Development Mathematics Materials of Ceva’s & Menelaus’ Theorem：Focus on Expansion to n-Polygon

チェバ・メネラウスの定理に関する教材開発

―n 角形への拡張―

四之宮　佳彦　　熊倉　啓之

静岡大学教育学部　静岡大学教育学部

Development Mathematics Materials of Ceva's & Menelaus' Theorem

- Focus on Expansion to n-Polygon -

Yoshihiko Shinomiya Hiroyuki KUMAKURA

Abstract

A purpose of this study is to develop mathematics materials of "Ceva's & Menelaus' theorem" that enable the learning emphasizing process of comprehension, expansion and systematization in mathematical world. First, we researched previous studies and found some materials of "Ceva's & Menelaus' theorem". Second, we developed our materials of "Ceva's & Menelaus' theorem" in the case of quadrangle, pentagon and n-polygon. Third, we clarified three characteristics of our materials as follows;

1) First characteristics is that our materials are true in the case of even numbered polygon and concave polygon,
2) Second characteristics is that our materials are proved by using theorems of triangle,
3) Third characteristics is that our materials are used a new concept of "Ceva's point" and "Menelaus' point".

キーワード：教材開発，チェバの定理，メネラウスの定理，統合・発展／体系化

1　はじめに

2018年3月告示の高等学校学習指導要領では，数学的活動の一層の充実が強調され，学習指導要領解説には次の算数・数学の学習過程のイメージ図が示されている（文部科学省，2018）。

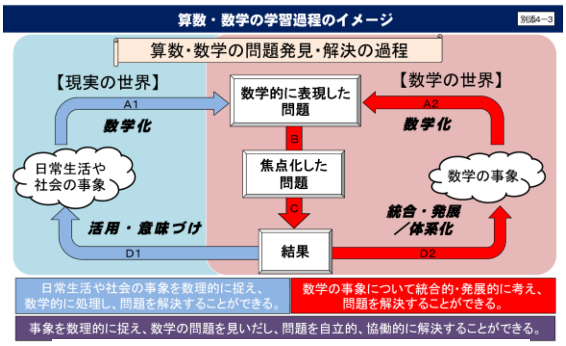
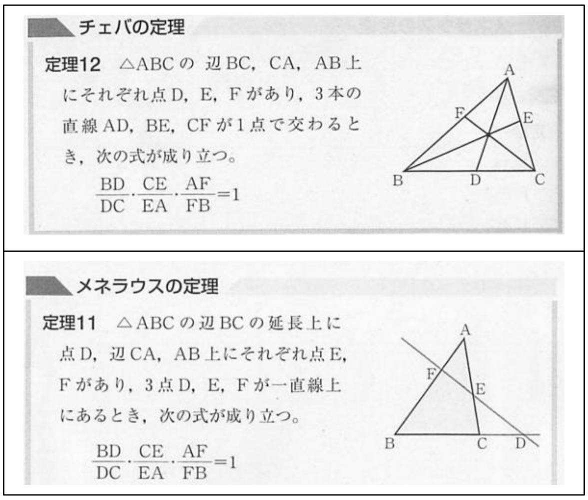


図 1　算数・数学の学習過程のイメージ

【数学の世界】と【現実の世界】の 2 つの過程が示されていて，「統合・発展／体系化」「活用・意味づけ」「数学化」などの用語が登場している点に特徴がある。従来の高等学校数学科の指導は，どちらかといえば「数学的に表現した問題」→「焦点化した問題」→「結果」の一部の過程に焦点が当たっていて，しかも受動的な学びの繰り返しといえる傾向がある（熊倉，2018a）。しかし，「統合・発展／体系化」「活用・意味づけ」「数学化」などの過程も同様に重要であり，これらの過程を主体的に学ぶことが大切といえよう。一方で，「統合・発展／体系化」「活用・意味づけ」「数学化」などの過程を重視した学習を行うためには，それに相応しい教材が必要である（熊倉，2018b）。

そこで，本研究では，特に【数学の世界】における「統合・発展／体系化」に焦点を当て，この過程を重視した学習が可能であるような高等学校の教材を開発することを目的とする。

本稿では特に，教材の内容として「数学 A」の教科書で扱っている次の「チェバの定理」及び「メネラウスの定理」（図 2）を対象とする。



チェバの定理

定理12　△ABC の 辺 BC，CA，AB 上にそれぞれ点 D，E，F があり，3 本の直線 AD，BE，CF が 1 点で交わるとき，次の式が成り立つ。

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$$

メネラウスの定理

定理11　△ABC の辺 BC の延長上に点 D，辺 CA，AB 上にそれぞれ点 E，F があり，3 点 D，E，F が一直線上にあるとき，次の式が成り立つ。

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$$

図 2　数学 A　実教出版　pp. 133-134

これらの定理の教科書での扱い方は，いずれも，まず定理を紹介した上で，証明し，定理を使って線分の比や長さを求める練習問題を解く展開となっている。これだけでは前述した「統合・発展／体系化」の学習

