静岡大学教育学部附属教育実践総合センター紀要　No.13 p.9〜20 (2007)

〈論文〉

CASを活用した代数学習における内省を促す活動（I）

Reflective and Metalevel Activities in Algebraic Learning with CAS　（I）

両角達男*
Tatsuo MOROZUMI

1．洞察と新たな意味形成

小学２年で学ぶかけ算九九は，整数や有理数での四則計算を学ぶ上で大切な礎となっている。例えば，５＋５＋５＝５×３のように，同数累加を簡潔に表現したものとして加法から乗法が導入される場合がある。同数累加を簡潔に表現したものが乗法である，というとらえは，小学３年での同数累減を簡潔にしたものが除法であるという類推を生む。また，アレイ図をもとに学習場面での乗法の使われ方を知ることによって，乗法の意味が明確になる。さらに，アレイ図のもつ抽象性や一般性に支えられて，乗法に関わる計算法則を導くことができる。

小学２年の算数学習でつくり出されるかけ算九九表，それ自体も学習の対象となる。小学３年の早い段階で行われる，かけ算九九表を見直し，その中から規則性を発見し適用するという学習は，後々の数と計算領域の学習に大きな意味を持っている。

現行の小学２年の算数教科書では，２の段あるいは５の段をスタートとして，かけ算九九の学習が進められている。加法との関連を意識した学習場面の設定，アレイ図による抽象化などを経て，学習の上での「方法の対象化」が段階的になされている。小学２年の算数教科書では，５の段まで，９の段までが区分けされ，異なる章として展開されている。子どもたちのもつ「６の段」以上のかけ算，特に被乗数も乗数も６以上の数の場合のかけ算に対する難しさを緩和することが意図されている。

この「６の段」以上のかけ算，特に被乗数も乗数も６以上の数の場合のかけ算について，指を用いて計算する方法がある。図１は，親指から順次折り込んでいき，左手で７，右手で８をつくった状態である。

この状態で，７×８の答えが示されている。伸ばした指の数の和が５であり，７×８の十の位と一致している。一方，曲げた指の数の積は３×２＝６であり，７×８の一の位と一致している。この事実を，５や10をもとに数式で表現すると，次のようになる。

十の位：伸ばした指の数の和

$\{(7-5)+(8-5)\}\times 10$　・・・　①

一の位：曲げた指の数の積

$(10-7)\times(10-8)$　・・・　②

図１：指で７×８を行う

＊数学教育助教授

被乗数も乗数も6以上の数をそれぞれa，bとすると，2つの数式の和“①+②”は次のことを表していることに他ならない。

$\{(a-5)+(b-5)\}\times 10+(10-a)(10-b)=ab$

十の位については5を基準，一の位については10を基準として計算したのが“①+②”である。“①+②”であっても，指を用いて被乗数も乗数も6以上のかけ算を，指を用いて行う方法の妥当性が示される。しかし，“①+②”の計算過程をふりかえり，その計算過程に「洞察と新たな意味形成」を行うことにより，指を用いて行うかけ算九九の計算が一層，有意味なものとなる。

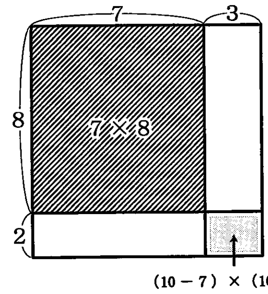


図2：1辺10の面積図で7×8を行う

図2のように，1辺10の面積図をもとにすると，7×8の計算は次のように意味づけられる。

$7\times 8=10\times 10-3\times 10-2\times 10+3\times 2$

$\quad=10\times 10-(10-7)\times 10-(10-8)\times 10+(10-7)\times(10-8)$

10×10の面積から，7×8に向かい，その外側を次々に減じていくと引きすぎてしまう箇所がある･･･その部分が前頁の②という意味である。この見方を一般化させると，前頁において，十の位と一の位が別々に計算されていたものが次のように統合される。

$a\times b=10\times 10-(10-a)\times 10+(10-b)\times 10+(10-a)\times(10-b)$

$\quad=\{10-(10-a)-(10-a)\}\times 10+(10-a)(10-b)$

$\quad=\{(a-5)+(b-5)\}\times 10+(10-a)(10-b)$

さらに，次の式のように変形すると，7＋8＝15のように，「被乗数と乗数の和の一の位」が7×8の十の位を生成することがみえる。

$a\times b=\{(a+b)-10\}\times 10+(10-a)(10-b)$

被乗数も乗数も6以上の数の場合のかけ算について，指を使ったかけ算九九の計算方法を知っていれば，7×8や9×6などの計算の結果を導くことができる。5以下のかけ算九九や被乗数と乗数の和などから，計算の結果を導くことができる。この事実は，6の段以上のかけ算九九に対して，子どもたちがもつ困難性を緩衝する役目をもつ。一方，指を使った計算方法のからくりは，中学3年での多項式どうしの積や展開公式に至る奥深さもある。

