋□
□＝20

(b) 中央の数は、縦・横・斜めそれぞれの列が平均になっていることを使う。

②は未知数を文字でおき連立方程式として扱うこともできるが、このように考えると中１でも十分解決可能である。むしろ、こうしたアイデアを大切にしながら、中２で学ぶ連立方程式の解法との関連を考えたい。③は、解が無数にあるタイプである。

（ア）

2	13	9
15	8	1
7	3	14

（イ）

3	13	11
17	9	1
7	5	15

（ウ）

10	13	25
31	16	1
7	19	22

一般化 →
左上を基準

a	13	2a+5
2a+11	a+6	1
7	2a−1	a+12

試行錯誤を通して、（ア）～（ウ）のような③を成り立たせる数値を見つけていく中で、徐々にこれらの魔方陣に共通する性質を導き出していけばよい。なお、必ずしも右側の一般化された文字式を導き出す必要はない。（解がいくつも出てくる経験も大切と考える。）

【問題７】では、生徒の学習状況や進度に応じて展開することが考えられる。①～③の中には様々な学習要素が含まれており、展開の仕方によってどの学年でも扱うことが可能となる。

【授業展開を通して出てきた魔方陣の性質の一部】

○中央の数に対して、（中央の数）×８＝（外側の８つの数の和）
　それぞれの列において、（中央の数）×２＝（両端の数の和）すなわち平均になっている。

○中央の数を通る対角線上に並ぶ数に着目したときに、等差で変化していくが、その変化の仕方と全く同じように変化していく「数列」が魔方陣の中に必ず存在する。

○魔方陣内の９つの数を順序よく１列に書き出すと、規則性がいくつかみえてくる。

【問題８】	$\dfrac{180}{2\times\square-1}$	の値が、ちょうど自然数となるような□はいくつあるだろうか？ また、それはなぜだろうか。

【問題のねらい】

式の形からその式が表す数がどのような数か読むこと、約数を正確に書き出したりすることにより約数の個数を求めることができること、いくつかの条件にあった数を選び出すことができることなどが**【問題８】**の目的である。特に、約数の個数を求めていく場面では、正確に約数を書きだしていくことが基本となるが、もとの数を素因数分解することによって得られる素数の累乗の形をもとに導くことができることなどが、発展的に扱うことができる。

【展開例】

１．商が自然数になる、すなわち割り切れるということはどんなことなんだろうか？

・「割り切れる」ということは、分母にあたる数が分子の約数になっていることである。

・２×□は２の倍数であるので偶数、すなわち２×□－１は奇数になっている。
だから、180／(２×□－１)＝△ となる△は、180＝(180の奇数の約数)×△ のように表せる数である。

・180＝(180の奇数の約数)×△を満たす「△の個数」を求めるためには、「180の約数」のうち奇数であるものがいくつあるかを求めていけばよい。

２．180の約数であって、奇数となるものはいくつあるのだろうか？

・180＝１×180，２×90，３×60，４×45，５×36，６×30，９×20，10×18，… と２つの因数の積に180を表していくと、180の約数は｛１，２，３，４，５，６，９，10，12，15，18，20，30，36，45，60，90，180｝のように18個出てくる。
このうち、奇数であるものは｛１，３，５，９，15，45｝の６個出てくる。

・180の約数で、奇数であるもののうち最大の数は45である。
「180の約数であって奇数であるもの」は、この最大の約数45の約数といえる。
45の約数は｛１，３，５，９，15，45｝の６個である。

３．180／(２×□－１)＝△ を成り立たせる自然数△や□は何だろうか？
そして、□にはどのような数が入るのだろうか？

・180を｛１，３，５，９，15，45｝の数で順次割っていくと、｛180，60，36，20，12，４｝が得られる。これらの６つの数が△である。

・２×□－１＝１ を□について解くと、□＝１
２×□－１＝○ → □＝(○＋１)／２ を順次計算していけばよい。
すなわち、｛１，２，３，５，８，23｝が□として出てくる数である。

