

ランダムなデータの解析 (II)

——生物リズムの研究の為に——

Analysis of Random Data (II)

——for the Study of Biological Rhythms——

天 岸 祥 光 稲 村 欣 作

Yoshimitsu AMAGISHI and Kinsaku INAMURA

(Received Oct. 1, 1977)

1. はじめに

前回¹⁾の報告で、デジタル化されたデータの解析について論じ、それにもとずいて、「人間のリズム」の存在の実証を試みた。今回は、実際のデータに含まれている定常性をもたない成分、又は不必要な周波数成分の除去法について論じ、それを実際のデータに応用してみる。前回でも論じたように、データの解析にあたっては、データが定常的であるか否かは、大変重要な問題であり、非定常的なデータから、パワースペクトルをもとめても、ほとんど意味のないものになる恐れがある。従って、これらの除去法について述べることは、それ自身意義のあることであると同時に、最近市売化されつつあるデジタル・アナライザー関係の測定器の盲目的使用に対する警告にもなるであろう（これらの測定器で、定常性をチェックすることはほとんど不可能である）。

しかし、非定常的なデータの解析は非常に困難なものがあるから、ここでは非定常的なものとしては、直線トレンドと、定常的なシグナルに対してゆっくり変化している成分（又は極めて速く変動している成分）の二種類だけにする。後者は必ずしも非定常ではないが、データが時間的に有限であるために、特にゆっくりした変動は非定常性を与える場合が多い。今ナマのデータを $y(t)$ とし、それに含まれている定常性のある成分（我々が解析したい部分）を $x(t)$ 、ナマのデータの時間的平均値を $\langle y \rangle$ 、非定常的成分（又は不必要な成分）を $f(t)$ とすると、

$$y(t) = \langle y \rangle + f(t) + x(t) \quad (1.1)$$

である。時間平均値は

$$\langle y \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt \quad (1.2)$$

$$\left(= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N y_n \right)$$

与えられるから、 $f(t)$ が除去できれば、ナマのデータから $x(t)$ がもとまることになる。

$f(t)$ が極めてゆっくり（又は速く）変動しているなら、電気回路でもちいるフィルターの考えを応用して除去することができる。一方 $f(t)$ が直線トレンドである場合は、すなわち

$$f(t) = at + b \quad (1.3)$$

(a, b は定数)

である場合は、 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(f)$ は

$$\begin{aligned} F(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j \cdot 2\pi f t} dt \\ &= a \frac{j}{2\pi} \frac{d}{df} \delta(f) + b \delta(f) \end{aligned} \quad (1.4)$$

となる*。従ってこれは正弦波などとは異なるためにフィルターで除去することはできない。以上のことについて第2章で詳しく述べる。第3章では、実際の例として、ひとの日内リズムに関するデータに適用し、その有効性について論ずる。

2. $f(t)$ の除去

2.1. フィルター

第1図に示すように、ナマの時系列データ $y(t)$ が、あるフィルターを通過後 $x(t)$ になったとする。このとき $x(t)$ と $y(t)$ の間の関係は、多くの場合、いわゆるたたみこみ積分(convolution integral) で表わされる²⁾。すなわち、

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) y(t-\tau) d\tau \quad (2.1)$$

ただし $h(\tau)$ は重み関数 (weighting function) で、時間 t に対して不変である (定係数)。また、

$$h(\tau) = 0, \tau < 0 \quad (2.2)$$

の場合は、系が過去の入力に対してのみ応答することを意味する。アナログ的フィルターはすべてこの条件の下で行われる。

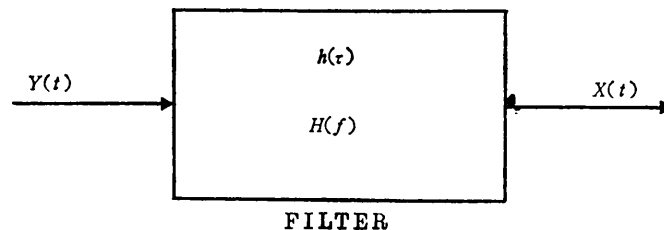
次に周波数応答関数 (frequency response function) $H(f)$ は、 $h(\tau)$ のフーリエ変換で定義されるから、

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j \cdot 2\pi f \tau} d\tau \quad (2.3)$$

である**。

次に $y(t)$, $x(t)$ のフーリエ変換をそれぞれ $Y(f)$, $X(f)$ とすると、(2.1) 式をフーリエ変換して、

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) y(t-\tau) e^{-j \cdot 2\pi f t} d\tau dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j \cdot 2\pi f \tau} \left(\int_{-\infty}^{\infty} y(t-\tau) e^{-j \cdot 2\pi f (t-\tau)} dt \right) d\tau \\ &= H(f) \cdot Y(f) \end{aligned} \quad (2.4)$$



第1図

* $\delta(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j \cdot 2\pi f t} dt$, つまり $\delta(f)$ は $f(t)=1$ のフーリエ変換で、デルタ関数と呼ばれている。

** $H(f)$ は一般に複素数だから、位相角 $\phi(f)$ を用いて、 $H(f) = |H(f)| e^{-j\phi(f)}$ と表わしてもよい。但し $H^*(f) = H(-f)$, $|H(f)| = |H(-f)|$, $\phi(-f) = \phi(f)$ の関係がある。

次に出力 $x(t)$ の相関をとってみよう。

$$x(t) x(t+\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) h(\beta) y(t-\alpha) y(t+\tau-\beta) d\alpha d\beta \quad (2.5)$$

であり，入力，出力の相関関数をそれぞれ $R_y(\tau)$, $R_x(\tau)$ とすれば，

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) x(t+\tau) dt \quad (2.6)$$

$$R_y(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T y(t) y(t+\tau) dt$$

であるから，

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) h(\beta) R_y(\tau - \beta + \alpha) d\alpha d\beta \quad (2.7)$$

となる。一方相関関数のフーリエ変換がパワースペクトルである¹⁾ から，(2.7) 式のフーリエ変換をもとめて，

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j \cdot 2\pi f \tau} d\tau \\ &= \iiint_{-\infty}^{\infty} h(\alpha) h(\beta) e^{j \cdot 2\pi f \alpha} e^{-j \cdot 2\pi f \beta} R_y(\tau - \beta + \alpha) e^{-j \cdot 2\pi f (\tau - \beta + \alpha)} d\alpha d\beta d\tau \\ &= H(f) \cdot H^*(f) \int_{-\infty}^{\infty} R_y(\tau - \beta + \alpha) e^{-j \cdot 2\pi f (\tau - \beta + \alpha)} d\tau \\ \therefore G_x(f) &= |H(f)|^2 G_y(f) \end{aligned} \quad (2.8)$$

これから明らかなように，(自己)パワースペクトルの出力はフィルターの周波数応答関数 $H(f)$ の位相に無関係である。これらは入力の $y(t)$ のパワースペクトルに，実際の関数を掛けて，除去したい周波数成分を取り除いているにほかならない。

