乗除混合演算式についての理解と指導に関する研究
－A÷B×CとA÷BCのタイプの式に焦点を当てて－

A Study on Understanding and Teaching about mixed fomula with multiplication and division
－ Focus on the type of A÷B×C and A÷BC －

熊倉啓之
Hiroyuki KUMAKURA

1．はじめに

国立教育研究所が実施した2002年度教育課程実施状況調査の報告書によれば，調査結果の概要として，「学習指導要領の目標や内容に照らした児童生徒の学習の状況は，全体としておおむね良好であった。」としている。一方で，「調査結果を仔細に見ると，一部に児童生徒の学習の状況が必ずしも良好とはいえないものも見られた」とも述べている。

そこで，筆者は調査結果から，「学習の状況が良好でない」と考えられるものを調査した。その中で，ある１つの中学校の問題に着目した。その問題は，次の通りである。

問題ｉ　式a÷b×cを，×や÷を省略した形で表しなさい。

上の問題ｉの調査結果について，次の点を指摘することができる。

ア．2002年度の通過率は，52.5%であった。
それほど難しくはない問題であると考えられるが，結果は予想を下回るものであった。実際，この問題の設定通過率よりも7.5ポイント低かった。

イ．1997年度に実施した前回の調査との比較において，同一問題の通過率を比べるとき，前回と比較して５ポイント以上下回った問題は，中１で16題中８題，中２で19題中６題，中３で20題中１題あったが，問題ｉもそのうちの１題である。実際には，前回より6.7ポイント下回っていた。

ウ．調査報告書に，代表的な問題に対する解答の考察と指導上の留意点が掲載されているが，この問題については，残念ながら触れていなかった。

以上のア～ウが，筆者がこの問題ｉに着目し，この問題を取り上げた理由である。

2．研究のねらい

前項で取り上げた問題ｉの通過率が低かった原因を探り，類似のタイプであるA÷BCと合わせて，子どもの理解の実態と指導上の問題点を明らかにするとともに，今後の指導への示唆を得ることが，本研究のねらいである。

3．過去の調査結果にみる生徒の実態

（1）戦後大規模調査から

前述した調査も含めて，戦後に実施された文部省等が実施した全国規模調査（文部省全国学力調査，文部省小学校・中学校実施状況調査，国立教育政策研究所小学校・中学校実施状況調査）において，A÷B×Cのタイプの問題について，その正答率・通過率を調査してみた。その結果は，次の通りである。

問題ｉ	a÷b×c	58.6%	（中２・1964年）
	同上	45.9%	（中１・1982年）
	同上	56.5%	（中１・1995年）
	同上	52.5%	（中１・2002年）
問題ii	24÷6×2	68.7%	（小６・1959年）
問題iii	(−14)÷(+6)×(−3)	47.3%	（中２・1961年）

問題ｉについては，同一問題として出題されているが，正答率・通過率は，いずれも60%に達していない。また，1959年の小学６年生に対して出題された問題iiは，70%近い結果であったが，1961年の中学２年生に対して出題された問題iiiは，50%に満たなかった。これらの結果を見るとき，特に中学生において，A÷B×Cのタイプの式の理解は十分に身についていないと考えられる。

（2）先行研究から

A÷B×Cのタイプの式について取り上げた先行研究は多くない。

安藤（1977）は，四則混合演算における計算過程の考察の中で，中１の生徒167名を対象に，１学期はじめに，混合算についての計算順序の思考過程を分析する目的で調査を実施している。そこでは，$\frac{5}{8}\div\frac{3}{4}\times\frac{12}{7}$ の正答率は84.4%と高く，このタイプの計算は除法を乗法に直して行うので，乗法の繰り返しになり，加法・減法が混合した計算より正答率は高い，と分析している。さらに，指導上の留意点として，

42÷6×2＝(42÷6)×2

のように，計算にうつる前に省かれている（　）を書かせて，計算の規則を視覚的にはっきり記号化する取り扱いが必要である，としている。

埼玉県入間地区算数数学教育研究会では，昭和31年度より毎年，算数数学学力調査を実施している。平成17年度の学力調査の報告書には，３つの単項式の乗除の問題について，次のような結果が紹介されている（2005）。