5以下のかけ算九九や被乗数と乗数の和（1回繰り上がりの1位数どうしの加法）という，今まで学んだことをもとにして，指を使ったかけ算九九の計算方法の意味（これから学ぶこと）に迫る「洞察」ができる。また，指を使ったかけ算九九の計算方法のからくりに迫る中では，10×10の面積図をもとにして7×8の計算を考え，式変形していく中で，5と10をそれぞれ基準としてからくりを考えていた方法を価値づけていくことができる。新たに生み出したことや学ぼうとしていることがらの中に，今まで学んだことを価値づけ，今までに対して「新たな意味形成」を図ることができる。

また，10×10の面積図をもとにして7×8の計算過程の意味を解釈すること（ふりかえる）は，100に近い2数の積を素早く求める方法の洞察にも活きる。例えば，97×92の場合，答えの上2桁の数は右のように3通りの方法で求めることがで

$$\begin{array}{rcl}
 & & \text{100との差} \\
97 & \cdots & 3 \\
\times 92 & \cdots & 8 \\
\hline
89\ 24 & & \\
\uparrow\quad\uparrow & & \\
100-(3+8)\quad 3\times 8 & & \\
97-8 \text{ or } 92-3\quad (100-97)\times(100-92) & & \\
97+92-100 & &
\end{array}$$

きる。実際，100に近い２数と，100との差をそれぞれｓ，ｔとおくと，次のように式変形を行うことができる。

$$
\begin{aligned}
(100-s)(100-t) &= 100^2-100s-100t+st \\
&= 100\{100-(s+t)\}+st \\
&= 100\{(100-s)-t\}+st \quad \text{or} \quad \{(100-t)-s\}+st \\
&= 100\{(100-s)+(100-t)-100\}+st
\end{aligned}
$$

10×10の面積図をもとにして７×８の計算過程の意味を解釈する上では，10と２数との差が重要な役目を果たしている。100に近い２数の積においても，100と２数との差が重要な役目を果たすだろうと洞察することが，上記の簡便な計算方法を生む。また，10でくくった部分について，式の形に着目してさらにカッコでくくることも，100でくくった場合にはという洞察を生む。一方，上記の式変形のように，同値な式を列記しふりかえることにより，それぞれの計算方法の特性を改めて知ったり，その関連を意識できる（新たな意味形成）。

この「洞察と新たな意味形成」の双方を行う上で，大変重要な役割を果たすのが，内省を促す活動である。深く，冷静に自分自身の学習過程や思考過程をふりかえることにより，代数学習を進める上で「洞察と新たな意味形成」が行われる。

Kieran (2006) は，過去30年間のPMEにて発表された代数関係の研究を反省的にふりかえりながら，これからの代数研究の１つの柱として「意味形成」に焦点をあてている。その意味形成について，Radford (2004) の掲げた枠組みをふまえながら次の３点があると指摘する。

「1．数学の中からの意味
　1 (a)　文字記号で表された形式を含む，代数的な構造そのものからの意味
　1 (b)　様々な表現からの意味
2．問題場面の文脈からの意味
3．数学／問題の文脈の外にあるものから生まれる意味
　（例．言語を用いた活動，ジェスチャーや体での表現，メタファー，生活経験，
　イメージの形成など）」(Kieran, 2006, p.32)

Kieranは，３つの意味形成の枠組みの中に最近の研究動向を分類させながらも，意味形成のために内省の活動が重要な役目を果たすことを述べている。

本稿では，CASを活用した代数学習における内省を促す活動を明らかにするため，次の２つの考察を行うことを研究の目的とする。

１つ目は，CASの活用により内省を促す活動が活性化されると考えられる，洞察と新たな意味形成を促す例を挙げることである。

２つ目は，「紙と鉛筆」と「CASの活用」の併用による代数学習の質的深化について，プロジェクト研究を行っているKieran，Drijversらの研究から知見を得ることである。なお，Kieran，Drijversらの共同研究は継続中であるため，さらなる考察については「CASを活用した代数学習における内省を促す活動（Ⅱ)」として論じる。

2．CASの活用による，洞察と新たな意味形成を促す代数的活動

CASの活用により内省を促す活動が活性化されると考えられる，洞察と新たな意味形成を促す代数的活動の例を４つ挙げる。なお，代数的活動とは，代数的な考えを学習者が身につけ，その代数的な考えを問題解決に活かしていく活動を指す。Kieran (2003,2004) は，代数的活動とし

て「生成の活動，変形の活動，グローバルな内省の活動」の３つのタイプがあると述べる。Kieranの掲げるグローバルな内省の活動（global-meta level activity）が具体的に何を表し，その活動が「洞察と新たな意味形成」にどのように活きるかに実証的に迫ることが今後必要となる。

１つ目の例は，１次方程式２ｘ＋５＝６ｘ－５をCASを用いて解くことであり，CASで解いた過程をふりかえる学習活動である。図３の操作では，等式の両辺から同じ数をひく，等式の両辺から同じ単項式をひくなど，カッコを用いて，等式の性質を強く意識できる。