４．今までのことを振り返るとどのようなことがいえるだろうか？

・□にあてはまる数の個数は、180の約数であり、奇数でもあるものの個数と同じ。
なお、その個数は45の約数の個数とも同じである。

・45の約数はすべて、45を素因数分解した形である $3^a\times5^b$ の形をした数である。
45は $3^2\times5^1$ と表せるが、約数の個数はどうも素因数分解したときの累乗として出てくる数と関係が深そうだ。(←「何か関係がありそうだ」の洞察でよいだろう)

【問題9】（コンパスと定規で「図をかく」ことを必ず行いながら）
(1) 3辺の長さが3cmずつ違う、できる限り小さな三角形をかきたい。
どのような三角形ならばよいだろうか。
(2) 3辺の長さが5cmずつ違う、できる限り小さな三角形をかきたい。
どのような三角形ならばよいだろうか。
(3) 3辺の長さがacmずつ違うときに、できる限り小さな三角形をかくためにはどうしたらよいだろうか。

【問題のねらい】

不等式を用いて考察することが主たるねらいとなるが、三角形の大切な性質である（2辺の長さの和）>（他の1辺の長さ）を強く意識させることもできる。実際に「図をかく」場合には、ノートにかくことが基本となるが、方眼紙を用いると他者のかいた図形との比較がしやすくなる。また、生徒の中には定規とコンパスを用いて、計算上ではありえない三角形がかけてしまうような場合が出てくるが、なぜそうした図形がかけてしまうのかなどを振り返らせることを通して、正確に図をかくことの必要性を感じることができる。

「問題の条件を満たす図を実際にかく」活動を通して、問題文の中に条件を満たした図形がすでに与えられた状態になれた生徒たちに、改めて「条件を満たす図形を表現する」ことの重要性を認識させることが期待できる。

【展開例】

1．問題の条件を満たすような三角形をいくつかかいてみよう。

・最も短い辺の長さを、1cm，2cm，3cm，…とおいてみて、3cmずつ増やした長さをとってみる。1cm，4cm，7cmのときは7cmの線分に埋もれてしまってかけない。
2cm，5cm，8cmのときもかけない。3cm，6cm，9cmのときは、ちょうど9cmになってしまった。4cm，7cm，10cmのときからは三角形がかける。

・3cmよりもちょっと長い辺として、3.1cmのときを図にかくと、6.1cm，9.1cmとなってかけそうだ。でも、実際の図ではわずかな差になっている。

・三角形ができる場合には、（2辺の長さの和）>（他の1辺の長さ）という関係がある。
これは、いつでも成り立つ性質といえそうだ。
（地図を読んでルートを考えるとか、実際に歩行などを通して得た感覚を通しておさえたいところ）

2．3cmずつの場合には、最短の辺の長さをどのくらいにすればいいのだろうか？

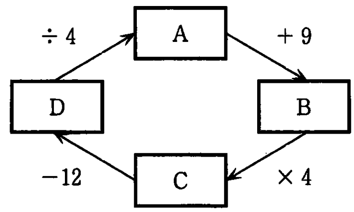
① （2辺の長さの和）>（他の1辺の長さ）に数を代入していく → 3cmより長い長さ
② 文字を用いた不等式から求める。

○最短の辺の長さをxcmとすると、$x+(x+3)>x+6$　これを解くと　$x>3$
$x>3$は、$x+(x+6)>x+3$　や　$(x+3)+(x+6)>x$　を成り立たせる解であるので、条件にあう答えとして適している。

3．3cm以外の場合にはどうなるだろうか？

・5cmずつの違いがある3つの辺の場合には、最短の辺の長さが5cmより長くなっていればよい。同じようにして、acmずつ長くなっている3つの辺の場合には、辺同士の長さの違いであるacmより長くなっていればよい。