過程は困難である。もしこれらの定理を四角形，五角形や n 角形の場合に拡張する教材が開発できれば，「統合・発展／体系化」の学習過程は可能になる。

そこで，これらの定理の n 角形への拡張について考察する。

2　チェバ，メネラウスの定理の拡張に関する先行研究

教材を開発するのに先立って，まずチェバの定理，メネラウスの定理の拡張に関する先行研究を調査した。

(1)　チェバの定理の拡張に関する先行研究

チェバの定理に関する先行研究として，次の n 角形におけるチェバの定理が見いだされた（例えば，Alexander Brown，1925；早苗，online)。

定理 (奇数角形におけるチェバの定理)

n を 3 以上の奇数とする。n 角形A_1A_2・・・A_n の各辺A_1A_2，A_2A_3，・・・，$A_{n-1}A_n$，A_nA_1上に点P_1，P_2，・・・，P_nをそれぞれとる。また，$P_{n+1}=P_1, P_{n+2}=P_2$，・・・，$P_{n+\frac{n-1}{2}}=P_{\frac{n-1}{2}}$とおく（図 3 参照）。もし線分$A_1P_{\frac{n+1}{2}}, A_2P_{\frac{n+3}{2}}$，・・・，$A_kP_{k+\frac{n-1}{2}}$，・・・，$A_nP_{n+\frac{n-1}{2}}$が全て 1 点で交わるならば，等式

$$\frac{A_1P_1}{P_1A_2}\cdot\frac{A_2P_2}{P_2A_3}\cdot\cdots\cdot\frac{A_{n-1}P_{n-1}}{P_{n-1}A_n}\cdot\frac{A_nP_n}{P_nA_1}=1$$

が成り立つ。

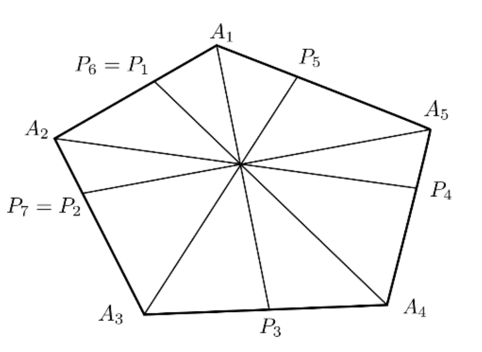


図 3 奇数角形におけるチェバの定理

この定理の証明は，三角形の場合と同様に面積比を用いる。ただし，この定理は奇数角形に限定されたものであり，かつその逆の主張は成り立たない。逆が成立しない例としては，一般の五角形において点P_1，P_2，⋯，P_5を各辺の中点とすればよい。

(2)　メネラウスの定理の拡張に関する先行研究

メネラウスの定理に関する先行研究として，次の n 角形におけるメネラウスの定理が見いだされた（例えば，Smarandache Florentin，1983；岩田，1983；早苗，online)。

定理 (n 角形におけるメネラウスの定理)

n を自然数とする。直線 L を n 角形A_1A_2 ・・・A_nのどの頂点も通らず，n 角形A_1A_2 ・・・A_nのどの辺とも平行でないものとする。直線 L と直線A_1A_2, A_2A_3，・・・，$A_{n-1}A_n$，A_nA_1の交点をそれぞれ P_1，P_2，・・・，P_nとする(図 4 参照)。このとき，等式

$$\frac{A_1P_1}{P_1A_2}\cdot\frac{A_2P_2}{P_2A_3}\cdot\cdots\cdot\frac{A_{n-1}P_{n-1}}{P_{n-1}A_n}\cdot\frac{A_nP_n}{P_nA_1}=1$$

が成り立つ。

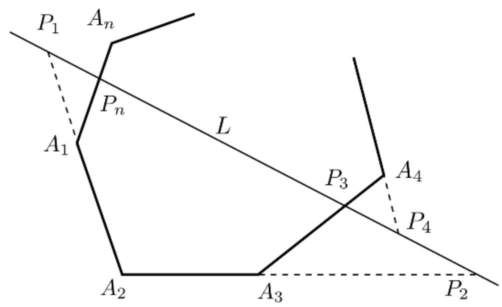


図 4 n 角形におけるメネラウスの定理

この定理の証明は，三角形の場合と同様に相似比を用いる。例えば，各頂点から L に垂線を引いてできる直角三角形の相似比を用いればよい。

3　四角形におけるチェバ，メネラウスの定理

チェバの定理，メネラウスの定理を n 角形の場合に拡張するために，まずは四角形の場合への拡張について考察する。準備として，用語を 1 つ定義する。

定義

点 A，B，C を相異なる 3 点とする。点 C が線分 AB の延長上にあるとは，線分 AC 上に点 B があるときをいう。

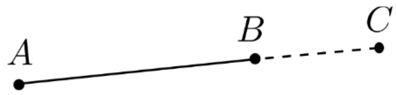


図 5 線分 AB の延長上にある点 C

(1)　四角形におけるチェバの定理

四角形におけるチェバの定理について考察する。四角形はその対角線の 1 本で切ることにより，2 つの三角形に分割される。そこで，四角形を分割してできる 2 つの三角形それぞれにおいてチェバの定理に現れる点や線分を与え，それらを組み合わせることで四角形におけるチェバの定理を導く。以下の定理では三角形 ABC と三角形 ACD を辺 AC で貼り合わせることで四角形 ABCD を構成している。

定理 (四角形におけるチェバの定理)

四角形 ABCD に対して，辺 AB 上に点 P，辺 BC 上に点 Q，辺 CD 上に点 R，辺 DA 上に点 S をそれぞれとる。線分 AQ と線分 CP の交点を M とし，線分 AC と直線 BM の交点を O とする(図 6 参照)。もし線分 AR と線分 CS，線分 DO が 1 点で交わるならば，等式

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DS}{SA}=1$$

が成り立つ。

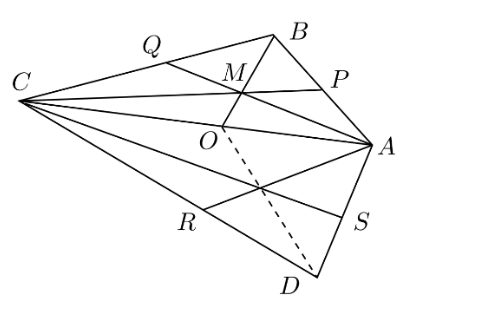


図 6 四角形におけるチェバの定理

<u>証明</u>

チェバの定理より，

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CO}{OA}=1,$$
$$\frac{AO}{OC}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DS}{SA}=1$$