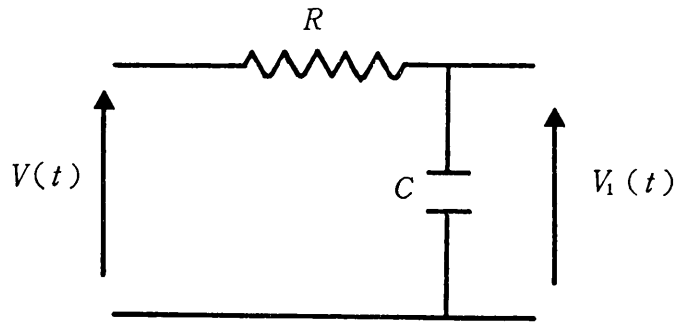
ローパスフィルター (low pass filter)

これは，高周波成分を取り除くためのフィルターであり，電気回路では第2図に示すような積分回路が用いられる。この回路のキルヒホッフの式は，

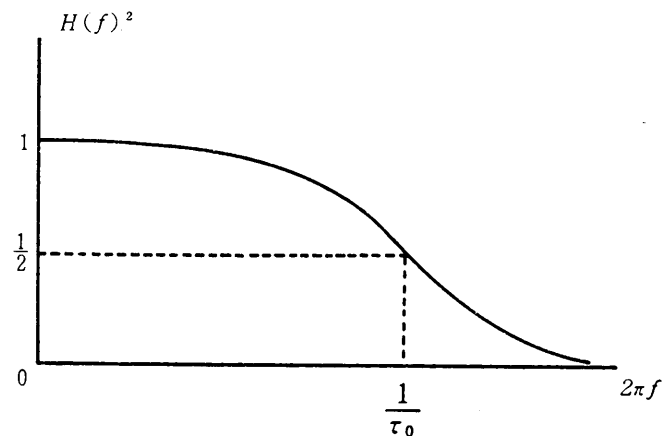
$$\begin{aligned} V(t) &= IR + \frac{Q}{C} \\ &= CR \dot{V}_1 + V_1 \end{aligned} \quad (2.9)$$

一方(2.4)式からも明らかなように，周波数応答関数 $H(f)$ は，単位インパルス $(V(t) = \delta(t))$ に対する出力のフーリエ変換でもある²⁾。すなわち

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_0^{\infty} V_1(t) e^{-j \cdot 2\pi f t} dt \\ &= H(f) \end{aligned}$$



第2図



第3図

$$\int_0^{\infty} \dot{V}_1 e^{-j \cdot 2\pi f t} dt = j \cdot 2\pi f H(f) \quad (2.10)$$

$$\therefore H(f) = \frac{1}{j \cdot 2\pi f \tau_0 + 1} \quad (2.11)$$

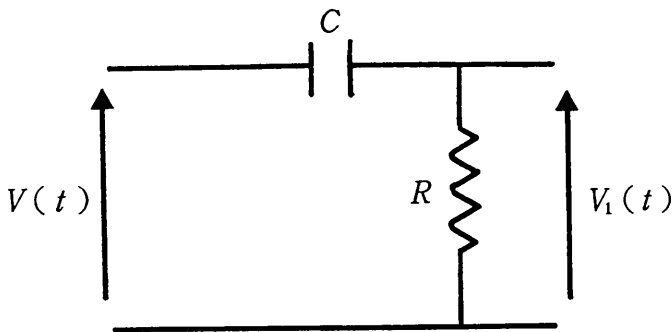
ここで $\tau_0 = RC$ は時定数 (time constant) である。従って

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{(2\pi f \tau_0)^2 + 1} \quad (2.12)$$

となり、これは第3図のような形をしている。(2.11) 式の逆フーリエ変換より $h(\tau)$ をもとめると、留数をつかって

$$\begin{aligned} h^L(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{+j \cdot 2\pi f \tau} df \\ &= \frac{1}{\tau_0} e^{-\frac{\tau}{\tau_0}} \end{aligned} \quad (2.13)$$

となる。これがローパス・フィルターの重み関数である。



第4図

ハイパス・フィルター (high pass filter)

これは低周波振動数を除去するフィルターで、電気回路では、第4図のような微分回路を用いる。このフィルターの周波数応答関数は前回と同様にして、

$$H(f) = \frac{j \cdot 2\pi f \tau_0}{j \cdot 2\pi f \tau_0 + 1} \quad (2.14)$$

である。従って

$$|H(f)|^2 = \frac{(2\pi f \tau_0)^2}{(2\pi f \tau_0)^2 + 1} \quad (2.15)$$

また重み関数は (2.14) 式の逆フーリエ変換より

$$h^H(\tau) = \delta(\tau) - \frac{1}{\tau_0} e^{-\frac{\tau}{\tau_0}} \quad (2.16)$$

となる。(2.15) 式を第5図に示す。

2.2. デジタル化

次に今までもとめてきた式のデジタル化を行う。そこで、今 $t=0$ の点も含めて

($N+1$) ケのデータ値 (標本関数値) が与えられたとしよう。サンプリングの時間間隔を h とすれば*

$$t = nh, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N \quad (2.17)$$

であるから (2.1) 式は

* たたみこみ関数の $h(\tau)$ と混同しないこと。

$$\begin{aligned}
 x_n &= x(nh) \\
 &= h \sum_{k=0}^J (h(kh) y(nh - kh) + h(-kh) y(nh + kh)) \\
 &= h \sum_{k=0}^J (h_k y_{n-k} + h_{-k} y_{n+k}) \\
 &= h \sum h_k (y_{n-k} + y_{n+k}) \tag{2.18} \\
 &\quad \uparrow \quad \uparrow \\
 &\quad \text{過去の入力} \quad \text{未来の入力}
 \end{aligned}$$

但し

$$\tau = 0, h, 2h, \dots, Jh \tag{2.19}$$

であり、有限長のデータの場合は時間 t によって J の値が異なってくる。従って、(2.18) 式のような表わし方は必ずしも正しくなく、次のように表わす方が妥当であろう。

$$x_n = h \left(\frac{1}{2} h_n y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} h_k y_{n-k} + \sum_{k=0}^{N-n} h_k y_{n+k} + \frac{1}{2} h_{N-n+1} y_{N+1} \right) \tag{2.20}$$

なおフィルターの対称性 $h_k = h_{-k}$ を用いてある。これらの式よりわかるように、アナログ的解析では、たたみこみ積分に未来の値を入れることはできなかったが、デジタル化したときは、未来の値まで計算機が記憶しているから、このような計算が可能になるのである。但し(2.11)の計算では $t < 0$ で $V(t) = 0$ とおいたことになるから(2.13), (2.16)式は、過去の値にのみ対する重み関数である。しかし、デジタル化したときは、 $h_k = h_{-k}$ として、未来の入力に対する重み関数としても用いられるから、

$$\begin{aligned}
 h_k^L &= h^L(kh) \\
 &= \frac{1}{2\tau_0} e^{-\frac{kh}{\tau_0}} \tag{2.21}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h_k^H &= h^H(kh) \\
 &= \frac{1}{2} \delta(kh) - \frac{1}{2\tau_0} e^{-\frac{kh}{\tau_0}} \tag{2.22}
 \end{aligned}$$

とすべきである。

さらに、ハイパス・フィルターを通した出力は、ローパス・フィルターの重み関数を用いて

$$x_n = y_n - h \left(\frac{1}{2} h_n^L y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} h_k^L y_{n-k} + \sum_{k=0}^{N-n} h_k^L y_{n+k} + \frac{1}{2} h_{N-n+1}^L y_{N+1} \right) \tag{2.23}$$