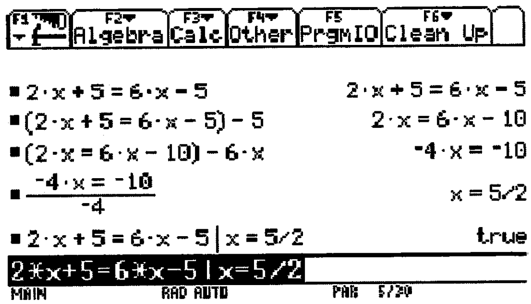


図３：CASを用いて１次方程式を解く

とりわけ，等式の両辺に同じ操作を施すという変形の活動の意味を，同値性を意識してとらえ直すことができる。また，紙と鉛筆での１次方程式を解く場合での表記の違い

２ｘ＋５－５＝６ｘ－５－５

（２ｘ＋５＝６ｘ－５）－５

からも，改めて等式の性質を使って方程式を解くことが強く意識できる。

実際の学習指導では，「紙と鉛筆」による方法で１次方程式を解くことの意味や方法に迫り，その後，CASを用いて１次方程式を解く活動を行い，その過程をふりかえることが考えられる。CASを用いて１次方程式を解く場合には，２ｘ＋５＝６ｘ－５｜ｘ＝5/2 のように，１次方程式を満たす値の集合を意識させることもできる。

２つ目の例は，連立方程式をCASを用いて解くことであり，CASで解いた過程をふりかえる学習活動である。図３のように，CASを用いて１次方程式を解き，その過程をふりかえることから，等式の両辺に同じ操作を施すことの意味形成が図られる。さらに，等式の両辺から同じ数をひくことから，同じ文字式をひいても同値性が保たれるという経験が積み重ねられる。

$$\mathrm{A}=\mathrm{B} \;\rightarrow\; \mathrm{A}-\mathrm{C}=\mathrm{B}-\mathrm{C}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{rl} & \mathrm{A}=\mathrm{B} \\ -) & \mathrm{C}=\mathrm{D} \\ \hline & \mathrm{A}-\mathrm{C}=\mathrm{B}-\mathrm{D} \end{array}$$

［等式の性質の拡がりを実感する］

これは，連立方程式の学習の際に，学習者にとって理解しにくい，等式の左辺および右辺から同じ値をとる式をそれぞれひいても同値性は保たれるという経験の素地を積み重ねることにあたる。

連立方程式 $\begin{cases} 2x+4y=272 \\ x+y=100 \end{cases}$

を加減法を用いて解くことは，図４のようにCASで行われる。加減法を用いて，連立２元１次方程式を解いたものである。

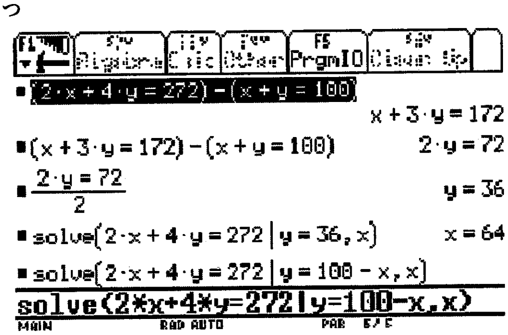


図４：CASを用いて連立方程式を解く

始めの2行は，次のように入力しても同じ結果を得る。

(2 x＋4 y＝272)－2＊(x＋y＝100)

また，始めの1行は，次のように入力すると，異なる式が結果として生じる。

(2 x＋4 y＝272) － (100＝x＋y)

→ 2 x＋4 y－100＝－x－y＋272

等式の両辺から同値な文字式をひくとき，どのような順序でひけばよいか，という思考が要求される。左辺どうし，右辺どうしをペアにするという意識が高められる。

CASを用いて1次方程式2 x＋5＝6 x－5を解く場合，(2 x＝6 x－10) －6 xという操作（CASでの表記）がある。この表記は，等式を□とみれば□－6 xという式の形を表している。□－6 xの表記は，(8 x＋5) －6 xなどのフレーズ型の式変形を想起させる。

見方を変えれば，フレーズ型の文字式□－6 xから，□の部分を等式に拡張したものが1次方程式を解く場合，ととれる。一方，等式の性質を強く意識しながら，CASを用いて1次方程式を解くことを繰り返し，その過程をふりかえることを通して，連立方程式の加減法を支える性質（A＝B，C＝D→A±C＝B±D）を洞察させる。□－6 xという式の形を，□－○ととらえ，○自体を等式に拡張していくことができる。□－○と式全体をみて何から何をひくのか，どのような表面構造をもつ式なのかを意識することにより，既習の内容とのつながりや違いを考えることができる。加減法によって連立方程式を解く過程をふり返ることの中に，改めて1次方程式を「等式の両辺に同じ操作を施す」ことによって解く意味を，比較対照させながら生成できる。