が成り立つ．辺々掛け算して，

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DS}{SA}=1$$

を得る。(証明終了)

三角形におけるチェバの定理はその逆も成り立つ。四角形におけるチェバの定理においても，次に示す通り，逆の主張が成り立つ．

定理 (四角形におけるチェバの定理の逆)

四角形 ABCD に対して，辺 AB 上に点 P，辺 BC 上に点 Q，辺 CD 上に点 R，辺 DA 上に点 S をそれぞれとる。線分 AQ と線分 CP の交点を M とし，線分 AC と直線 BM の交点を O とする(図 6 参照)。もし等式

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DS}{SA}=1$$

が成り立つならば，直線分 AR と線分 CS，線分 DO は 1 点で交わる。

<u>証明</u>

直線 AR と線分 CS との交点を N とし，直線 DN と線分 AC との交点を O’とする。O = O’が成り立つことを示せばよい。チェバの定理より，

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CO}{OA}=1,$$
$$\frac{AO'}{O'C}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DS}{SA}=1$$

が成り立つ。辺々掛け算して，

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CO}{OA}\cdot\frac{AO'}{O'C}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DS}{SA}=1$$

を得る。また，仮定より

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DS}{SA}=1$$

であるから，

$$\frac{CO}{OA}\cdot\frac{AO'}{O'C}=1$$

が成り立つ。これを整理すれば，

$$AO:OC=AO':O'C$$

となる。これは O = O’であることを意味する。

(証明終了)

(2) 四角形におけるメネラウスの定理

四角形におけるメネラウスの定理について考察する。この場合にも，チェバの定理の場合と同様に 2 つの三角形を辺で貼り合わせて四角形を構成するという方法を用いる。メネラウスの定理には三角形のある一辺では外分点をとるという特徴がある。この特徴を残したまま四角形におけるメネラウスの定理を考える。そのために，四角形を分割してできる 2 つの三角形それぞれにおいてメネラウスの定理に現れる点や線分を与え，三角形の辺の貼り合わせを行う。以下の定理では三角形 ABC と三角形 ACD を辺 AC で貼り合わせることで四角形 ABCD を構成している。

定理 (四角形におけるメネラウスの定理)

四角形 ABCD に対して，辺 AB の延長上に点 P，辺 BC の延長上に点 R，また線分 BC 上に点 Q，線分 AD 上に点 S をそれぞれとる(図 7 参照)。直線 PQ と線分 AC との交点を O とする。もし 3 点 O，R，S が一直線上にあるならば，等式

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DS}{SA}=1$$

が成り立つ。

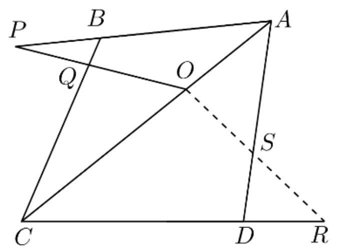


図 7 四角形におけるメネラウスの定理

証明

メネラウスの定理より，

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CO}{OA}=1,$$
$$\frac{AO}{OC}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DS}{SA}=1$$

が成り立つ．辺々掛け算して，

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DS}{SA}=1$$

を得る。(証明終了)

四角形におけるチェバの定理において，次に示す通り，逆の主張も成り立つ。

定理 (四角形におけるメネラウスの定理の逆)

四角形 ABCD に対して，辺 AB の延長上に点 P，辺 BC の延長上に点 R，また線分 BC 上に点 Q，線分 AD 上に点 S をそれぞれとる(図 7 参照)。直線 PQ と線分 AC との交点を O とする。もし等式

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DS}{SA}=1$$

が成り立つならば，3 点 O，R，S は一直線上にある。

証明

直線 RS と線分 AC との交点を O’とする。O = O’が成り立つことを示せばよい。メネラウスの定理より，

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CO}{OA}=1,$$
$$\frac{AO'}{O'C}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DS}{SA}=1$$

が成り立つ。辺々掛け算して，

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CO}{OA}\cdot\frac{AO'}{O'C}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DS}{SA}=1$$

を得る。また，仮定より

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DS}{SA}=1$$

であるから，

$$\frac{CO}{OA}\cdot\frac{AO'}{O'C}=1$$

が成り立つ。これを整理すれば，

$$AO:OC=AO':O'C$$

となる。これは O = O’であることを意味する。
(証明終了)

4　五角形におけるチェバ，メネラウスの定理

３で構成した四角形におけるチェバ，メネラウスの定理と，三角形におけるチェバ，メネラウスの定理を用いて，次に五角形におけるチェバ，メネラウスの定理について考察する。

(1)　五角形におけるチェバの定理

五角形におけるチェバの定理について考察する。五角形はその対角線の 1 本で切ることにより，三角形と四角形に分割される。そこで，三角形および四角形におけるチェバの定理に現れる点や線分を与え，それらを組み合わせることで五角形におけるチェバの定理を導く。以下の定理では，三角形 ABC と四角形 ACDE を辺 AC で貼り合わせることで五角形 ABCDE を構成している。

定理 (五角形におけるチェバの定理)

五角形 ABCDE に対して，辺 AB，BC，CD，DE，EA 上に点 P，Q，R，S，T をそれぞれとる。線分 AQ と線分 CP の交点を K，線分 AC と直線 BK の交点を M，線分 AR と線分 DM との交点を L，線分 AD と直線 CL の交点を N とする(図 8 参照)。もし線分 AS と線分 DT，線分 EN が 1 点で交わるならば，等式