と表わせることに注意する*。(2.23)の意味は、ナマのデータ値から、低周波成分を除去したものが、高周波成分になっているということである。

直線トレンド

この場合は、(1.3)式は

$$f(nh) = f_n = a(nh) + b, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N \tag{2.24}$$

となり、係数 a, b が決まれば、直線トレンドを除去して、定常な関数 $x(nh)$ がもとまることになる。 a, b の決定は、よく知られている最小二乗法によりもとまり、次の連立方程式の

* $\frac{1}{2} \sum_k \delta(kh) (y_{n-k} + y_{n+k}) = y_n$

根である。

$$bN + a \sum_{n=0}^N nh = \sum_{n=0}^N y_n \quad (2.25)$$

$$b \sum_{n=0}^N nh + a \sum_{n=0}^N (nh)^2 = \sum_{n=0}^N y_n (nh)$$

よって、 b 、 a は次のようになる。

$$b = \frac{2(2N+1) \sum_{n=0}^N y_n - 6 \sum_{n=0}^N y_n n}{N(N-1)} \quad (2.26)$$

$$\simeq \frac{4}{N} \sum_{n=0}^N y_n - \frac{6}{N^2} \sum_{n=0}^N y_n n$$

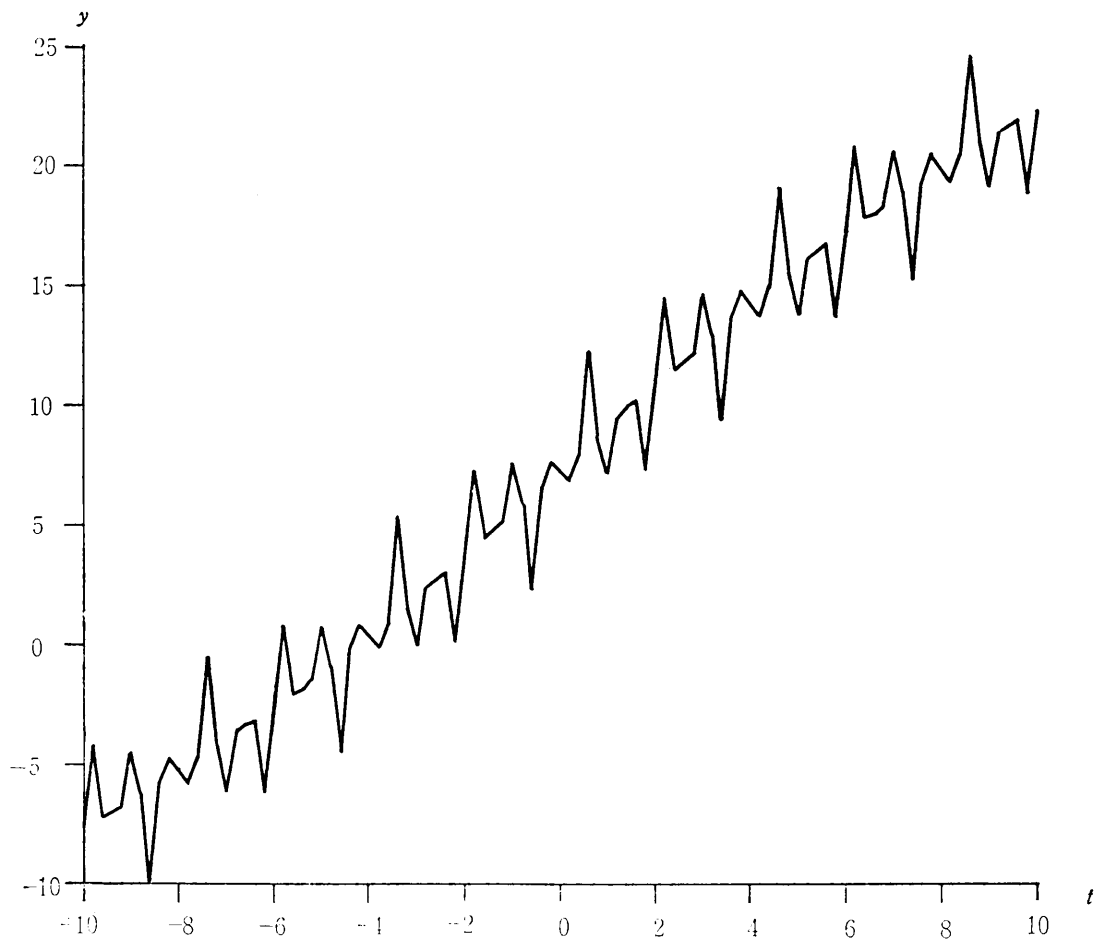
$$a = \frac{1}{l} \frac{12 \sum_{n=0}^N y_n h - 6(N+1) \sum_{n=0}^N y_n}{N(N+1)(N-1)} \quad (2.27)$$

$$\simeq \frac{1}{hN^3} \left(12 \sum_{n=0}^N y_n n - 6N \sum_{n=0}^N y_n \right)$$

3. 解析例

3.1. モデル解析

今回は、モデル解析と実データの解析により、その具体的手順を示す。ここではまず、ハイ



第6図

パス・フィルターの使用例をモデルで示そう。データは次式により計算したものである。

$$\begin{aligned}
 y = & \sin(2\pi \times 0.05t) \\
 & + \sin(2\pi \times 0.5t) \\
 & - 2 \sin(2\pi \times 1.25t) \\
 & + \sin(2\pi \times 2t) \\
 & + 1.5t + 7.3 \quad (3.1)
 \end{aligned}$$

サンプルは $t = -10$ から始め、 $h = 0.2$, $N = 101$ である。第6図で示したこのデータには、振動数 0.05, 0.5, 1.25, 2.0 の周波数成分と $a = 1.5$, $b = 7.3$ の直線トレンドが含まれている。その振巾は 1 としたが、振動数 1.25 の成分だけは 2 とした。このデータに非定常性を与える成分は、直線トレンドである。またデータが長波長の成分に比べて短かいため、場合によっては振動数 0.05 の成分が、非定常的要素を与えることもありうる。

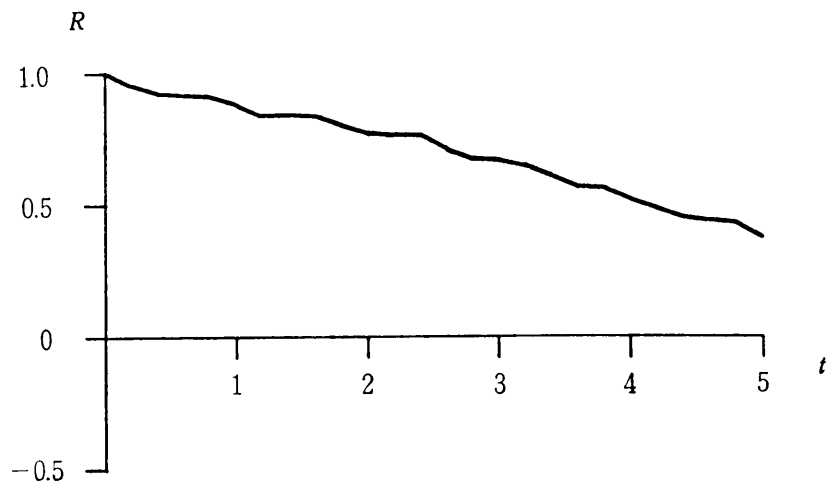
さてここでは、振動数 0.5 と 1.25 および 2.0 の成分のパ

ワースペクトルを求めたいとしよう。まず第7図と第8図は、そのままのデータから求めた自己相関関数とパワースペクトルである（両者とも規格化済み、以後自己相関関数とパワースペクトルに関しては同じ）。ここで第8図は振動数ゼロ近辺だけのパワースペクトルとなり、知りたい成分については、正しい情報を与えていない。これは文献1)と2)で論じたように、データが定常的でないために生じたものである。