3つ目の例は，CASを用いて，文字式の展開公式の意味を量感を伴ったものとして生成したり，文字式の中のパラメータの意味理解を深める学習を行うことである。(Drijvers, 2003)

図5は，(x＋b・y)^{2}を展開した式を次々に表示したものである。bの値を規則的に変化させることにより，展開した式のx yの係数がbの2倍，y^{2}の係数がbの2乗であることが，量感を伴った形で実感できる。

Drijvers (2003) は，中等教育段階でのパラメータの意味を深める学習として，第1段階（プレースホルダー）と第2段階（一般化，変量，未知）から成る学習の相を提示する。図6は，パラメータの理解の様相を表す理解の様相の一例である。DrijversはCASを活用した代数学習に関する3つの教授実験を行い，それぞれの教授実験でみられた学習者の理解の様相を図

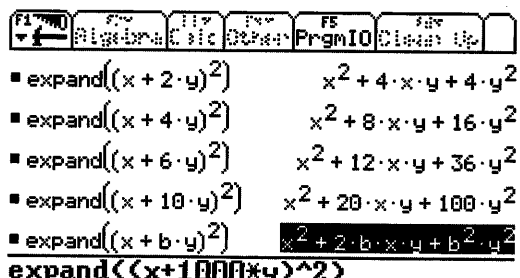


図5：展開公式のパラメータの感覚を高める

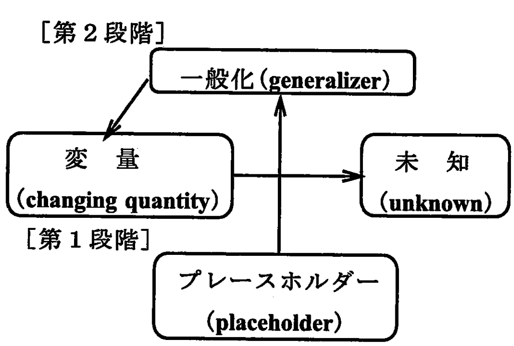


図6：Drijversによるパラメータの理解の様相
(図5の展開公式に関わる教授実験の場合)

示している。図5の例を扱った教授実験での理解の様相が，図6である。この他の教授実験では，図の矢印やその向きにやや違いが出てくる。

なお，Drijversによる教授実験では，パラメータの4つの役割「プレースホルダー，一般化，変量，未知」に対し，その代数的な意味，グラフでイメージを高めること，学習者の活動と内面的な側面の想定，学習者のパラメータ理解の様相の深化におけるCASの役割の特定などが徐々に行われている。

4つ目の例は，Lagrange (2003) による，CASを用いて式を因数分解する例である。

文字式をCASで因数分解する例は，次の図7の通りである。(Lagrange, 2003)

1－（1－x）（3＋2x）－x…　ア

1－x－（1－x）（3＋2x）…　イ

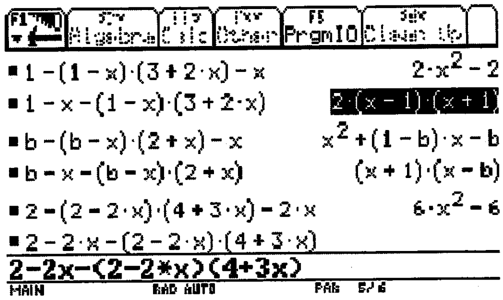


図7：CASでの表示の違いから，共通因数の意味を改めて知る

アとイの2つの文字式は，項の順序を入れ替えただけの，同値な文字式である。しかし，CASでの表示は1－xを共通因数とみるかどうかで，2通りの式が表示される。

アの式では，$2x^2-2$のように，可約な形で表示される。

一方，イの式では，2（x－1）（x＋1）のように既約な形で表示される。

CASによる，この2通りの式表示の比較から「アとイの式は同じなのだろうか」，「アとイは項の配列が異なるだけで，同じ（同値）式なのに，なぜ表示が異なるのだろうか」，「共通因数とは何だろうか」といった問いが発生する。この問いが，共通因数や因数分解に関わる内省を促すと共に，因数分解の意味に改めて迫る役割を果たす。

CASによる式表示を観察すると，式$1-x-(1-x)\underline{\underline{(3+2x)}}$での，3＋2xの文字係数や定数の関係により，和と差の積に因数分解される式が生まれることがわかる。

実際，式イを　$1-x-(1-x)\underline{\underline{(2+x)}}$と変えてCASに入力すると，（x＋1）（x－1）を得る。定数と文字係数の差が1の場合，和と差の積に因数分解された式が表示される。図7では，パラメータbを用いると，式アのタイプから$x^2+(1-b)x+b^2$，式イのタイプからは（x＋1）（x－b）の式が得られることを記している。この式をもとに，$2x^2-2$と式変形できる場合は3＋2xが含まれるとき，$3x^2-3$と式変形できる場合は4＋3xが含まれるとき，$4x^2-4$と式変形できる場合は5＋4xが含まれるときといった，文字係数と定数との間の関係を洞察できる。図7の例は，CASでの式表示が，式の表面構造に沿った形で簡略化されるという特性を逆手にとった扱いである。