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DS}{SE}\cdot\frac{ET}{TA}=1$$

が成り立つ。

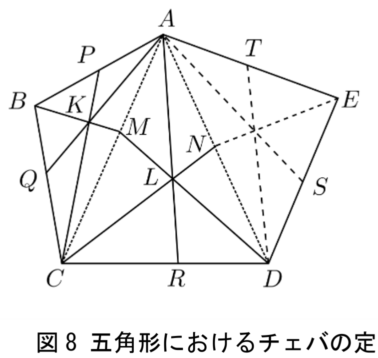


図 8 五角形におけるチェバの定理

証明

チェバの定理および四角形におけるチェバの定理より，

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CM}{MA}=1,$$
$$\frac{AM}{MC}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DS}{SE}\cdot\frac{ET}{TA}=1$$

が成り立つ。辺々掛け算して,

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DS}{SE}\cdot\frac{ET}{TA}=1$$

を得る。(証明終了)

五角形におけるチェバの定理においても，次に示す通り，逆の主張が成り立つ.

定理 (五角形におけるチェバの定理の逆)

五角形 ABCDE に対して，辺 AB，BC，CD，DE，EA 上に点 P，Q，R，S，T をそれぞれとる。線分 AQ 分線分 CP の交点を K，線分 AC と直線 BK の交点を M，線分 AR と線分 DM との交点を L，線分 AD と直線 CL の交点を N とする(図 8 参照)。もし等式

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DS}{SE}\cdot\frac{ET}{TA}=1$$

が成り立つならば，線分 AS と線分 DT，線分 EN は 1 点で交わる。

証明

線分 AS と線分 DT の交点を O とし，直線 EO と線分 AD の交点を N’とする。N = N’を示す。チェバの定理および四角形におけるチェバの定理より,

$$\frac{AN'}{N'D}\cdot\frac{DS}{SE}\cdot\frac{ET}{TA}=1,$$
$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DN}{NA}=1$$

が成り立つ。辺々掛け算して,

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DN}{NA}\cdot\frac{AN'}{N'D}\cdot\frac{DS}{SE}\cdot\frac{ET}{TA}=1$$

を得る。また，仮定より

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DS}{SE}\cdot\frac{ET}{TA}=1$$

であるから,

$$\frac{DN}{NA}\cdot\frac{AN'}{N'D}=1$$

が成り立つ。これを整理すれば,

$$AN:ND=AN':N'D$$

となる。これは N = N’であることを意味する。
(証明終了)

(2) 五角形におけるメネラウスの定理

五角形におけるメネラウスの定理について考察する。この場合も，三角形および四角形におけるチェバの定理に現れる点や線分を与え，それらを組み合わせることで定理を導く。以下の定理では三角形 ABC と四角形 ACDE を辺 AC で貼り合わせることで五角形 ABCDE を構成している。

定理 (五角形におけるメネラウスの定理)

五角形 ABCDE に対して，辺 AB，BC，CD，EA 上に点 P，Q，R，T をそれぞれとる。辺 DE の延長上に点 S をとり，直線 PQ と直線 AC の交点を M とする。(図 9 参照)。直線 MR 線分 AD の交点を O とする。もし 3 点 O，S，T が一直線上にあるならば，等式

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DS}{SE}\cdot\frac{ET}{TA}=1$$

が成り立つ。

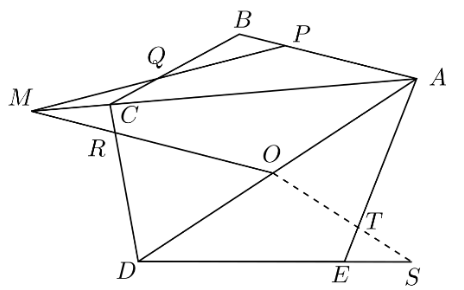


図 9 五角形におけるメネラウスの定理

証明

メネラウスの定理および四角形におけるメネラウスの定理より,

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CM}{MA}=1,$$
$$\frac{AM}{MC}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DS}{SE}\cdot\frac{ET}{TA}=1$$

が成り立つ．辺々掛け算して,

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DS}{SE}\cdot\frac{ET}{TA}=1$$

を得る。(証明終了)

五角形におけるメネラウスの定理において，次に示す通り，逆の主張も成り立つ.

定理 (五角形におけるメネラウスの定理の逆)

五角形 ABCDE に対して，辺 AB，BC，CD，EA 上に点 P，Q，R，T をそれぞれとる。辺 DE の延長上に点 S をとり，直線 PQ と直線 AC の交点を M とする。(図 9 参照)。直線 MR と線分 AD の交点を O とする。もし等式

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DS}{SE}\cdot\frac{ET}{TA}=1$$

が成り立つならば，3 点 O，S，T は一直線上にある。

証明

直線 ST と直線 AD の交点を O’とし，直線 O’R と直線 AC の交点を M’とする。もし M = M’ならば O = O’が示される。そこで M = M’が成り立つことを示す。チェバの定理および四角形におけるチェバの定理より，

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CM}{MA}=1,$$

$$\frac{AM'}{M'C}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DS}{SE}\cdot\frac{ET}{TA}=1$$

が成り立つ。辺々掛け算して，

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AM'}{M'C}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DS}{SE}\cdot\frac{ET}{TA}=1$$

を得る。また，仮定より

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DS}{SE}\cdot\frac{ET}{TA}=1$$

であるから，

$$\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AM'}{M'C}=1$$

が成り立つ。これを整理すれば，

$$AM:MC=AM':M'C$$

となる。これは M = M’であることを意味する。
(証明終了)