ア．$20a^2b\div4a\times b$（平成11年）　正答率59%

イ．$4a\div2b\times5b$（平成５，14年）　正答率52%，48%

さらに，アの誤答例としては，$20a^2b\div(4a\times b)=5a$とするものが多く，イの誤答例としては，$4a\div2\times b\times5b=10ab^2$が多かったとしている。そして，指導上の留意点として，「まず，符号の処理をし，次に，$A\div B\times C=A\times\frac{1}{B}\times C=\frac{AC}{B}$ のように，計算の仕組みを十分に理解させて，正確な計算ができるようにする。」と述べている。

4．A÷B×Cのタイプの計算の分析

（1）類似タイプの式の比較から

A÷B×Cのタイプの計算は，３つの項の乗法・除法の混合演算であるが，似たようなタイプとしては，次のものがあげられる。

① a×b×c　　② a×b÷c

③ a÷b×c　　④ a÷b÷c

３項の計算の場合，左から計算するのが原則であるが，必ずしもそうしなくてもよい場合もある。それは，①，②の場合である。いずれも，次のように結合法則が成り立つからである。

① $(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$

② $(a\times b)\div c=(a\times b)\times\frac{1}{c}=a\times(b\times\frac{1}{c})=a\times(b\div c)$

おそらくは，①，②での規則を勝手に適用して，

③ $a\div b\times c=a\div(b\times c)$

と計算してしまう誤りが多いと考えられる。

実際に，1982年度，1995年度実施の実施状況調査報告書によれば，③のように$\frac{a}{bc}$と誤答したものは，次のような結果であった。

1982年　18.9%

1995年　17.0%

④についても，③と同様に結合法則は成り立たない。

④ $(a\div b)\div c\neq a\div(b\div c)$

しかし，④の場合は，③に比べると通過率は低くないと予想される。単純な比較はできないが，2002年度実施の教育課程実施状況調査の次の調査問題ⅳの通過率と比較すると，分数が含まれているにも関わらず，通過率は，問題ⅱの24÷6×2と比べて大差ない。

問題ⅳ　$3\div10\div\frac{2}{3}$　69.9%（小６・2002年）

この原因としては，④の場合は，左から順に計算しようとするが，③の場合は，乗法の方が除法よりも計算しやすく，そのために，後の２項から計算してしまう傾向があるためと考えられる。

（2）調査結果にみる解答類型から

1995年度実施の調査報告書によれば，$\frac{a}{bc}$以外の誤答として，次のようなものが挙がっている。

ア．$\frac{bc}{a}$　10.9%

イ．abc　5.3%

誤答アは，$a\div b=\frac{b}{a}$のように，分母と分子を逆にしたと考えられる誤りである。

誤答イは，÷を×と見間違えたのかもしれない誤りである。

これらの誤答ア，イは，A÷B×Cのタイプの計算ではじめて生じる誤りではなく，それ以前の段階で生じる誤りと考えられる。

5．３項以上の乗除の計算順序とその指導

A÷B×Cの計算の主な誤答は，計算順序の間違いによるものであることを明らかにした。ここでは，計算順序とその指導について考察する。

３項以上の計算式については，小２あるいは小３において，整数どうしの結合法則を学習する場面で，始めて登場する。しかし，この場面では乗法のみの計算であり，結合法則が成り立つので計算順序はどこから計算してもよい，ということを学習する。

その後，小５，小６で，小数や分数を含む計算についても，結合法則が成り立つことを学習する。さらには，中１で，負の数を含む計算についても，結合法則が成り立つことを学習する。

一方，乗法と除法の混じった３項以上の計算式については，まず小４において，計算の決まりを学習する場面で登場する。ここでは，左から順に計算することを学習する。また小６で，分数を含む計算（一部の教科書），中１で，負の数を含む計算を学習する場面で扱う。ここでは，除法を乗法に直して計算する方法について学習する。さらに，中１「文字と式」，中２「式の計算」においても，文字式の計算について同様の内容を学習する。

したがって，小６以降の学習を通して，乗法・除法の混じった計算式では，まず除法を乗法に直して乗法だけの式にして，結合法則が成り立つことから，どこから計算してもよいことを踏まえて計算する。

このように学んだ生徒は，A÷B×Cについても，「除法を乗法に直さずに，どこから計算してもよいのだ」と勝手に解釈して，A÷(B×C)としてしまう傾向があると考えられる。

乗除の混じった計算において，「乗法に直さずにそのまま計算する場合は，計算順序を変更すると結果が異なることがある」ことについて，理解が十分でないといえるであろう。括弧内優先，乗除優先という例外を除くと「計算順序は，左から順に行う」ことについて，小４で学習するものの，その後の指導が不十分であると考えられる。実際に，中学の教科書で，このことを明示してあるのは，一社のみであった。

