

平成30年6月21日現在

機関番号：13801

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K04976

研究課題名(和文) グラフ表現による組合せ構造の研究

研究課題名(英文) Graph representations of combinatorial structures

研究代表者

新谷 誠 (Araya, Makoto)

静岡大学・情報学部・教授

研究者番号：70303526

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,900,000円

研究成果の概要(和文)：有限環上の線形符号のグラフ表現により、自己補符号のあるクラスの分類を与えた。結果として、擬不偏アダマール行列と弱不偏アダマール行列を求めることができた。グラフ表現により、長さが21,22,23の3元体上の極大自己直交符号の分類を行った。与えられたアソシエーションスキームとその自己同型群から、存在の知られていないパラメータの部分釣合型不完備ブロックデザインを分類を行った。2部グラフとアソシエーションスキームに対して、ある部分釣合型不完備ブロックデザインの分類を行った。各グラフは求められたデザインの表現となっている。

研究成果の概要(英文)：By a graph representation of a linear code over finite ring, we give classifications of a certain class of self-complementary codes for modest lengths. As a consequence we give quasi-unbiased Hadamard matrices and weakly unbiased Hadamard matrices. We classify ternary maximal self-orthogonal codes of lengths 21,22 and 23 by a graph representation. We classify partially balanced incomplete block designs by given association schemes and its automorphism groups. For bipartite graphs and association schemes, we classify some partially balanced incomplete block designs. Each graphs are a representation of designs.

研究分野：代数的組合せ論

キーワード：グラフ表現 誤り訂正符号 組合せデザイン 有限環

## 1. 研究開始当初の背景

グラフ理論は、例えばコンピュータネットワークや鉄道の路線をモデル化し、それを表現し効率よく問題の解決を目指す研究分野である。組合せ数学に限らず多くの研究において、その構造をグラフで表現することにより高対称性などの性質を導くことに利用されている。

組合せデザインは実験計画法と呼ばれる統計学の対象であり、それ自身の組合せ構造の研究とともに情報科学への応用が研究されている。2元線形符号の部分構造に組合せデザインという性質を見いだすことで、線形符号の研究に有用であることが知られているが、完全に解明されているわけではない。

組合せデザインをグラフで表現して、同型判定を行う方法がよく知られている。その応用として、2元線形符号の分類や特徴付けが行われている。1991年にレオン氏により一般の有限体上の線形符号に対して同値判定を行うアルゴリズムが示された。2002年にオスターガード氏は線形符号のグラフ表現を提案してグラフの同型判定により、線形符号の同値判定ができることを示した。その方法により、グラフの同型判定により長さ毎に線形符号の分類を行うことが効率よく進められるようになった。

ここで、グラフの同型判定は計算の複雑性ではNPというクラスの問題である。対称性の高いグラフに関してはある程度大きなグラフに対してもコンピュータによる計算が可能になっている。組合せ構造をグラフとして表現することで、その存在性や分類が行える環境が整いつつある。しかし、平面ハイポハミルトングラフをはじめとして、その最小の存在性に関する未解決問題があることも知られている。

## 2. 研究の目的

研究申請時の目的の概要は次の様になっている。

(概要)ある種の組合せ構造の存在性の決定を試みる際、同じ性質を持つサイズの小さな組合せ構造を構成し、その性質が保たれるようにサイズを拡大させる方法は基本的であるが有益であることが多い。この方法においてグラフ表現という手法を利用することにより、組合せ構造に留まらずに代数的構造にも広げて、効率よく存在性の決定と分類を試みる。

具体的には、組合せデザインのグラフによる表現を用いて、効率よく拡大する方法を実現し、存在の知られていないパラメータの組合せデザインの存在性を決定する。代数的構造への応用例としては、有限環の演算表をグラフで表現により、位数が $2^6$ の有限環の分類をすることを目的とする。

## 3. 研究の方法

グラフ表現を進化・発展させて、組合せデザインのグラフ表現の方法を発展させる。

研究代表者が主にグラフ表現の方法を提案して組合せデザインと有限環について研究を進め、分担者はグラフ表現と有限環を利用して誤り訂正符号の存在性の決定について研究を進める。

有限体の線形符号の場合には座標と要素の組をサイクルで表しているのを、有限環上の線形符号のグラフによる表現ではパスで表現するアイデアを提案する。そして、グラフと線形符号との構造を含めた1対1対応をもとにして分類を行う。また、2元体では無い線形符号の対しては、2進数表現を用いて2元体上の非線形符号として座標に制限を付けて同型判定を行うことで、分類を行う。

## 4. 研究成果

研究成果について、論文と学会発表を中心に述べる。論文番号、発表番号は主な発表論文等における雑誌論文と学会発表の番号である。応用例とした位数 $2^6$ の有限環の分類は部分的な解決となった。研究目的がさらに深化したグラフから組合せデザインを求めるという逆の方法が発展した。

論文4本研究では、自己補符号の符号語の個数の上限を与えた。さらに、 $f$ 個の互いに擬不偏なアダマール行列の存在と $f$ 個の集合の和集合からなる2元自己補 $(n, 2fn)$ 符号の存在が必要十分条件であることを示した。ある条件を満たす自己補符号を分類し、さらに互いに擬不偏なアダマール行列の構成を行った。特に、グラフ表現と関係する部分について述べると、有限体上の線形符号の同値判定の方法を参考にして一般化することで有限環上の線形符号の同値判定を行う方法を提案している。

発表4 グラフ理論の研究者が多く参加する「離散数学とその応用研究集会2016」において論文4の上で述べた線形符号のグラフ表現の方法について発表を行った。グラフの同型判定を効率よく行う方法について議論を行った。