5　*n* 角形におけるチェバ，メネラウスの定理

三角形の場合から始まり，四角形，五角形の場合へとチェバ，メネラウスの定理を拡張した議論を繰り返すことで，*n* 角形におけるチェバ，メネラウスの定理が得られる。証明は，いずれも数学的帰納法により証明できるが，ここでは省略する。

(1)　*n* 角形におけるチェバの定理

n 角形におけるチェバの定理について考察する。記号を簡潔にするために，次の用語「チェバ点」を定義する。

定義(チェバ点)

三角形 ABC と辺 AB 上の点 P，辺 AC 上の点 Q に対し，辺 BC 上の点 R として，辺 AR と辺 BQ，辺 CP が 1 点で交わるとき，点 R を三角形 ABC と点 P，Q に対するチェバ点という。

注意

定義より三角形 ABC と辺 AB 上の点 P，辺 AC 上の点 Q に対し，点 R がチェバ点であることと，3 線分 AR，BQ，CP が 1 点で交わることは同値である。

上の注意よりチェバの定理，四角形，五角形におけるチェバの定理の主張にある「1 点で交わる」という条件は，チェバ点という用語で説明できる。

チェバ点という用語を用いると，次の通り，*n* 角形におけるチェバの定理が成立する。

定理 (*n* 角形におけるチェバの定理)

n を 3 以上の自然数とする。*n* 角形A_1A_2・・・A_nに対して，辺A_1A_2，A_2A_3，・・・，$A_{n-1}A_n$，A_nA_1上に点P_1，P_2，・・・，P_nをそれぞれとる。三角形$A_1A_2A_3$と点P_1，P_2に対するチェバ点をM_1とする。同様にして，三角形$A_1A_3A_4$と点P_3，M_1に対するチェバ点をM_2，三角形$A_1A_4A_5$と点P_4，M_2に対するチェバ点をM_3とし，以下繰り返して，点M_4，・・・，M_{n-3}を定義する。最後に，三角形$A_1A_{n-1}A_n$と点M_{n-3}，P_{n-1}に対するチェバ点をM_{n-2}とする(図 10 参照)。もし$M_{n-2}=P_n$ならば，等式

$$\frac{A_1P_1}{P_1A_2}\cdot\frac{A_2P_2}{P_2A_3}\cdot\cdots\cdot\frac{A_{n-1}P_{n-1}}{P_{n-1}A_n}\cdot\frac{A_nP_n}{P_nA_1}=1$$

が成り立つ。

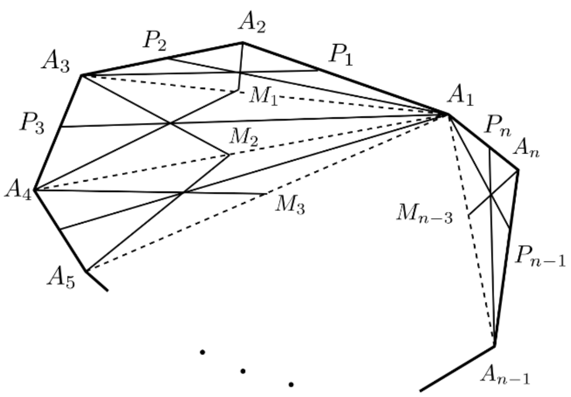


図 10　*n* 角形におけるチェバの定理

n 角形におけるチェバの定理の逆も，次の通り成り立つ。

定理 (*n* 角形におけるチェバの定理の逆)

n を 3 以上の自然数とする。*n* 角形A_1A_2・・・A_nに対して，辺A_1A_2，A_2A_3，・・・，$A_{n-1}A_n$，A_nA_1上に点P_1，P_2，・・・，P_nをそれぞれとる。三角形$A_1A_2A_3$と点P_1，P_2に対するチェバ点をM_1とする。同様にして，三角形$A_1A_3A_4$と点P_3，M_1に対

するチェバ点をM_2，三角形$A_1A_4A_5$と点P_4，M_2に対するチェバ点をM_3として，以下繰り返して，点M_4，・・・，M_{n-3}を定義する。最後に，三角形$A_1A_{n-1}A_n$と点M_{n-3}，P_{n-1}に対するチェバ点をM_{n-2}とする(図 10 参照)。もし等式

$$\frac{A_1P_1}{P_1A_2}\cdot\frac{A_2P_2}{P_2A_3}\cdot\cdots\cdot\frac{A_{n-1}P_{n-1}}{P_{n-1}A_n}\cdot\frac{A_nP_n}{P_nA_1}=1$$

が成り立つならば，$M_{n-2}=P_n$が成り立つ。

(2) *n* 角形におけるメネラウスの定理

n 角形におけるメネラウスの定理について考察する。「チェバ点」と同様にして，以下の用語「メネラウス点」を定義する。

定義(メネラウス点)

(1) 三角形 ABC と辺 AB 上の点 P，辺 AC 上の点 Q に対し，点 R が直線 PQ と直線 BC の交点であるとき，点 R を三角形 ABC と点 P，Q に対するメネラウス点という(図 11 参照)。

(2) 四角形 ABCD において，辺 AB の延長上に点 P，辺 BC 上に点 Q，辺 DA 上に点 R をとる。直線 PQ と線分 AC の交点を S とする。点 T が直線 CD と直線 RS の交点であるとき，点 T を四角形 ABCD と点 P，Q，R に対するメネラウス点という(図 12 参照)。