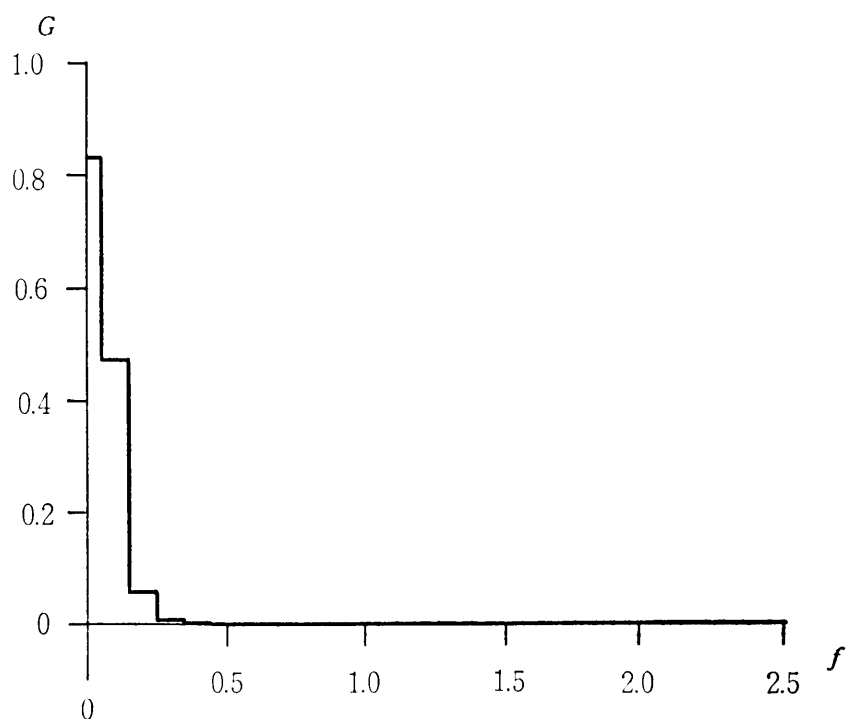
直線トレンドの除去

第9図は、(2.26) および (2.27) 式に従って a と b を決定し、第6図のデータから直線トレンドを除去したものである。その係数は、 $a = 1.58$, $b = 7.30$ となり与えたはじめの値とよく一致している。

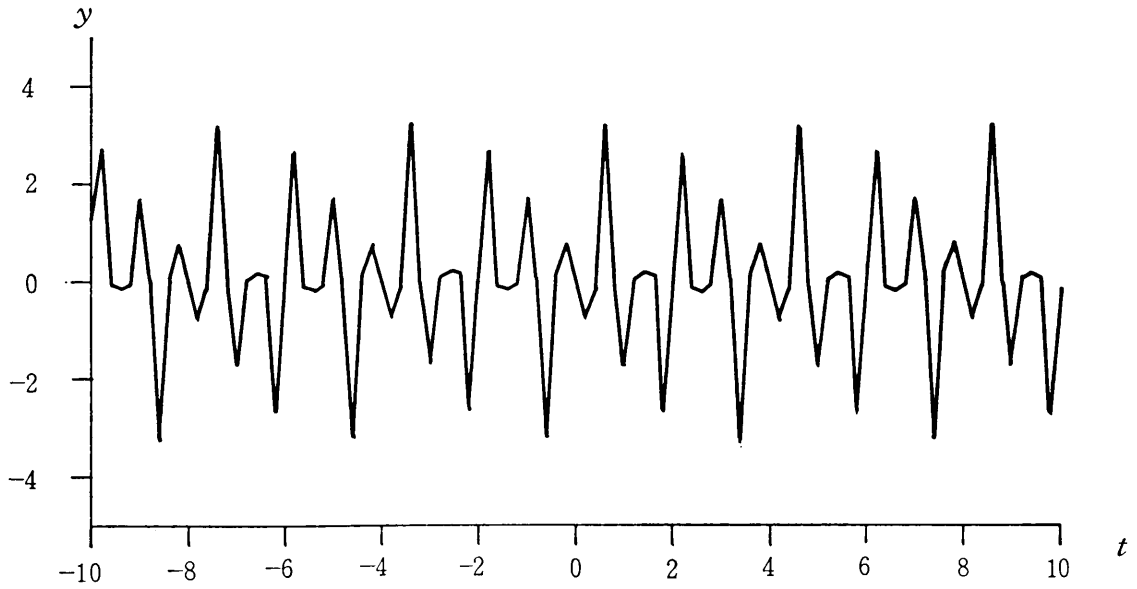
第10図と第11図はこの場合の自己相関関数とパワースペクトルである。第11図でみると振動数 0.05 に対応するパワーにピークがみられず、振動数ゼロ近くにピークがあるように見える。これは、直線トレンドが除去されても、データが有限であるためまだ完全な定常性には至っていないことを示している。しかしこの段階でも、全体にどのような振動数の周波数成分が含まれているか、その概要を知ることはできる。