6．A÷BCのタイプの計算についての指導

A÷B×Cの典型的な誤答としてあげた計算式A÷(B×C)については，中２「式の計算」において，単項式どうしの除法で扱っている。たとえば次のような計算式が登場する。

12ab÷4b　(A社・例)

これは，12ab÷４×b　ではなく，12ab÷(４×b) の計算である。

これらの計算の仕方については，どの社でも丁寧に扱っており，次のア，イの２つのいずれか，あるいは両方の方法である。

ア．分数の形にして $\frac{12ab}{4b}$ のように計算する。

イ．除法の部分を乗法に直して，$12ab\times\frac{1}{4b}$ のように計算する。

いずれにしても，この計算を，

$$12ab\div 4\times b=(12ab\div 4)\times b=3ab\times b=3ab^2$$

と誤る生徒はあまりいないと考えられる。

しかし，一方で，式12ab÷4bを，かけ算記号×を省略せずにかいたとき，

(12×a×b)÷(4×b)あるいは　12×a×b÷(4×b)

と正しく解答せずに，

$12\times a\times b\div 4\times b$

とする誤答は，少なくないと考えられる。

実は，かけ算記号の省略については，中１の「文字と式」で扱うが，

「かけ算記号が省略された部分については，優先して計算を行う」…★

ことについて，きちんと指導している教科書は一社もない。もちろん，中２の「式と計算」でも同様である。

類似のタイプの式として，

$A+BC$，$A\times BC$

がある。これらについて，かけ算記号×を省略せずにかいたときは，

$A+B\times C$，$A\times B\times C$

となるが，このように括弧を省略してかいたとしても，計算結果に違いはない。したがって，★について，特に指導の必要性を感じなかったといえるかもしれない。

★の性質は，割り算記号÷の省略についてもいえる。たとえば，次のような場合である。

$$A\div\frac{B}{C}=A\div(B\div C)$$

上の式の右辺で，括弧をはずすと，計算結果は異なってしまう。しかし，実際に計算するときは，乗法に直して計算するので，生徒が誤った計算をすることはないであろう。

なお，★の指導について，過去の教科書を調査してみたところ，たとえば，現代化の頃の中２の教科書（学校図書）に，次のような記述があった。

問題６　次の計算をせよ。④　$9a\div 12b$

問題７　問題６の④$9a\div 12b$は，$9a\div 12\times b$と同じ計算か。

問題７を通して，★について確認することはできるであろう。

７．生徒の理解の実態調査

前述した指導内容の分析に対して，指導を受けた生徒の理解の実態をより一層明らかにすることをねらいとして，以下の調査を実施した。

（１）調査の概要

① 実施時期：2004年７月中旬

② 対象生徒：静岡大学教育学部附属中１～３年266名

（中１：38名，中２：115名，中３：113名）

中１の人数が少ないのは，授業進度の関係で１クラスしか実施できなかったからである。

（２）調査問題

① $a\div b\times c$を，記号×，÷を省略して書け。

② $y\div 3x$を，記号×，÷を省略せずに書け。

③ $2x\div\frac{2}{3}\times 3$を計算せよ。

④ $5x\div 6\div(-2)$を計算せよ。

実際には，調査したい上記の４問に加えて，類似の問題を６問出題した。

（３）調査結果と考察

① a÷b×c

正答率と典型的な誤答率は，表１の通りである。
なお，表中の数値は％である。(以下同様)

表１　問題①の結果

①	正解	$\frac{a}{bc}$	$\frac{bc}{a}$	その他
中１	82	15.8	2.6	0
中２	77	20.9	2.6	0
中３	92	8	0	0

表１から，次の点を指摘できる。

ア．問題①は，冒頭で述べた教育課程実施状況調査の問題ｉと同一問題である。中１の結果を見れば，実施状況調査の結果よりも高いことがわかる。附属の生徒が，全国平均よりも高い学力を有しているといえる。

イ．学年間で正答率を比べるとき，中２と中１では，上昇するどころか少し下降している。これは，中１で文字式の規約について学習した直後であることが影響しているのかもしれない。いずれにせよ，中２までの１年間で，理解は深まらないことがわかる。一方，中３と中１の正答率を比較すると，さすがに10ポイント上昇している。中３で９割以上の正答率は評価できるが，附属の生徒であることを考えると，必ずしも楽観できない。総合的に見て，学年進行とともに，このタイプの式について理解が確実に深まると断定することは困難であると考えられる。