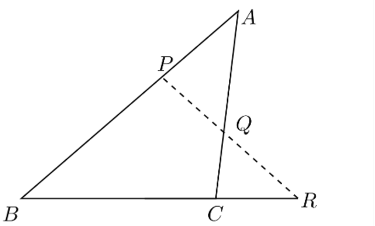


図 11 三角形 ABC と点 P，Q に対するメネラウス点 R

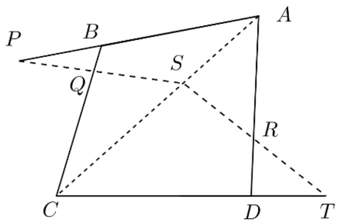


図 12 四角形 ABCD と点 P，Q，R に対するメネラウス点 T

注意

(1) 三角形 ABC と辺 AB 上の点 P，辺 A 上の点 Q に対し，メネラウス点が常に存在するとは限らない。実際，線分 PQ と辺 BC が平行であるとき，メネラウス点は存在しない。同様に四角形の場合においてもメネラウス点が常に存在するとは限らない。

(1) 三角形 ABC と辺 AB 上の点 P，辺 A 上の点 Q に対し，点 R がメネラウス点であることと，3 点 P，Q，R が一直線上にあることは同値である。

(3) 四角形 ABCD において，辺 AB の延長上に点 P，辺 BC 上に点 Q，辺 DA 上に点 R をとる。直線 PQ と線分 AC の交点を S とする。点 T が四角形 ABCD と点 P，Q，R に対するメネラウス点であることと，3 点 R，S，T が一直線上にあることは同値である。

上の注意(2)，(3)よりメネラウスの定理，四角形，五角形におけるメネラウスの定理の主張にある「一直線上にある」という条件は，メネラウス点という用語で説明できる。

「メネラウス点」という用語を用いると，次の通り，*n* 角形におけるメネラウスの定理が成立する。

定理 (*n* 角形におけるメネラウスの定理)

n を 3 以上の自然数とする。

(1) 自然数 *n* が奇数であるとする。*n* 角形A_1A_2・・・A_nに対して，辺$A_{\frac{n+1}{2}}A_{\frac{n+3}{2}}$または辺$A_{\frac{n+3}{2}}A_{\frac{n+1}{2}}$の延長上に点$P_{\frac{n+1}{2}}$をとる。辺$A_{\frac{n+1}{2}}A_{\frac{n+3}{2}}$以外の辺$A_1A_2$，$A_2A_3$，・・・，$A_{n-2}A_{n-1}$上に点$P_1$，$P_2$，・・・，$P_{\frac{n-1}{2}}$，$P_{\frac{n+3}{2}}$，・・・，$P_n$をそれぞれとる。三角形$A_1A_2A_n$と点$P_1$，$P_n$に対するメネラウス点が存在すると仮定し，それを$M_1$とする。同様にして，四角形$A_nA_2A_3A_{n-1}$と点$M_1$，$P_2$，$P_{n-1}$に対するメネラウス点が存在すると仮定し，それを$M_2$，四角形$A_{n-1}A_3A_4A_{n-2}$と点$M_2$，$P_3$，$P_{n-2}$に対するメネラウス点が存在すると仮定し，それを$M_3$として，以下繰り返して，点$M_4$，・・・，$M_{\frac{n-1}{2}}$が存在すると仮定する(図13参照)。もし，$P_{\frac{n+1}{2}}=M_{\frac{n-1}{2}}$ならば，等式

$$\frac{A_1P_1}{P_1A_2}\cdot\frac{A_2P_2}{P_2A_3}\cdot\cdots\cdot\frac{A_{n-1}P_{n-1}}{P_{n-1}A_n}\cdot\frac{A_nP_n}{P_nA_1}=1$$

が成り立つ。

(2) 自然数 *n* が偶数であるとする。*n* 角形A_1A_2・・・A_nに対して，辺A_1A_2の延長上に点P_1を，辺$A_{\frac{n}{2}+1}A_{\frac{n}{2}+2}$または辺$A_{\frac{n}{2}+2}A_{\frac{n}{2}+1}$の延長上に点$P_{\frac{n}{2}+1}$をとる。辺$A_1A_2$，辺$A_{\frac{n}{2}+1}A_{\frac{n}{2}+2}$以外の辺$A_2A_3$，・・・，$A_nA_1$上に点$P_2$，・・・，$P_{\frac{n}{2}}$，$P_{\frac{n}{2}+2}$，・・・，$P_n$をそれぞれとる。四角形$A_1A_2A_3A_n$と点$P_1$，$P_2$，$P_n$に対するメネラウ

ス点が存在すると仮定し，それをM_1とする。同様にして，四角形$A_nA_3A_4A_{n-1}$と点M_1，P_3，P_{n-1}に対するメネラウス点が存在すると仮定し，それをM_2，四角形$A_{n-1}A_4A_5A_{n-2}$と点M_2，P_4，P_{n-2}に対するメネラウス点が存在すると仮定し，それをM_3として，以下繰り返して，点M_4，・・・，$M_{\frac{n}{2}-1}$が存在すると仮定する(図 14 参照)。もし，$P_{\frac{n}{2}+1}=M_{\frac{n}{2}-1}$ならば，等式

$$\frac{A_1P_1}{P_1A_2}\cdot\frac{A_2P_2}{P_2A_3}\cdot\cdots\cdot\frac{A_{n-1}P_{n-1}}{P_{n-1}A_n}\cdot\frac{A_nP_n}{P_nA_1}=1$$