【問題10】 右の図は、Aを出発してそれぞれの計算をしながら再びAに戻ってくる様子を表したものです。
　Aにあてはまる数はあるだろうか。それは、なぜだろうか？



【問題のねらい】

この問題は、「数学科課題学習の教材集」筑波大学附属中学校数学教育研究会編　明治図書 P.110〜111の課題を参考にして作成したものである。「数学科課題学習の教材集」では、Aとしての解が一意に定まる場合を挙げている。例えば、「D→A」の演算を「−30」とすればAとしては2が、演算を「÷2」とすればAとしては−12を得ることができる。算数で逆算による解法になれてきている生徒たちは、Aに具体的な数を代入して順に計算していったり、逆算により図の矢印とは逆のループで得られる数をもとにAを求めていく。そして、多くの生徒は「Aにあてはまる数がみつかれば」そこから先に進もうとしない。

上の図の場合は、Aにあてはまる数がみつからないときである。「あれ、みつからないぞ」「なんか変だなあ、そうか整数ではないのかもしれない」という経験を経て、「どうやってもみつからない」「でも、そのことをどうやって示そうか」「文字を用いた式をたてて、1回りしてももとのAに戻らないことを示せばよい」といった思考に変遷していくことをねらっている。なお、こうした経験を経て、問題場面に応じた等式を立式し、両辺に同じ操作を経て変形していく「順思考」としての方程式の学習に入っていくのではないかと考える。

【展開例】

1．Aにあてはまる数はあるのかな？

・Aに1から順に数を代入していっても、ちょうどAとぴったり同じになる数がみつからない。
　右の表のように、もとのAと一回りしたAでは、7の違いが出てくる。

もとのA		1	2	3	4	5	6	1ずつ増加
	B	10	11	12	13	14	15	1ずつ増加
6の差出る	C	40	44	48	52	56	60	4ずつ増加
	D	28	32	36	40	44	48	4ずつ増加
一回りしたA		7	8	9	10	11	12	1ずつ増加

・Aにあてはまる数が自然数と考えたから、Aにあてはまる数がみつからないのだろうか。負の整数や分数などではどうだろうか。…でも、みつからない。変だなあ。なぜだろうか。

2．もとのAと一回りしたAとの間には、どのようなAでも差があることを示してみよう。

① もとのAに入る数をxとすれば、Bは $x+9$、Cは $4(x+9)$、Dは $4(x+9)-12$ となる。一回りしたAは、$\{4(x+9)-12\}/4=(x+9)-3=x+6$ となる。
　$x=x+6$ を成り立たせるようなxの値はないので、どんな数をAに入れても、一回りしたAはもとのAになることはない。

② グラフをかいて調べる。Aに代入する数をグラフの横軸にとり、それに対して得られるAの値の集まりと一回りしたAの値をそれぞれ縦軸方向にとっていくと、2つの直線ができる。これらの直線はどこまで進んでいっても交わらないので、一回りすると差が必ずできる。

【問題11】 100に近い２数の積について、簡単に計算する方法をみつけてみよう。
また、その方法が正しいことを説明しよう。

ア．$\begin{array}{r} 97 \\ \times 93 \\ \hline \end{array}$　　イ．$\begin{array}{r} 97 \\ \times 92 \\ \hline \end{array}$　　ウ．$\begin{array}{r} 98 \\ \times 93 \\ \hline \end{array}$

【問題のねらい】

100に近い２数の積を工夫して計算する方法をみつけていく中で、100を基準として文字式を立式して考えていくと計算方法がみつけやすいこと、得られた文字式の形を変形させてその式の意味を考えることにより、新たな計算方法を生み出すことができることなどが、**【問題11】**のねらいである。文字式では計算の結果に演算記号が残るために、数式に比べ式変形にいたった思考のプロセスを読んだり、カッコを用いた式に同値変形することによって新たな意味を付与しやすい。そうした「文字式を読む」活動に着目した問といえる。文字式を用いて問題解決することのよさを積極的に味わわせるために、こうした問を重視したい。