ウ．典型的な誤答を見ると，実施状況調査と同様に，$\frac{a}{bc}$とする誤りが最も多かった。このタイプの式の理解ができない要因を確認することができた。

② y÷3x

正答率と典型的な誤答率は，表２の通りである。

表２　問題②の調査結果

②	正解	y÷3×x	その他
中１	50	45	5.3
中２	51	49	0
中３	58	39	2.7

表２から，次の点を指摘できる。

ア．正答率が中１で50％，中３でも60％弱であり，問題①に比べて低いことが分かる。指導が十分になされていないことが，この結果に結びついているといってよいであろう。

イ．多くの誤答は括弧を付けていないものである。この中には，単にケアレスミスから，括弧を付け忘れたという生徒もいるかもしれない。

そこで，比較のために，次の問題②’を一緒に出題した。

②' $\frac{x-y}{3}$ を，記号×，÷を省略せずに書け。

この問題②' の結果は，表３の通りである。

表３　問題②' の結果

②'	正解	x−y÷3	その他
中１	79	21.1	0
中２	72	27.8	0
中３	92	7.1	0.9

表３から，この問題の典型的な誤答は，やはり括弧を付けていないものであることがわかる。しかし，この②' のような問題は，多くの教科書で扱っており，指導の結果が，問題②よりも高い正答率に現れているといえる。そして，括弧を付けていない誤答の数も，問題②の場合に比べて，明らかに少ない。つまり，問題②の括弧をつけていない誤答は，指導が十分にされていない結果が現れているといえるであろう。

③　$2x \div \frac{2}{3} \times 3$

正答率と典型的な誤答率は，表４の通りである。

表４　問題③の結果

③	正解	計算ミス	x	その他
中１	53	5.3	36.8	5.3
中２	78	0.9	13	7.8
中３	88	1.8	8.8	1.8

表中の「計算ミス」は，途中の計算式が書いてあり，計算方法は正しいが，ケアレスミスにより誤っている解答である。

表４から，次の点を指摘できる。

ア．学年進行等ともに，正答率は着実に上昇しているといえる。途中の計算式をかくことを指示しなかったので，答えのみしか書いていない解答もあったが，途中の計算式が書いてあるものの多くは，除法を乗法に直して計算するものであった。このような計算方法について，指導がきちんとなされているといえる。

イ．典型的な誤答であるxは，次のように，乗法を先に計算してしまったための誤りと考えられる。

$$2x \div \frac{2}{3} \times 3 = 2x \div (\frac{2}{3} \times 3) = 2x \div 2 = x$$

乗法の計算が，分母が約せるので容易に計算できるために，そちらを先に計算してしまったのであろう。中１でこの誤りは35%を超えていたが，学年進行とともに減少していた。

④　$5x \div 6 \div (-2)$

正答率と典型的な誤答率は，表５の通りである。

表5　問題④の結果

④	正解	計算ミス	$-\frac{5x}{3}$	その他
中1	66	7.9	21.1	5.3
中2	90	6.1	4.3	0
中3	91	2.7	4.4	1.8

表5から，次の点を指摘できる。

ア．中1から中2にかけて，正答率は大きく上昇している。途中の計算式が書いてあるものについては，問題③と同様に，除法を乗法に直す計算方法であった。中2での「式と計算」についての指導の成果といえるであろう。

イ．典型的な誤答である$-\frac{5x}{3}$は，次のように，後ろの除法から先に計算してしまったための誤りと考えられる。

$$5x\div6\div(-2)=5x\div\{6\div(-2)\}=5x\div(-3)=-\frac{5x}{3}$$

問題③の場合と同じように，除法$6\div(-2)$が割り切れて，容易に計算できるので，先に計算してしまったのであろう。中1でこの誤りは20%を超えていたが，中2で大幅に減少している。

以上の問題①～④から，A÷B×CやA÷B÷Cのタイプの式について，学年進行とともに計算はできるようになっていることが確かめられた。

一方で，特に，A÷BCの式の意味については，学年が進行しても，理解は十分に深まっていない実態が明らかになったといえるであろう。

9．指導への示唆

これまでのことをまとめると，次のア～オの5点に整理できる。

ア．A÷B×Cのタイプの計算に関する誤答としては，乗法を先に計算して，A÷(B×C)としてしまう誤りが一番多い。

イ．A÷B×Cの計算については，中学校では，中1「正の数・負の数」，中2「式の計算」，中3「平方根」で扱っているが，教科書会社によって，軽重に差がある。計算の仕方は，除法を乗法に直して，$A\times\frac{1}{B}\times C$のように指導している。このように計算するとき，A÷(B×C)とする誤りは多くないであろう。