5つ目の例は，Lagrange (2005) による Q［$\sqrt{2}$］の要素 $a+b\sqrt{2}$ の形の2数の商を簡単に表す例（有理化を施す例）である。

$a+b\sqrt{2}$ の形の2数の商は，CASを用いると図8のように表示される。

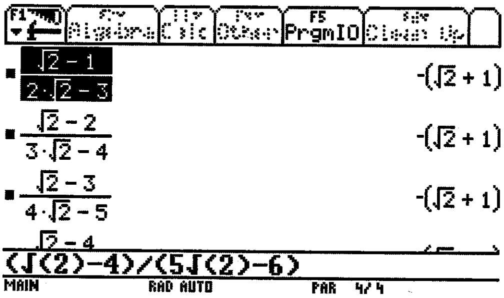


図8：$a+b\sqrt{2}$ の形の2数の商を求める

図8の2数の商分数は，いずれも次の関係を満たすものである。

$$\frac{\sqrt{2}-a}{(a+1)\sqrt{2}-(a+2)}$$

$\sqrt{2}$ にかかる部分と整数部分とが，特殊な関係にありいずれの商分数も $-1-\sqrt{2}$ の形に簡約化できる。

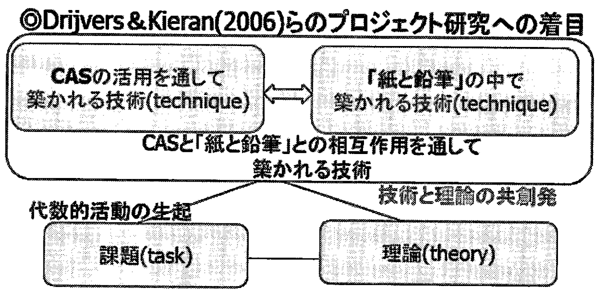
このことは「紙と鉛筆」による分母の有理化を経て，きれいに分母分子が約分できることが実感できる。CASによる式表示，その規則性に驚きや感動を覚えながら，紙と鉛筆によってきれいに簡約化されていくことが実感できる。さらに，図8の関係を満たす商分数がいずれも $-1-\sqrt{2}$ になることを観察しながら，$a+b\sqrt{2}$（Q［$\sqrt{2}$］の元）の形の2数の商が，再び $a+b\sqrt{2}$ の形になることが洞察できる。すなわち，Q［$\sqrt{2}$］が閉じていることを，いくつかの例を通して感じることができる。

さらに，Q［$\sqrt{2}$］の場合をふまえ，CASを用いてQ［$\sqrt{3}$］やQ［$\sqrt{4}$］の場合を試すことができる。$\sqrt{\ }$ にかかる部分と整数部分との関係を変えた場合との比較を通し，Q［$\sqrt{2}$］に関する新たな意味づけを図ることができる。

3．「紙と鉛筆」と「CASの活用」の併用による代数学習の質的深化
－Kieran,Drijversらによるプロジェクト研究に着目して－

Drijvers&Kieran (2006) らは，Chevallardの教授学の考え，Lagrangeによるを活用した学習理論に基づきながら，「課題（Task）－理論（Theory）－技術（Technique)」によるTTT理論を掲げている。

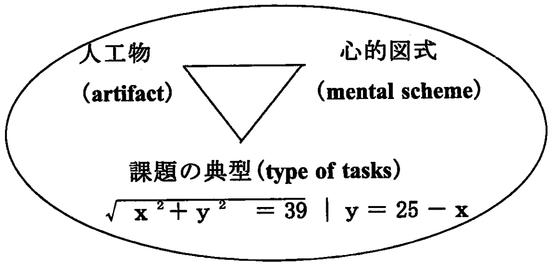
例えば，前頁の4つ目の例では，同値な2つの式でありながら1と$-x$の項の位置の違いにより，一見すると異なる式が表示されていた。同値な2つの式に対するCASでの表示の違いが，改めて2つの式が同値であるとは何かの意味にたちかえらせている。CASの使い手である学習者にとって，人工物であったCASおよびCASでの表示が，その学習者にとって内省を促すきっかけとなっている。



Drijvers (2003) は，ユーザーにとって人工物が，そのユーザーにとっての道具に変容する過程を「道具の発生」(Instrumental Genesis) ととらえ，その過程を重視している。なお，「道具の発生」という用語における道具は，Vygotskyの理論をふまえた使い方になっている。

また，技術（Technique）について，「対象の理解を深め，学習者がこれまでに培ってきた概念をふりかえる認識的な役割をもつもの」というChevallardの教授学の考えを踏襲し，問題解決などを行う上で必要な技術という意味よりも，広い意味を与えている。
手続きと概念，手続き的知識と宣言的知識との関係を，学習課題（Task）との関係のもとに，より包括的にとらえたものが技術（Technique）と理論（Theory）との関係である。