【展開例】

１．97×93を工夫して計算する方法をみつけよう。

・97×93を計算すると、9021となる。
この４桁の答えの下２桁は、ちょうど97と93の一の位の数の積と同じといえる。
同じようにしてみると、上２桁が２数の十の位でつくられているとみると、
(十の位)×(十の位＋１)とみれば答えが一致してくる。

$$\begin{array}{r} 97 \\ \times 93 \\ \hline 291 \\ 873 \\ \hline 9021 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r|l} 9 & 7 \\ \times 9 & 3 \\ \hline 90 & 21 \end{array}$$

上２桁↑ ↑下２桁
9×(9＋1)　7×3

２．97×92を工夫して計算する方法をみつけよう。

・97×92も、97×93と同じように上２桁と下２桁に分けて計算してみる。全く同じように計算すると9014となるが、実際の答えと異なってくる。
　実際の答えは8924となっていて、上２桁と下２桁をつくる数は３と８といえる。これらは、どこから来た数なのか。

$$\begin{array}{r|l} 9 & 7 \\ \times 9 & 2 \\ \hline 90 & 14 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r|l} 9 & 7 \\ \times 9 & 2 \\ \hline 89 & 24 \end{array}$$

上２桁↑ ↑下２桁 上２桁↑ ↑下２桁
9×(9＋1)　7×2　100−(3+8)　3×8
100を基準にした計算方法に変わる（「100との差」への着目）

・100を基準にして考えると、３と８は100と２数（97と92）とのそれぞれ差である。
・100を基準にして、文字式をたてて考えると計算方法が出てくる。
　100と２数との差をそれぞれａ、ｂとすると

$$(100-a)(100-b)=100\{\underbrace{100-(a+b)}_{\text{上2桁の計算}}\}+\underbrace{ab}_{\text{下2桁の計算}}$$

　このように、２桁ずつの計算方法が文字式からみることができる。
・上２桁の計算方法は、$100\{100-(a+b)\}=100\{\underline{(100-a)-b}\}=100\{\underline{(100-b)-a}\}$
$=100\{\underline{\underline{(100-a)+(100-b)-100}}\}$ のように変形していくと、次々に新しい計算方法を得ることができる。

【問題12】（電卓を用いた計算でもよい） 次の計算を工夫して行おう。 ① 1996×1996−1997×1998＋1998×1994−1995×1994 ② $56^2+67^2+78^2-45^2-34^2-23^2$

【問題のねらい】

数の計算を行う際に、計算の順序を入れ換えたり、関係のある数同士をペアにして先に計算を行ってから全体の計算に入ったり、基準となる数を見いだしてその基準となる数からの差などに着目して計算を行っていく、といった工夫をしていくと格段に計算が速くなることがある。こうした「工夫して計算をすることの経験」は、既知の計算法則や公式を自在に活用することや思考の経済につながるといえる。

また、$(x^2+1)(x+1)(x-1)$ を展開する際に、左から順次計算していってもよいが、右側から計算していくと程なく x^4-1 を得る。文字式の計算の際に「左から順にみていく」という見方が限定されがちな傾向を、こうした問の中で柔軟なものにするねらいもある。

【展開例】

1．“1996×1996−1997×1998＋1998×1994−1995×1994” を工夫して計算できないだろうか？

・“1996×1996−1997×1998＋1998×1994−1995×1994” を電卓で計算しようとすると、電卓にカッコの記号があるものならばそのまま式を入力していけば答えが出せるが、よく使う電卓だと (1996×1996−1997)×1998… のように計算してしまった誤りが生じやすくなってしまう。