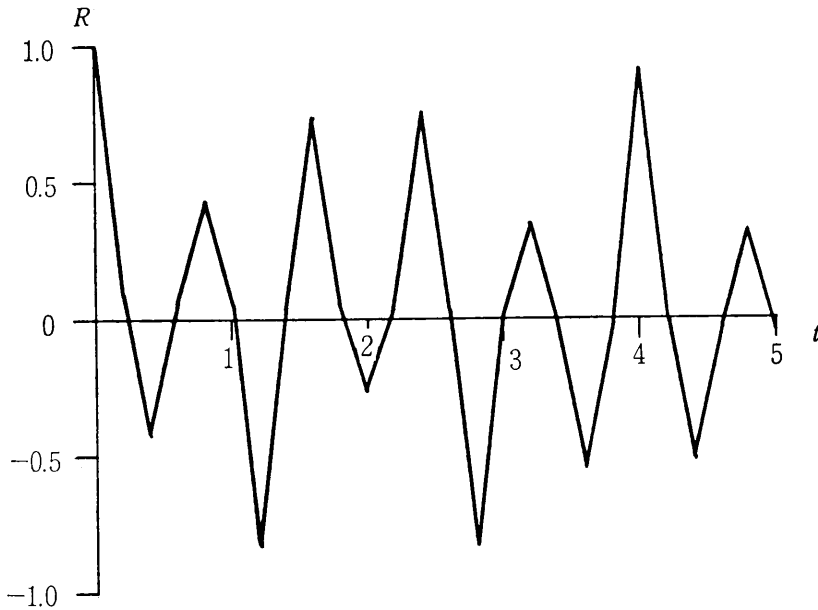
第7図



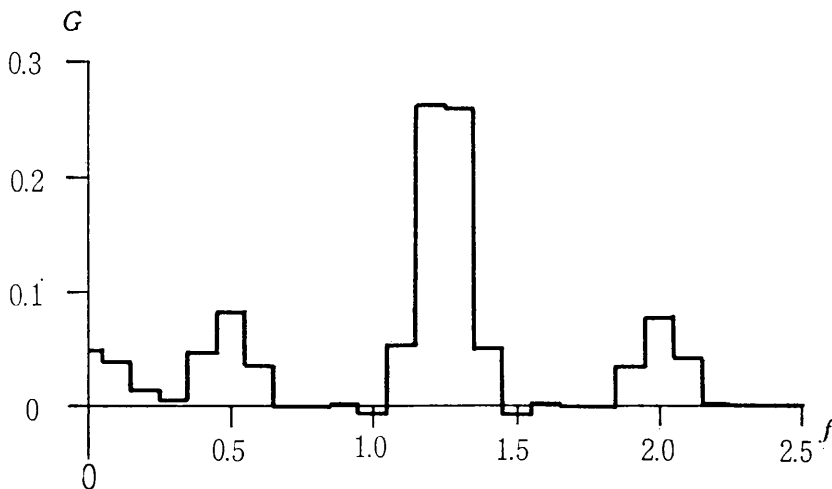
第8図



第9図



第10図



第11図

低周波成分の除去

さて、ここで知りたい成分の振動数は0.5以上のものである。このような場合ハイパス・フィルターを使用する。そのためには時定数 τ_0 を決定しなければならない。

周波数応答関数の $|H(f)|^2$ が $1/2$ のときの振動数を f_0 とすると、 f_0 は (2.8) 式と (2.15) 式より、次のようになる。

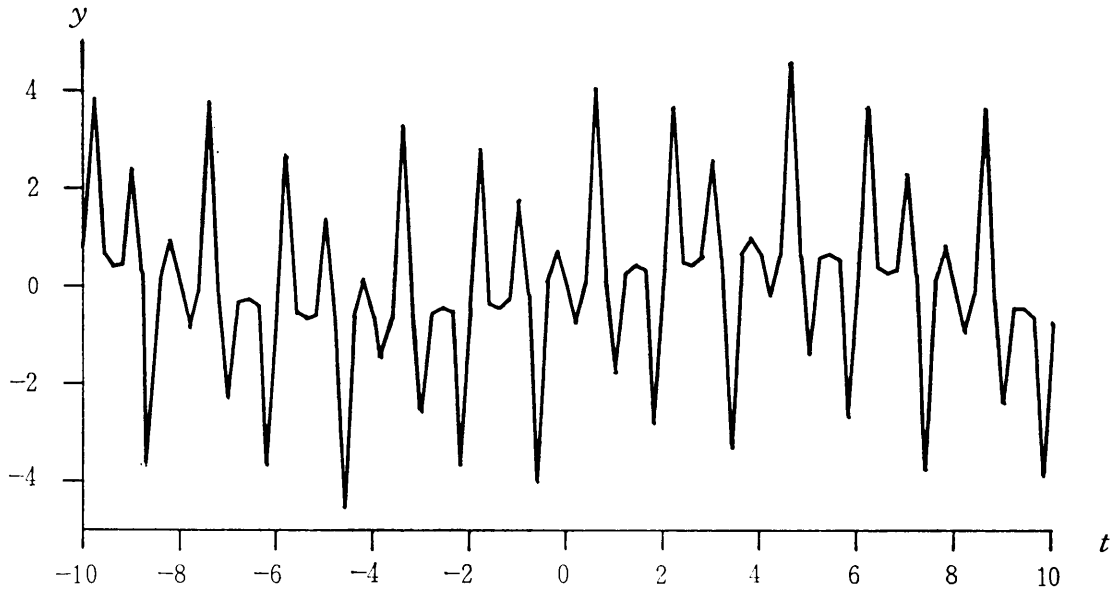
$$f_0 = \frac{1}{2\pi\tau_0} \quad (3.2)$$

そこで、ハイパス・フィルターの場、普通は次式のように f_0 をとって、(3.2) 式で τ_0 を決定する。

$$f_1 \geq f_0 (\geq f_2) \quad (3.3)$$

ここで、 f_1 は解析したい成分の振動数、 f_2 は除去したい成分の振動数である。その理由は第5図から明らかである。

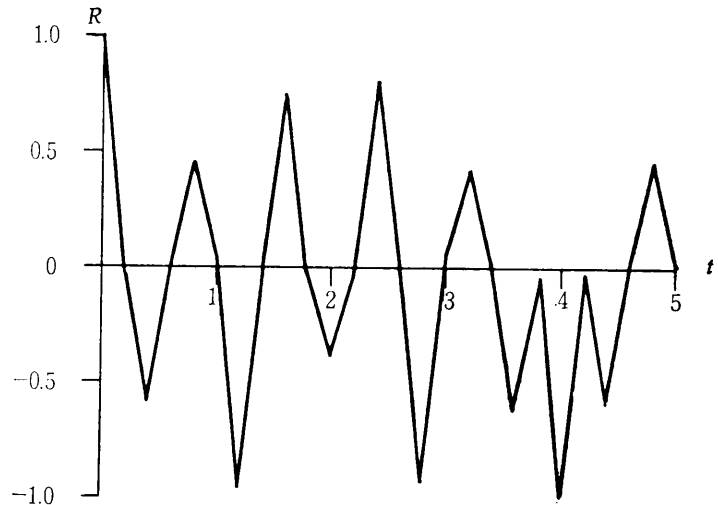
さてここでは、 $f_1 = 0.5$ 、 $f_2 = 0.05$ である。 f_0 は f_1 よりかなり小さくしなければならないが、 f_1 のパワースペクトルを損



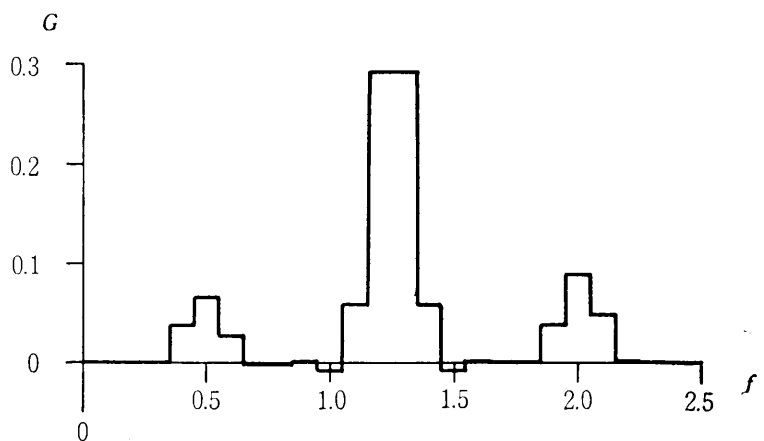
第12図

わなない程度で、できるかぎり大きくしたい。そのためここでは、 f_2 よりもかなり大きい0.2とした。したがって(3.2)式より $\tau_0=0.8$ となる。

第12図は第9図のデータを時定数0.8で、(2.23)式によるハイパス・フィルタに通したものである。また、第13図と第14図はその自己相関関数とパワースペクトルである。第14図では、振動数ゼロ近くのパワーがゼロになっている。ここでもマイナスの値が出てくるが、これは文献1)と2)で論じたランダム誤差によるものである。この結果より、もとのデータに振動数0.5と1.25および2の周波数成分が含まれていることを知ることができる。また、振動数1.25のパワーが他の4倍になっていることから、その振幅は他の2倍であることがわかる。