が成り立つ。

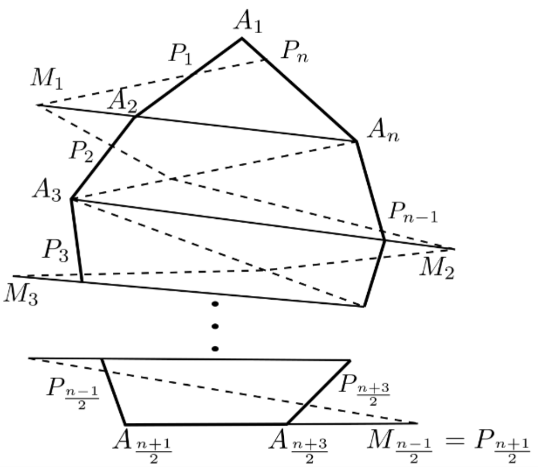


図 13 *n* が奇数のときの *n* 角形におけるメネラウスの定理

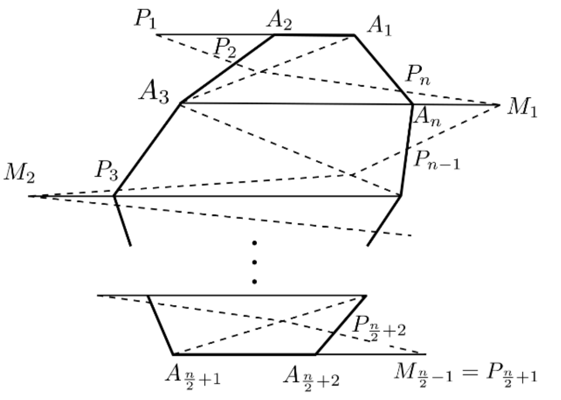


図 14　*n* が偶数のときの *n* 角形におけるメネラウスの定理

n 角形におけるメネラウスの定理の逆も，次に示す通り成り立つ。

定理 (*n* 角形におけるメネラウスの定理の逆)

n を 3 以上の自然数とする。

(1) 自然数 *n* が奇数であるとする。*n* 角形A_1A_2・・・A_nに対して，辺$A_{\frac{n+1}{2}}A_{\frac{n+3}{2}}$または辺$A_{\frac{n+3}{2}}A_{\frac{n+1}{2}}$の延長上に点$P_{\frac{n+1}{2}}$をとる。辺$A_{\frac{n+1}{2}}A_{\frac{n+3}{2}}$以外の辺$A_1A_2$，$A_2A_3$，・・・，$A_{n-2}A_{n-1}$上に点$P_1$，$P_2$，・・・，$P_{\frac{n-1}{2}}$，$P_{\frac{n+3}{2}}$，・・・，$P_n$をそれぞれとる。三角形$A_1A_2A_n$と点$P_1$，$P_n$に対するメネラウス点が存在すると仮定し，それを$M_1$とする。同様にして，四角形$A_nA_2A_3A_{n-1}$と点$M_1$，$P_2$，$P_{n-1}$に対するメネラウス点が存在すると仮定し，それを$M_2$，四角形$A_{n-1}A_3A_4A_{n-2}$と点$M_2$，$P_3$，$P_{n-2}$に対するメネラウス点が存在すると仮定し，それを$M_3$として，以下繰り返して，点$M_4$，・・・，$M_{\frac{n-1}{2}}$が存在すると仮定する(図 13 参照)。もし等式

$$\frac{A_1P_1}{P_1A_2}\cdot\frac{A_2P_2}{P_2A_3}\cdot\cdots\cdot\frac{A_{n-1}P_{n-1}}{P_{n-1}A_n}\cdot\frac{A_nP_n}{P_nA_1}=1$$

が成り立つならば，$P_{\frac{n+1}{2}}=M_{\frac{n-1}{2}}$が成り立つ。

(2) *n* が偶数であると仮定する。*n* 角形A_1A_2・・・A_nに対して，辺A_1A_2の延長上に点P_1を，辺$A_{\frac{n}{2}+1}A_{\frac{n}{2}+2}$または辺$A_{\frac{n}{2}+2}A_{\frac{n}{2}+1}$の延長上に点$P_{\frac{n}{2}+1}$をとる。辺$A_1A_2$，辺$A_{\frac{n}{2}+1}A_{\frac{n}{2}+2}$以外の辺$A_2A_3$，・・・，$A_nA_1$上に点$P_2$，・・・，$P_{\frac{n}{2}}$，$P_{\frac{n}{2}+2}$，・・・，$P_n$をそれぞれとる。四角形$A_1A_2A_3A_n$と点$P_1$，$P_2$，$P_n$に対するメネラウス点が存在すると仮定し，それを$M_1$とする。同様にして，四角形$A_nA_3A_4A_{n-1}$と点$M_1$，$P_3$，$P_{n-1}$に対するメネラウス点が存在すると仮定し，それを$M_2$，四角形$A_{n-1}A_4A_5A_{n-2}$と点$M_2$，$P_4$，$P_{n-2}$に対するメネラウス点が存在すると仮定し，それを$M_3$として，以下繰り返して，点$M_4$，・・・，$M_{\frac{n}{2}-1}$が存在すると仮定する(図 14 参照)。もし等式

$$\frac{A_1P_1}{P_1A_2}\cdot\frac{A_2P_2}{P_2A_3}\cdot\cdots\cdot\frac{A_{n-1}P_{n-1}}{P_{n-1}A_n}\cdot\frac{A_nP_n}{P_nA_1}=1$$

が成り立つならば，$P_{\frac{n}{2}+1}=M_{\frac{n}{2}-1}$が成り立つ。

6　本教材の特徴と教育的価値

(1)　本教材の特徴

２で述べたように，チェバの定理・メネラウスの定理を拡張した教材はすでにいくつか知られているが，本教材の特徴として，次の点を挙げることができる。

① チェバの定理は，偶数角形でも凹多角形でも成立し，定理の逆も成立する

２で述べたように，先行研究のチェバの定理の拡張は，奇数角形のみでしか成立しない。また，定理の逆も成立しない。これに比べて，本教材は，５で述べたように偶数角形でも凹多角形でも成立する。また，定理の逆も成立する。これらの点は，本教材の大きな特徴といえる。