・1996×1996＝3984016, … のように書き出していけば答えが−８と出るが、うまく計算する方法がないだろうか。

・出てくる数が、1996前後の連続する４桁の自然数であるので、どこかの自然数を基準にして考えてみればうまくいくのではないだろうか。

〔文字式を用いての計算方法例〕

○ 1996を文字ａでおいて計算する方法

$$a^2-(a+1)(a+2)+(a+2)(a-2)-(a-1)(a-2)$$
$$=a^2-(a^2+3a+2)+(a^2-4)-(a^2-3a+2)$$
$$=-8$$

2．“$56^2+67^2+78^2-45^2-34^2-23^2$” を工夫して計算できないだろうか？

・そのまま計算すると、3136＋4489＋6084−2025−1156−529＝9999 となるが、もっと工夫することができないだろうか。

・答え9999を観察すると、1111の倍数である。もとの式の中に1111に関わりのある数はないだろうか。もし、1111に関わりのある数（1111の倍数となるもの）があればそれを加算していけばよい。

・56＋45＝101、56−45＝11で101×11＝1111 となることから、和と差の公式より $56^2-45^2=$ 1111が得られる。同様にして、和がちょうど101となる２数の組をつくってその２乗の差を計算すると、$67^2-34^2=3333=1111\times3$、$78^2-23^2=5555=1111\times5$ となっていく。結局、1111が１＋３＋５個あることになるので $56^2+67^2+78^2-45^2-34^2-23^2=9999$ である。

【引用文献・参考文献】

(1) 伊藤（日野）圭子（1995）「数学教育における質的研究について：その前提と方法」『日本数学教育学会誌　算数教育』日本数学教育学会　Vol.77, No.10, pp.2-12

(2) 新算数教育研究会　研究事業部編（1999）「算数科における授業研究の進め方と実践研究論文の書き方」 東洋館出版社

(3) 平山満義編著（1997）「質的研究法による授業研究 ―教育学・教育工学・心理学からのアプローチ―」 北大路書房

(4) 関口靖広（1997）「認知と文化：数学教育研究の新しい方向」『日本数学教育学会誌　数学教育』日本数学教育学会　Vol.79, No.5, pp.14-23

(5) 黒澤俊二（1999）「なぜ「算数的活動」なのか」 東洋館出版社

(6) 筑波大学附属中学校数学教育研究会編（1990）「数学科課題学習の教材集」 明治図書

(7) 竹内芳男・澤田利夫編著（1984）「問題から問題へ ―問題の発展的な扱いによる算数・数学の授業改善―」 東洋館出版社

(8) 澤田利夫・坂井裕編著（1995）「中学校　数学科課題学習　問題づくりの授業」東洋館出版社

(9) S.I.ブラウン、M.I.ワルター著　平林一栄監訳（1995）「いかにして問題をつくるか　問題設定の技術」 東洋館出版社

(10) 杉山吉茂編著（1991）「中学校数学　ときにはこんな授業を　―課題学習―」東京書籍

(11) 島田茂編著（1995）「新訂　算数・数学科のオープンエンドアプローチ ―授業改善への新しい提言―」 東洋館出版社

(12) 中原忠男編著（1999）「構成的アプローチによる算数の新しい学習づくり」東洋館出版社

(13) 両角達男（1997）「問題づくりを活用した授業に関する一考察」 筑波大学附属中学校研究紀要第49号　pp.11-36

(14) 相馬一彦（1997）「数学科『問題解決の授業』」 明治図書　引用はpp.43（前半部）とpp.46（後半部）である。

(15) 古藤怜編著（1990）「算数・数学科におけるDo Mathの指導」 東洋館出版社　引用はpp.10-11である。

（注）TIMSSの調査結果に関しては、上越教育大学数学教育教室のホームページ http://www.juen.ac.jp/math/Math_homepage.html などにTIMSSに関するリンクがはってあり、それぞれのリンク先から第2回や第3回の調査結果に関してテキスト文書がダウンロードできるようになっている。
（http://www.monbu.go.jp/news/00000394/ から、日本国内の結果に関してもダウンロードできるようになっている）