第13図

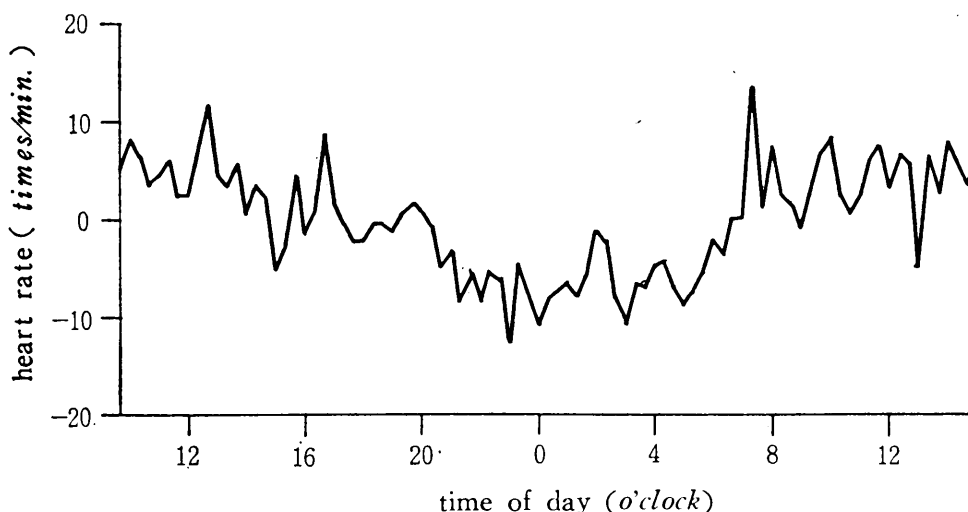


第14図

3.2. 定常環境下における心拍数の日内変動

生物リズムに関するデータでは、その採取時の条件から解析上困難な問題を生ずることが多い。日内リズムの周期を決定しようとする場合もそうである。

第15図に示したデータは、定常環境下及び運動をしないという条件で測定した正常成人の心



第15図

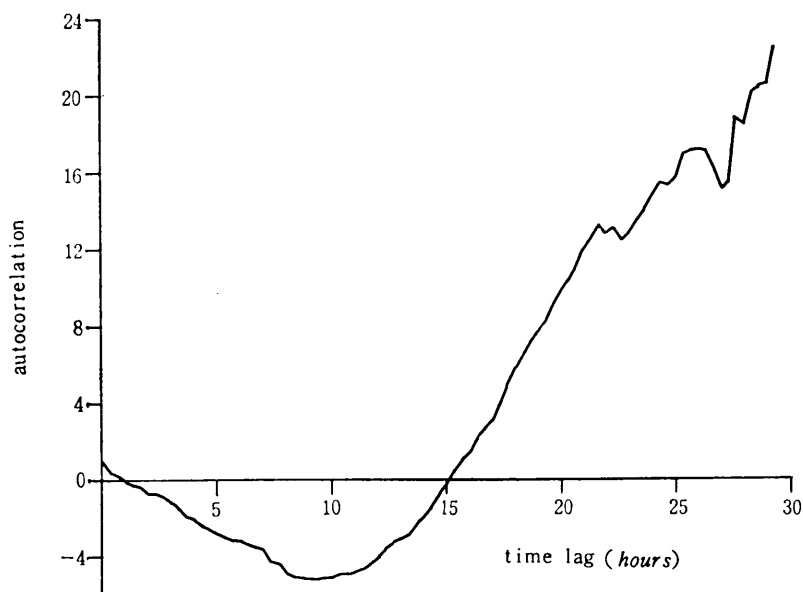
拍数である。そのサンプル条件は、 $h=0.33$ (時間)、 $N=89$ となっている。正常人においては、このような測定条件をせいぜい一昼夜しか続けられない。したがってこのデータにおける日内リズムは、一周程度しかない。この場合の解析上の難しさは、非定常的要素を与えやすい低周波成分そのものを、解析しなければならないことである。

被験者は正常成人男子30才、測定条件は、案内温度 $23 \pm 1^\circ\text{C}$ 、室内湿度 $55 \pm 5\%$ 、光はうす暗く新聞が読める程度、食事は基礎代謝に必要な1日あたり約1500カロリー、被験者は運動をしないでベッドに横たわっているという条件である。心拍数は心電計により、毎測定時刻を中心に5回、50秒インターバルで10秒間測定し、その1分あたりの平均値をデータとした。

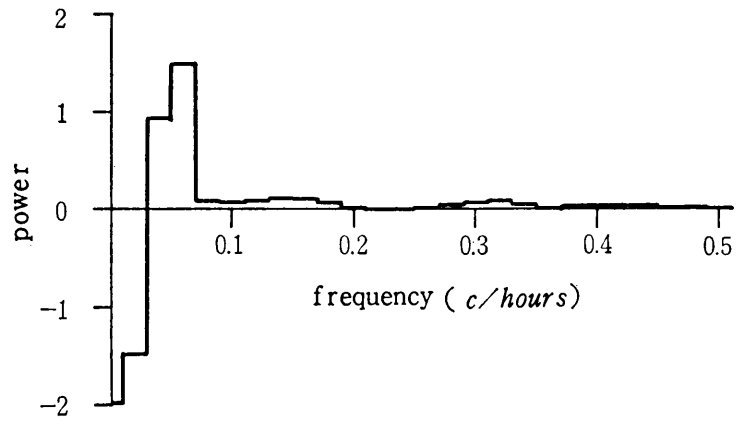
第16図と第17図は、測定値そのままから求めた自己相関関数とパワースペクトルである。第16図は規格化したにもかかわらず、絶対値が1より大きくなり不安定性が生じている。また第17図のパワーにもマイナスが大きく出て、ランダム誤差を生じてくる。

直線トレンドの除去

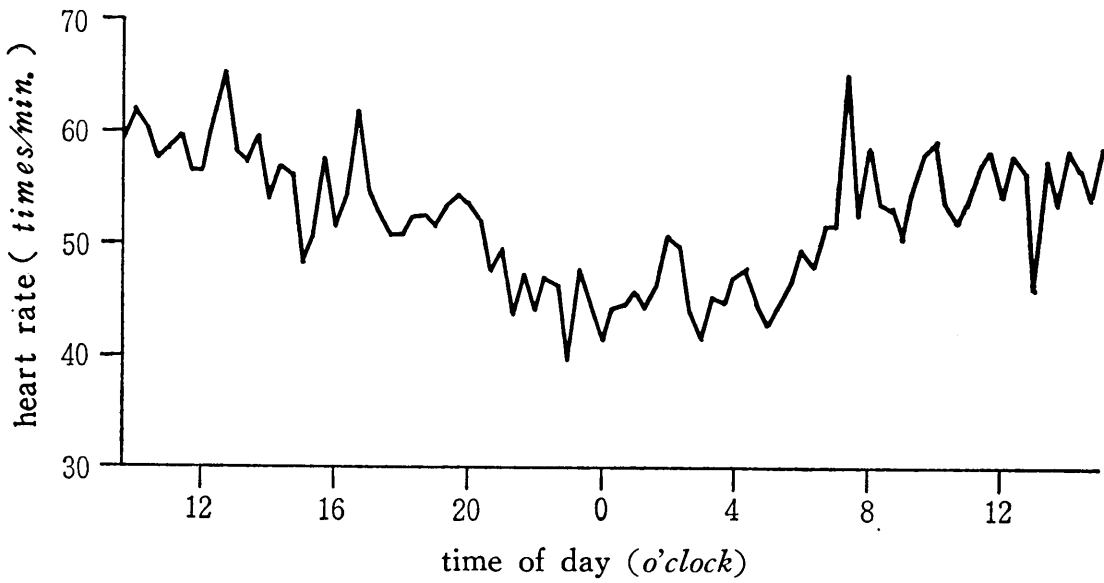
直線トレンドは、ごくわずかでも非定常性を与えている場合が多く、グラフから読みとれな