ウ．A÷BCの計算については，中2「式の計算」で，どの教科書も丁寧に扱っている。計算の仕方は，分数の形$\frac{A}{BC}$にするか，除法を乗法に直して$A\times\frac{1}{BC}$と変形する方法を指導している。この計算を，A÷B×Cとする誤りは多くないであろう。

エ．A÷B×CとA÷BCの計算について，それぞれ，正しく計算できたとしても，2つの式の意味の違いを正しく理解していない生徒は，少なくないと考えられる。

オ．3項以上の計算順序において，括弧内優先，乗除優先という例外を除くと，左から順に

計算することについて，中学生になっても十分に理解していない生徒がいると考えられる。

以上のことから，今後の指導について，次のような点を指摘できる。

① A÷B×Cの計算について，A÷(B×C)のように計算できないことを，いくつかの中学教科書の扱いのように，中1「正の数・負の数」あるいは中1「文字と式」で丁寧に指導することが重要である。

たとえば，

A+B+C=A+(B+C)，A+B−C=A+(B−C)

は成立するが，

A−B+C=A−(B+C)，A−B−C=A−(B−C)

は成立しないのと同じように，

A×B×C=A×(B×C)，A×B÷C=A×(B÷C)

は成立するが，

A÷B×C=A÷(B×C)，A÷B÷C=A÷(B÷C)

は成立しないことについて指導する。

② A÷BCのように，かけ算記号×が省略されている場合は，その部分を優先して計算することについて，たとえば中2「式の計算」で触れることが重要である。

たとえば，かけ算記号×を省略せずにかくと

A+BC=A+(B×C)=A+B×C

A×BC=A×(B×C)=A×B×C

A÷BC=A÷(B×C)=A÷B÷C

となることについて指導する。

③ 3項以上の計算の順序は，括弧内優先，乗除優先の例外を除くと，「左から順に計算する」ことについて，中学においても，たとえば中1「正の数・負の数」で指導することが重要である。

10. おわりに

高校の数学では，たとえば，数学Ⅰの中に次のような式変形が何の説明もなく登場する。

余弦定理　$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\theta$　を変形して

$$\cos\theta=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

上の変形は，移項した後，両辺を2bcで割っている。形式的に式変形できるかもしれないが，実際には，「2bcで割る」ことが，「÷(2×b×c)」のことであること，$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$の式の意味を，

$(b^2+c^2-a^2)\div(2\times b\times c)$

と捉えることが重要である。

計算して正しい答えを得ることはできたとしても，式の意味自身に対する理解が十分でないと，その後の学習を進めていく上で，つまづきの要因となる可能性は高いといえる。したがって，それぞれの段階において，式の意味をきちんと指導することは，重要なことであると考える。

なお，今回の調査の実施に当たっては，静岡大学附属島田中学校の数学科教諭・園田博人，竹下知行両先生にご協力いただいた。深く感謝申し上げます。

＜参考・引用文献＞

安藤一郎.1977.四則混合演算における計算過程の考察.日本数学教育学会誌.Vol59.pp.226～230
国立教育政策研究所教育課程研究センター.2003.平成13年度小中学校教育課程実施状況調査報告書－中学校数学－.ぎょうせい
熊倉啓之.文字の有用性を感じさせる文字の指導.教育科学数学教育.NO570.明治図書.pp4～8
平成14年度用中学校数学教科書.東京書籍/学校図書/啓林館/大日本図書/教育出版/大阪書籍（6社）
平成14年度用小学校算数教科書.東京書籍//学校図書/啓林館/大日本図書/教育出版/大阪書籍（6社）
文部省初等中等教育局.昭和57年度教育課程実施状況に関する総合的調査研究の調査結果（中学校）について.文部省.1997
文部省初等中等教育局.教育課程実施状況に関する総合的調査研究調査報告書－中学校－数学.文部省.1985
長崎栄三他.算数・数学の内容とその配列に関する基礎的・実証的研究.文部省科学研究費補助金特定領域研究報告書.2003
埼玉県入間地区算数数学教育研究会.入間の算数数学学力調査.2005
昭和46年度用中学校数学教科書.学校図書