発表3 組合せデザインと符号理論の研究が参加する「実験計画法と符号および関連する組合せ構造」において、論文4の互いに擬不偏なアダマール行列と弱不偏なアダマール行列について、コンピュータの計算により自己補符号を構成して、擬不偏なアダマール行列を構成したことを発表した。

論文3 2016年に野崎氏と須田氏により、複素球面上の符号について研究されている。その結果の一つに奇数  $d$  について位数  $2d$  の複素球面上の2-符号と2重正則トーナメントから1つ点を削除したグラフが対応していることが示されている。本研究では、2重正則トーナメントから1つ点を削除したグラフに対応した位数が51以下の交代連立差集合についてアルゴリズムを与えてコンピュータによる計算で分類を行った。

論文2 論文4で進化・発展させた有限環上の線形符号の同値判定を動機として、長さが7以下の有限環上の線形符号の分類を行った。しかし、長さが短い場合にはグラフ表現による方法は計算コストが多いことがわかり、コンピュータによる計算で列置換の方法で分類を行った。

論文1 長さが21,22,23の3元体上の極大自己直交符号の分類を行った。結果として長さが24以下の3元体上の極大自己直交符号の分類が完成した。3元体の要素を2値データへ変換することにより、3元体上の線形符号を2元体上の非線形符号へ変換を行い、その構造をグラフで表現することにより表現されたグラフの同型判定により符号の同値判定を行うことで分類を完成した。

発表2 与えられたアソシエーションスキームとその自己同型群から、部分釣合い型不完備ブロックデザインを構成し、分類を行った。これらの組合せデザインには、存在の知られていないパラメータの組合せデザインが存在しており研究計画を達成した。ここで、アソシエーションスキームは求めた組合せデザインのグラフ表現となっている。つまり、これまでとは逆にグラフから組合せデザインを構成することが可能であることを示した。

結果として、多くのブロックデザインを求めるとともに、求められたブロックデザインをもとにアソシエーションスキームのフュージョン関係を明らかにする方法に対応していることを示した。

現在は学術論文として発表することの準備を進めている。

発表1 組合せデザインを一般化した2部ブロックデザインは、自明な例と一般化多角形から構成する方法が知られている。また、1966年にM.B.Rao氏により直径が2のグラフに対してデザインの構成が与えられている。そこで、本研究では非自明なかつ直径が3以上の距離双正則グラフの場合のデザインの構成を与えた。特に、ジョンソングラフの距離分布の考察により、2部ブロックデザインを構成する方法を与えた。ここで、距離双正則グラフは2部ブロックデザインの表現となっている。

現在はジョンソングラフ以外の距離双正則グラフに対して2部ブロックデザインの構成法に関する研究を進めている。

応用例とした位数  $2^6$  の有限環については、場合分けを行って分類を進めており、場合分けを行いその2割について分類が終わっている。生成元の個数が3個以上の場合にそれらを効率的に扱う方法を確立させて、本研究期間終了後も引き続き研究に取り組む予定である。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計4件)

M.Araya, M.Harada and Y.Suzuki, Ternary maximal self-orthogonal codes of lengths 21,22 and 23, Journal of Algebra Combinatorics Discrete Structures and Applications 5(1) (2018) 1-4, 査読有.

<https://jacodesmath.com/index.php/jacodesmath/article/view/146/88>

M.Araya, M.Harada Masaaki, H.Ito and K.Saito, On the classification of  $Z_4$ -codes, Advances in Mathematics of Communications, 11(2017)747-756, 査読有.

<http://doi.org/10.3934/amc.2017054>

M.Araya, M.Harada and S.Suda, Supplementary difference sets related to a certain class of complex spherical 2-codes, The Australasian Journal of Combinatorics, 65(2016)71-83, 査読有.

[https://ajc.maths.uq.edu.au/pdf/65/ajc\\_v65\\_p071.pdf](https://ajc.maths.uq.edu.au/pdf/65/ajc_v65_p071.pdf)

M.Araya, M.Harada and S.Suda, Quasi-unbiased Hadamard matrices and weakly unbiased Hadamard matrices: A coding theoretic approach, Mathematics of Computation, 86(2016)951-984, 査読有.

<https://doi.org/10.1090/mcom/3122>

[学会発表](計4件)

新谷誠, 部分釣り合い型2部ブロックデザインとその2部グラフ, 実験計画法と符号および関連する組合せ構造, 2017年.

根本雅章, 新谷誠, 部分釣り合い型不完備ブロックデザインとそのアソシエーションスキームの自己同型群について, 離散数学とその応用研究集会 2017, 2017年.

新谷誠, 原田昌晃, 須田庄, Quasi-unbiased Hadamard matrices and weakly unbiased Hadamard matrices, 実

験計画法と符号および関連する組合せ構造, 2016 年.

新谷誠, 線形符号の有向グラフ表現による同値判定方法について, 離散数学とその応用研究集会 2016, 2016 年.

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年月日:  
国内外の別:

取得状況(計 0 件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
取得年月日:  
国内外の別:

〔その他〕

ホームページ等

<http://yuki.cs.inf.shizuoka.ac.jp/Z4codco/>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

新谷 誠 (ARAYA Makoto)  
静岡大学・情報学部・教授  
研究者番号: 70303526

### (2) 研究分担者

原田 昌晃 (HARADA Masaaki)  
東北大学・大学院情報科学研究科・教授  
研究者番号: 90292408

### (3) 連携研究者

( )

研究者番号:

### (4) 研究協力者

( )