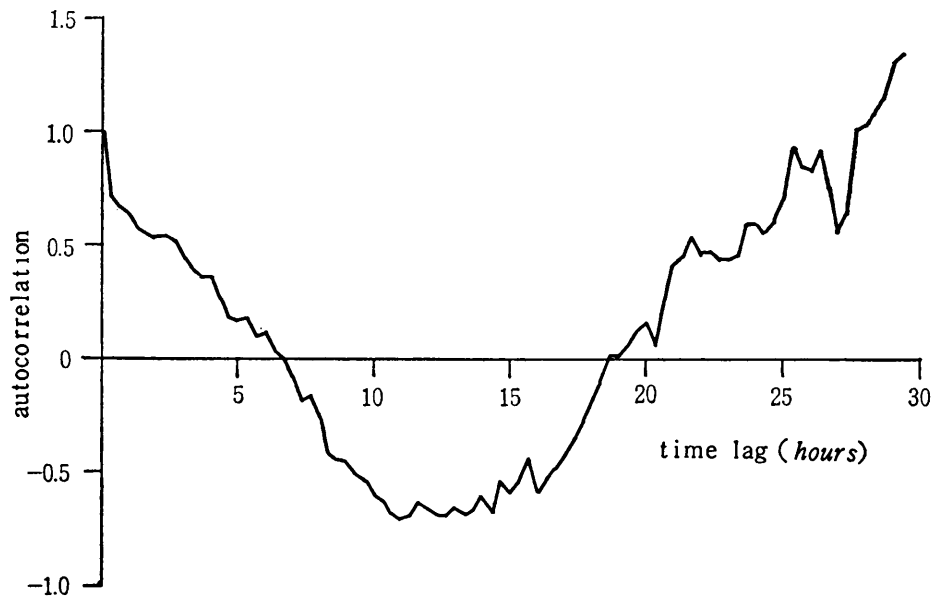
第16図



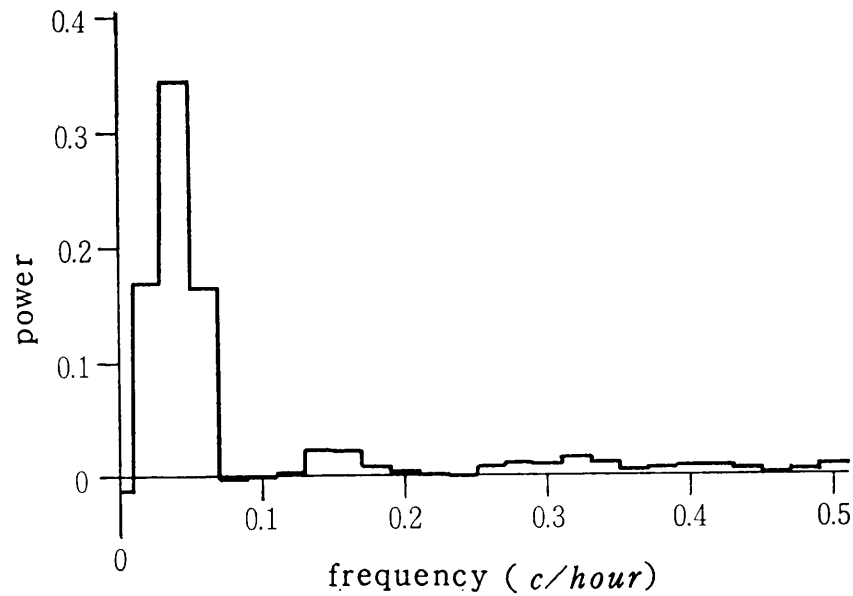
第17図



第18図



第19図

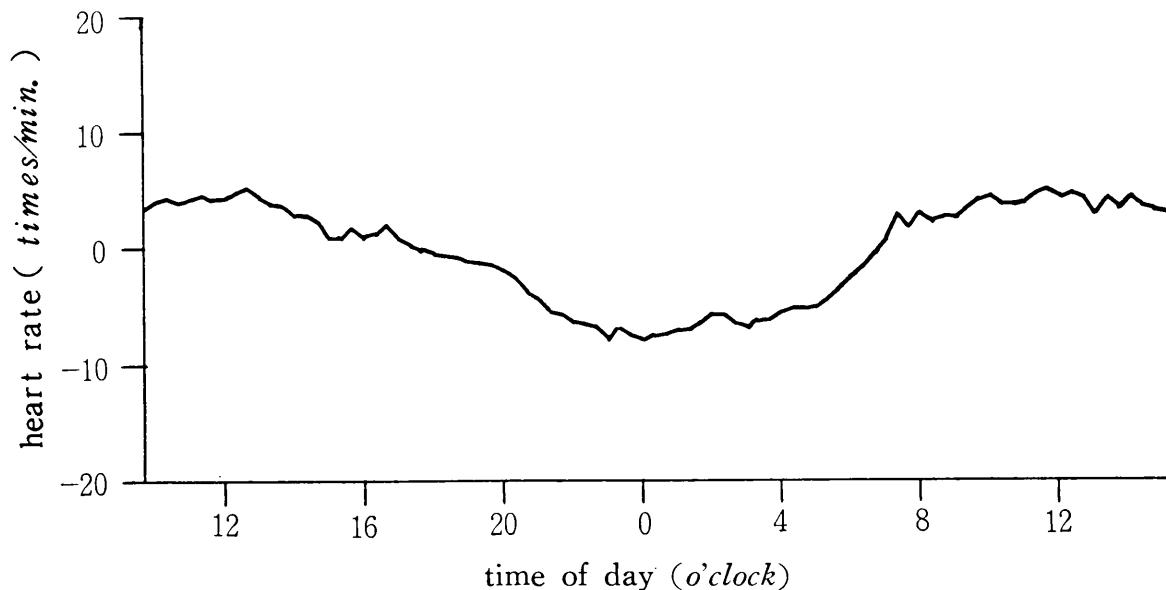


第20図

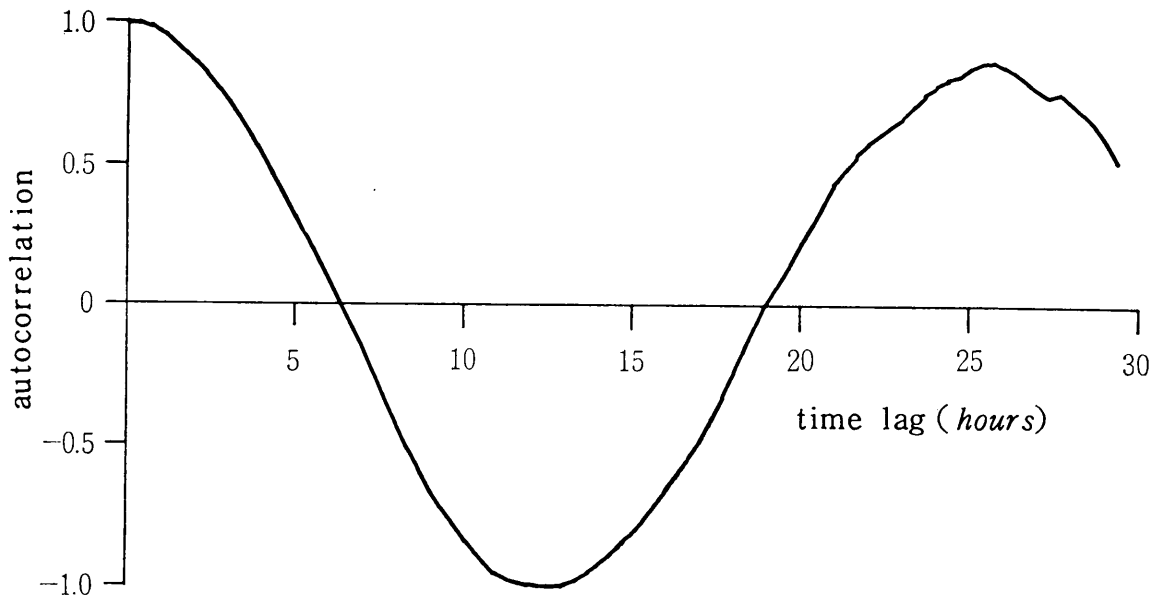
くとも除去しておいた方が無難である。第18図は測定値から直線トレンドを除去したものである。その係数は、 $a = -0.1$ 、 $b = 52.3$ であった。また第19図と第20図はバンド巾 0.04 で求めた。その自己相関関数とパワースペクトルである。第19図の time lag 25 以後は不安定が現われているけれども第20図ではそれも現われず、ほぼ安定性が確保されたといってよい。ここでは、中央点の振動数0.04すなわち25時間周期のスペクトルが非常に大きい。したがって、日内リズムの存在は確かであろう。もち論、それはこのデータについてだけいえることである。この解析では、このデータ以後日内リズムが続くという保障はできない。しかし、人の心拍数に日内リズムがみられるということは、生理学的常識となっているので今さら証明する必要はなからう。大切なことは、その波形を抽出することである。

高周波成分の除去

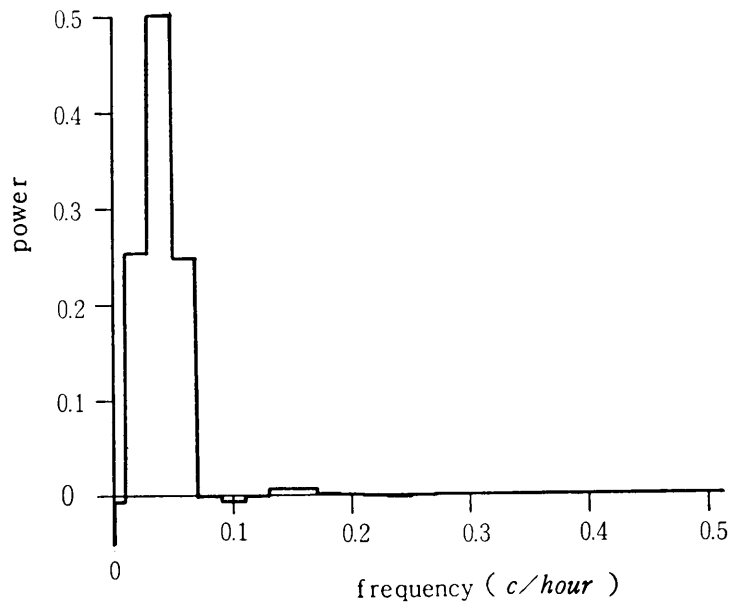
ここで求めたいのは日内リズムの波形である。第20図では振動数0.14と0.32の所にも小さいピークがある。そこで振動数0.14以上の周波数成分を、ローパス・フィルタで除去しよう。この場合も、先のハイパス・フィルタと同様にして、 f_0 を次式のように選ぶ。



第21図



第22図



第23図

$$f_1 \ll f_0 (\leq f_2) \tag{3.4}$$

ここでは $f_0=0.1$, $\tau_0=1.6$ とした。このようにすれば、日内リズムの成分が多少けずられても、除去したい成分は $1/2$ 以下となるはずである。第21図は、第18図のデータをこの条件でローパス・フィルターに通したものである。この図には、日内リズムの波形がよく示されている。また第22図と第23図はその自己相関関数とパワースペクトルである。なお自己相関関数から求めた周期は約25.6時間であった。

3.3. 留意事項

ここでは、本論の方法を用いる場合の留意事項を述べることにする。