② 三角形の場合の定理を使って，四角形，五角形，…の場合を証明している

先行研究は，いずれも拡張した定理を「三角形の場合の定理と同様な方法」（例えば，面積比，相似比など）で証明している。これに対して，本教材の場合は「三角形の場合の定理を使って」証明している点に特徴があるといえる。例えば，チェバの定理の場合，四角形の証明は，2 つの三角形に分割して，それぞれについてチェバの定理を用いている。五角形の証明は，三角形と四角形に分割して，それぞれについてチェバの定理を用いている。メネラウスの定理の場合も，まったく同様に，三角形と四角形のメネラウスの定理を用いて証明している。

③ *n* 角形の場合の定理を表現するのに「チェバ点」，「メネラウス点」という新たな概念を使っている

n 角形の場合のチェバの定理・メネラウスの定理を簡潔に表現するために，新たな用語として，「チェバ点」「メネラウス点」を定義した。このことは「数学の拡張に伴い新たな概念を生み出す」という数学の発展の歴史に通ずるものである。また，「チェバ点」「メネラウス点」という用語を用いた表現は，チェバの定理とメネラウスの定理を統合的に把握する上で有効であると同時に，１で述べた「算数・数学の学習過程のイメージ」における「数学化」にも通ずるものである。

(2) 本教材の教育的価値

開発した本教材の教育的価値として，以下の点を挙げることができる。

① 創造性の基礎を養う

平成 30 年告示の高等学校学習指導要領数学科の目標の 1 つとして「創造性を養う」が挙げられている（文部科学省，2018）。しかし，高校数学で扱われる問題のほとんどは，真であることがわかっている命題を証明したり，その命題を活用した問題を解いたりするというものである。それに対して，開発した本教材は，「新しい命題を発見する」というものであり，真であるかどうかわからない命題を自分で予想し証明する，という展開が可能である。同様な幾何教材として，「円に内接／外接する四角形の性質」の拡張（熊倉，2018），「三角形における接弦定理」の拡張（熊倉，2019）などが開発されているが，本教材は，「チェバの定理・メネラウスの定理」の拡張に関するものとして価値がある。「四角形や五角形にもチェバの定理・メネラウスの定理はあるだろうか？」と投げかけ，統合的・発展的に探究する数学的活動を通して，創造性の基礎を養うことが期待できるであろう。併せて，「未知のものを探究する」活動を通して学習意欲を喚起させることも期待できるであろう。

② 数学の拡張の深さを実感できる

三角形のチェバの定理は，図 2 に示した場合を拡張して， 2 点が外分点になる場合を複数の教科書で扱っている。同様に，三角形のメネラウスの定理についても， 3 点とも外分点になる場合を複数の教科書で扱っている。これらも，「内分点」→「外分点」という拡張であり，三角形の場合に限っても「統合・発展」という展開が可能である。

また，四角形の場合の定理の発見の過程において，本教材の特殊な場合として，例えば図 4 で B，O，D が一直線上にある場合や，図 5 で P，O，R が一直線上にある場合を発見する生徒もいるであろう。その場合は，発見した定理を価値づけた上で，より一般化した定理として，本教材を考えさせることが考えられる。

さらには，先行研究で開発されている教材も含めて，高校生に「チェバの定理・メネラウスの定理」の拡張を自由に探究させることにより，拡張の仕方は一通りではないことを知り，拡張の深さを実感することが期待できるであろう。

③ 数学の拡張の方法を理解する

①で述べたように，高校生が「新しい定理を発見する」経験はあまりないといえる。そのような高校生にとって，新しい定理を発見し証明する探究活動は，決して容易ではないであろう。そこで，大きな手がかりとなるのが，６(1)②で述べた特徴「三角形の場合の定理を使った証明」である。この特徴により，定理を発見する段階で「三角形に分割することで，三角形の場合の定理が使えないか」とヒントを出すことで，定理の発見が容易になることが期待できるであろう。

７ 今後の課題

今後の課題として，以下の点を挙げることができる。

(1) 本教材を用いた授業を高校生を対象に実践し，その有効性を検証する。

(2) 「統合・発展／体系化」に関する他の教材を開発する。

＜引用・参考文献＞

Alexander Brown(1925).An Extension of Ceva's Theorem to Polygons of Any Number of Sides. *Transactions of the Royal Society of South Africa*, Volume 13, pp.197-199.

Smarandache, Florentin(1983). Generalization of the Theorem of Menelaus Using a Self-Recurrent Method. *Preparation des élèves marocains pour l'olympiade internationale des mathématiques de Paris*.

岩田至康(1983).幾何学大辞典 4 証明問題(平面・空間),槙書店,p.5.

熊倉啓之(2018a).高等学校数学科の新学習指導要領における指導のポイント.中等教育資料 NO.988,学事出版,pp.14-17.

熊倉啓之(2018b).高等学校数科における探究活動を促す論証教材の開発.静岡大学教育実践総合センター紀要,No.28,pp.89-96.

熊倉啓之(2019).キーワードでみる学習指導要領改訂のポイント-数学的活動.吉田明史編著『平成 30 年度学習指導要領改訂のポイント高等学校 数学』,明治図書,印刷中.

文部科学省(2018).高等学校学習指導要領解説 数学編 理数編.27.

早苗雅史.数学のかたち-共線問題と共点問題-. http://izumi- math.jp/sanae/katati/menelaus/ menelaus.pdf. pp.72-76. (2019 年 1 月 9 日)