なお，TTT 理論における理論（Theory）はDrijvers(2003)が述べていた心的図式(mental shema)に該当するものである。



(Drijvers, 2003)

Drijvers & Kieran (2006) らは，「CASの活用」を通して築かれる技術と「紙と鉛筆」の中で築かれる技術との相互作用に着目する。「CASの活用」と「紙と鉛筆」との相互作用を意図的に，積極的に行うことにより，学習者の中で技術が築かれていくと考える。さらに，「CASの活用」と「紙と鉛筆」との相互作用を繰り返すことにより，学習者の中で技術と理論の共創発が行われるとみる。学習課題との出逢いを通して，代数的活動が生起され，代数的活動の中で学習者の中に技術と理論の共創発が行われていく。この技術と理論の共創発の様相について，Drijvers&Kieran (2006) らは中等教育段階の学習者を対象に，解明しようとしている。ここでは，そのプロジェクト研究の一端を先行研究としてレビューしていくことにする。

Drijvers&Kieran (2006) は，紙と鉛筆による方法とCASによる方法を併用しながら x^n-1 の形の文字式を因数分解し，一般の場合を洞察する高校1年生の特徴的な学習活動を考察している。x^n-1 の式を因数分解すると，図９のように，円分多項式が因数として導かれる。

授業ではまず，x^2-1 から x^4-1 までの因数分解を「紙と鉛筆」で行うことが促される。「紙と鉛筆」での因数分解の後に，CASを活用した因数分解を行い，紙と鉛筆による方法とCASを活用した方法とを比較することが行われる。

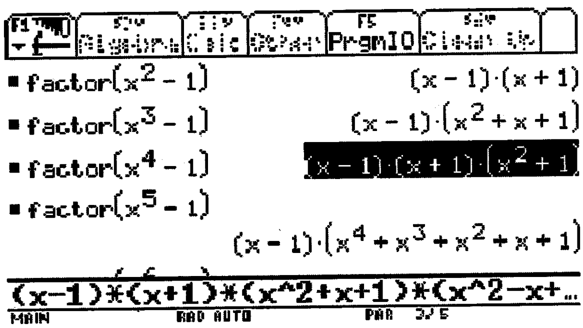


図９：x^2-1 から x^5-1 までの因数分解

２つの方法の比較しながら，学習者が自分自身の思考過程をふりかえるために，ワークシートには「紙と鉛筆による方法」「CASを用いた方法」「必要があれば，２つの結果を一致させてみよう」という３つの列で構成された表が与えられている。

「必要があれば，２つの結果を一致させてみよう」の欄を学習者が埋める記述活動が，紙と鉛筆，CAS双方による因数分解の結果を比較し，関連づける役割を果たしている。

実際，x^4-1 の因数分解では，次の３通りの学習者の動きがみられたという。

ア．CASにより表示された式の一部を部分的に展開し紙と鉛筆によって$(x-1)(x^3+x^2+x+1)$の式の形になることを確認する。(図10)

イ．CASにより表示された式をみて，紙と鉛筆によるx^3+x^2+x+1の式の項を分類しさらに因数分解してCASによる方法と一致することを確認する。(図11)

ウ．2つの式の違いから，x^4-1をそれまでの式表現とは異なる$(x^2-1)(x^2+1)$と紙と鉛筆による方法で因数分解し，CASで表示された式に接近させていく。

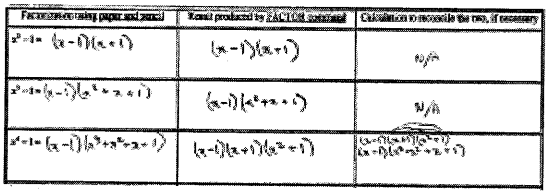


図10：CASで表示された式の一部を展開する

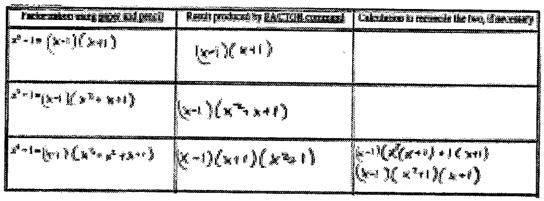


図11：紙と鉛筆で求めた式の一部を因数分解する
(図10, 図11とも，Drijvers&Kieran (2006) より引用)

上記アに該当する学習者が全体の半分ほど，イに該当する学習者が全体の半分より少なく，ウは数名であったという。x^2-1，x^3-1が因数分解された式の形をふまえ，紙と鉛筆による方法では，類推により$x^4-1=(x-1)(x^3+x^2+x+1)$とみる学習者がかなり多かったといえる。

アプローチの仕方は異なるが，ア～ウそれぞれ，紙と鉛筆による方法とCASの活用による方法とを積極的に関連づけようとする姿勢がみられる。紙と鉛筆による方法で類推してきた結果とCASによる式表示との違いが，「本当」「おや？」「なぜ？」の問いをきっかけにした内省の活動を促している。紙と鉛筆による方法とCASの活用した場合との比較を行うことが，Kieran (2003,2004) の指摘するグローバルな内省の活動を生んでいる。