周波数応答関数 $H(f)$ は (2.12) 式と (2.15) 式から、そのままデジタル計算することができる。そこでそれを利用して、(2.8) 式を使い、モデルデータのパワースペクトルを直接求めてみた。これは本来、モデル解析の規格化しない値と一致しなければならない。しかしその結果は、パワースペクトルの形が一致しても、その絶対値は必ずしも一致しなかった。これは主として、デジタル化のステップにおいてデータが有限であるために起ったものである。

ここでどちらがよいかは決定できない。しかし生物リズムの解析においては、パワースペク

トルのみでは不充分であって、データに含まれている周波数成分の波形を知ることが大切である。したがって、実際の解析では、(2.20)式と(2.23)式から x_n を求めた方がよい。周波数応答関数 $H(f)$ は、各周波数成分のパワーに対する重みであるから、時定数決定の目安とすれば便利である。

このフィルターを使用する上で、最も重要なことは時定数 τ_0 を決定することである。それには(3.3)式又は(3.4)式を十分満足することが必要である。

生物リズムに関するデータは非定常的なものが多く、本論で述べたような事を検討せずにデータを解析することは危険であり、無意味になるおそれがある。フィルターに関する文献はいろいろあるが、ほとんどアナログ解析に対する説明であり、デジタル化し実例をあげて説明しているものはあまりみあたらない。生物リズムの研究では、アナログデータもサンプリングしてデジタル化することが多く、本論はそのような解析に大きな力を発揮するであろう。

擧筆にあたり、心拍数測定に関して御指導と御協力をいただいた、本学保健管理センター所長榎本浩昌教授と東京工業大学平沢彌一郎教授に深甚なる謝意を表します。また測定に御協力いただいた保健管理センター看護婦諸氏、本学教養部体育教室の諸先生、並びに本学バレーボール部員に深謝の意を表します。

文 献

- 1) 天岸祥光, 稲村欣作; ランダムなデータの解析 (I), 静岡大学教養部研究報告 No. 11, 59-80, 1975
- 2) AMAGISHI Y.; Notes on Digital Analysis of Random Signals, Report of Institute of Plasma Physics, Nagoya Univ. Japan, IPPJT-26, 1976
- 3) 瀧 保夫; 確率統計現象 II, 岩波講座基礎工学 3, 岩波書店,