続いて，x^n-1の指数nを大きくした場合，因数分解された式がどのような形になるかの探究が行われる。この探究は，CASの活用と紙と鉛筆による方法の双方を関連づけながら，行われていく。指数nが大きな数になっていく場合には，ある数までいったんCASで操作を行い，CASでの式表示をもとにさらなる一般化を紙と鉛筆で予想することが行われる。

例えば，CASによって，x^7-1 ($n=7$) まで因数分解された式をみて，「nが偶数のときには2つ以上の因数に，nが奇数のときには2つの因数に分解できる」という予想を立てた生徒がかなりいたという。

実際に，nが7以上の場合のx^n-1について，CASを用いて因数分解を行うと図12のようになる。

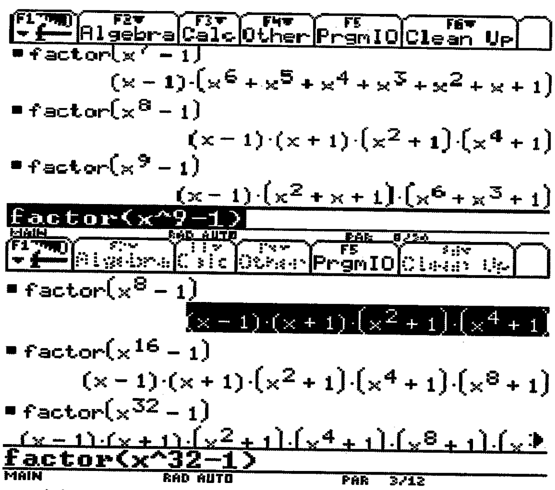


図12：x^7-1からx^9-1までの因数分解
$x^{16}-1$など，2の累乗の場合の因数分解

図12の上側はnが7～9，下側はnが

２の累乗の場合である。

「ｎが偶数のときには２つ以上の因数に，ｎが奇数のときには２つの因数に分解できる」という予想は，ｎが９のときから変わることになる。CASでの式表示に基づく予想に対して，「本当にそのようにいえるのか」という教師からのふりかえりを促す問いかけが発せられ，さらにCASでの式表示を踏まえた学習者どうしの話し合いが促された。その結果，授業の流れでは，x^9-1の場合，３つの因数で分解されることが確認される。

x^9-1を因数分解した式に関する議論では，CASでの式表示から紙と鉛筆による方法への接近も行われる。

CASで表示された，$x^9-1=(x-1)(x^2+x+1)(x^6+x^3+1)$の式について，２つの因数の積$(x^2+x+1)(x^6+x^3+1)$が，$x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$となることが議論され，CASを通して確認される。ｎが奇数のときには２つの因数に分解できるという予想に関連づけると共に，$x-1$以外の因数の中に，さらに因数分解ができるものがあるという，$x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$などの式への新たな意味形成が図られる。

Sacristan＆Kieran（2006）は，同じ授業実践に対して，Bryanという学習者の動きを忠実に追うことから分析を行っている。特に，Bryanと教師とのやりとりを通して，代数学習のもつ次のことがらを明らかにしている。

「代数の教授における主要な問題は，コミュニケーションの問題である。記号とその数学的な意味の関係は，多くの生徒にとって混乱を来すものである。それは，生徒が記号には単に形式的な，その形式には手続き的な特徴しか付いていないととらえるためである。しかし，教師は同じ用語について，教師と生徒とが異なる意味で用いているのにかかわらず，同じ場面で表現しようとしている。」

(Arzarello（1998）;Sacristan＆Kieran（2006））

x^n-1の因数分解に関する学習で，Bryanと教師との意味のずれの１例として，省略記号の取り扱いがある。例えば，教師は$x^{15}+x^{14}+x^{13}+\cdot\cdot\cdot+x^2+x+1$の式について，「・・・」は$x^{12}$から$x^3$までの和ととらえている。ところが，Bryanは「・・・」が何を表すのかわかっていない。数学教科書において「・・・」が省略記号を表す，と明記されていないこともBryanのような見方が生じる要因であるという。

実際，「$(x-1)(x^{15}+x^{14}+x^{13}+\cdot\cdot\cdot+x^2+x+1)$を展開すると，その結果として$x^{16}-1$ができる理由を説明しなさい」という教師からの問いかけに対して，Bryanは「次のことがわかりません」と「・・・」をさして教師に質問をしていたという。しかし，教師はBryanの抱く，省略記号の意味形成に関する困難性を意識することなく，次のように返答したという。

「私たちが先ほどみてきたり，実際に行ったように，中間の項が次々に消されていく。
それゆえ，$x-1$の「－」は，最初から最後の項まで次々に項を取り去っていく。
だから，最後に$x^{16}-1$が残る。」

Bryanは，$x^{16}-1$に関する教師とのやりとりを経て，「中間の項がすべて消されていく」ということばを強調するようになったという。教師は，$(x-1)(x^{15}+\cdot\cdot\cdot+x+1)$を展開することにより，$\cancel{x^{15}}-\cancel{x^{15}}$のように中間の項がすべて消されていくととらえている。しかし，ここでのBryanは，$x^{15}+x^{14}+x^{13}+\cdot\cdot\cdot+x^2+x+1$の式の「・・・」はすべてな

いもの，中間の項がすべて消された状態の$x^{15}+x^{14}+x^{13}+x^{2}+x+1$ととらえているのである。

Bryanが省略記号「・・・」に対して正しい意味形成を図ることがなされないまま，授業では$x^{n}-1$の一般の場合での因数分解に関わる議論が始まる。教師は，ホワイトボードに$(x^{n}-1)=(x-1)(x^{n}-1+x^{n}-2+\cdots+x+1)$と書く。しかし，Bryanを含む数名の学生から，なぜこの式が成り立つのか，そもそもnや，「・・・」が何を意味するのかという質問が矢継ぎ早に出てたという。

例えば，省略記号「・・・」について，Bryanと教師の間で次のやりとりがなされている。しかし，Bryanの質問に対して，教師が答えているものがかみあっていない状態である。

Bryan：このドット（点）は何ですか？
教師：同じように計算を続けるとすると，すべてきれいになる。我々がみてきたものについてはきれいになっていたよね。
Bryan：わからない，このドット・ドット・ドットの部分がなぜ，何を指すのか？
教師：先ほど行った$x^{135}-1$のときと同じ方法で行うと，中間の項がすべて消去されていくことがわかるよね。
Bryan：このドットは何ですか。もし中間の項がないとしたら，例えば$x^{n-1}+1$であっても同じことがいえるのですか。もし，最初のカッコのところが$x-1$のようだったとしても，2つ目のカッコのところが，中間項がなくて，ちょうど$x^{n-1}+1$のようだったらどうなるのですか。
[教師は，Bryanが言うように，$(x-1)(x^{n-1}+1)$と書きとめ，
$(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)$の式とは違うという。
しかし，Bryanは満足しない。]

Drijvers&Kieran (2006)，Sacristan&Kieran (2006) の研究成果より，CASを活用した代数学習における内省を促す活動として，次の3点が挙げられる。

①紙と鉛筆，CASの活用双方による方法を比較し，関連づけるための内省的な記述活動および紙と鉛筆，CASの活用双方の方法の比較検討を深める，他者との議論の場
②当初の予想や推測を打ち破る例と出逢うこと，その例をきっかけにした探究
③他者の学習活動を顕在化し，他者を通して自分の思考過程を鑑みる議論の場

4．今後の課題

CASを活用した代数学習における内省を促す活動について，上記の①～③を一層焦点化して議論を深める必要がある。そこで，次の2点を今後の課題とする。

・Kieran，Drijversを中心としたプロジェクト研究の成果と課題について，本稿に続く第二報として論じる。
・CASを活用した代数学習について，Drijvers&Kieran (2006) が焦点をあてた$x^{n}-1$の因数分解に関わる授業実践を行い，我が国（静岡県内）の場合の特徴を論じる。

【附記】本稿は，日本数学教育学会第39回数学教育論文発表会論文集所収論文「学習の質的深化を促す代数的活動に関する研究」(2006) を大幅に加筆・修正したものである。
なお，本研究は，平成18年度科学教育研究費補助金「基盤研究 (C)」課題番号17530656の交付を受けて行われた研究成果の一部である。

【参考文献】

渡邊公夫×両角達男 (2006)「小中高連携が生み出す新しい数学」,『数学教育』No.581-No.590, 明治図書 (連載)

両角達男 (2006)「学校代数におけるCASを活用した代数的活動 －代数的活動をとらえる枠組みの構築に向けて－」, 静岡大学教育学部研究報告 (教科教育学篇) 第37号, pp.29-47

C.Kieran (2006). Research on the Learning and Teaching of Algebra, pp.11-49, A. Guiterrez, P.Boero(eds), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education:Past,Present and Future*, Sense Publishers

P.Drijvers(2003). *Learning algebra in a computer algebra environment*. CD- β Press. Freudenthal Institute

D.Guin, K.Ruthven, L.Trouche(eds) (2005). *The Didactical Changing of Symbolic Calculators*. Springer

J.Fey, A.Cuoco, C.Kieran, L.McMullin, R.Zbiek(eds) (2003) *Computer Algebra Systems in Secondary School in Mathematics Education*, NCTM

P.Drijvers & C.Kieran(2006). Reconciling Factorizations made with CAS and Paper-and-Pencil. pp.2:473-2:480, J.Novotna(Eds) *Proceeding of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*

A.Sacristan & C.Kieran(2006). Bryan's Story: Classroom Miscommunication about General Symbol Notation and the Emergence of a Conjecture, pp.5:1-5:8, J.Novotna(Eds). *Proceeding of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*