数学科授業案

数学科授業案

授業者　杉山　元希

１　日　時　　平成 30 年 11 月 29 日（木）　第１時　８：40～９：30
２　学　級　　３年Ｄ組　（３年Ｄ組教室）
３　題材名　　**「図形の相似」**
　　　　　　　－影の軌跡は〇〇を描く－

４　題材の目標

　影は規則的に変化していると実感している子どもたちが，移動する物体とその物体の影の先端の軌跡を図形として表し，その変化を捉える活動を通して，空間における平行線と線分の比の関係を自分たちなりにまとめていくことができる。

５　題材観

(1)　はじめに

　映画「Peter Pan」で影を探しにピーターパンがウェンディーたちと出会う場面で，自分の意志で勝手に動き出す影を捕まえ，足に縫い付けるシーンを見たときの驚きを，私は忘れることができません。本来の影の性質では考えられないことですが，影は私たちの想像をかき立てる魅力を秘めており，映画の演出としてだけでなく，多くの絵本や物語にも取り上げられています。また，影の動きを忠実に再現することで，アニメーションがより現実的なものとして感じられるところも影の魅力の一つと言えるでしょう。

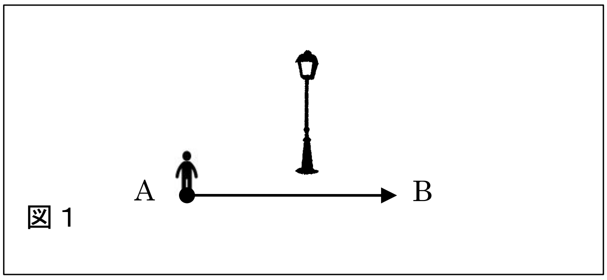
　影は日常的に目にするものですが，立ち止まって数学的に表現したとき「比例と言えるだろう」「いや，反比例ではないか」「もしかしたら放物線かもしれない」など，関数的に捉えることができたり，伸縮する影を図形の相似と捉えたりして，既習の内容と結びつけて考えることができるのではないでしょうか。

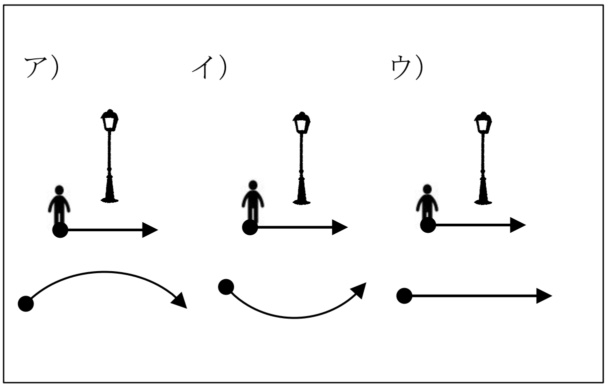
(2)　図形の相似について影を用いて考える

　影の動きは生活体験を踏まえて，課題に対し，誰もが予想を立てることができます。影は私たちの身近に存在しているものであり，影絵や影踏みといった遊びを経験したことのある人は多いでしょう。跳んだりしゃがんだり，自分が意図した動きに合わせて影も一緒に動くため，その変化は直感的に捉えやすいものだと言えます。本題材では，昼間の太陽の影ではなく，夜の影の動きに注目して考えることとします。規則的な動きをしているのにもかかわらず，影の変化を簡単には説明できないところに影について考えるおもしろさがあると言えます。また，自分のイメージした動きと仲間のイメージした動きが異なる場合，自分の考えを明確にするための根拠が必要となり，図や記号を用いて説明したくなるでしょう。根拠を明確にするために平面図や立面図など，様々な角度から場面を切り取り，自然と相似な三角形を見出すことができます。イメージした影の動きを明確にしていくために，実際には目に見えない線分を図に書き表し，線分の比，角度の関係を捉え，影がどのような条件（関係）で変化しているのかを説明していくことができます。

(3)　影の先端の軌跡

　図１のように，街灯の横を点 A から点 B まで人物が通り過ぎたとき，影の先端はどのような軌跡を描くのでしょうか。





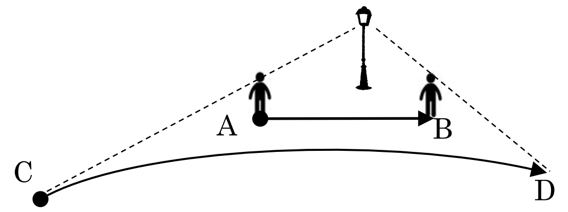


図２

　街灯に近づけば影が短くなり，遠ざかれば長くなるわけなので，図２のように影の頂点の軌跡は点 C から点 D まで湾曲するように想像する人もいるでしょう。その湾曲する曲線が放物線や反比例のように関数的に規則があるようにも感じてきます。

　しかし，実際には図３のように影は人物の歩く軌跡と平行に進みます。それでは，なぜ平行と言えるのでしょうか。

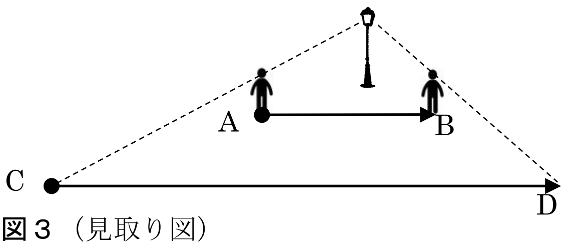


図３（見取り図）

　実測値を使って，辺の長さの比に着目することもできますが，それでは設定しなければならない条件が多くなってしまします。空間を一方向から投影し，立面図（図４）や平面図（図５）で表して，三角形の相似条件から対応する辺の比が等しいこと，対応する角の大きさが等しいことが論理的に示され，結果，同位角が等しいことが明確になります。そのため，人物の歩いた軌跡と影の先端の軌跡は平行であることが証明されます。

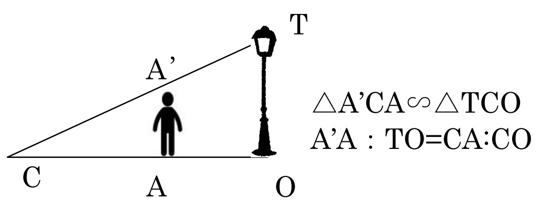


図４（立面図）

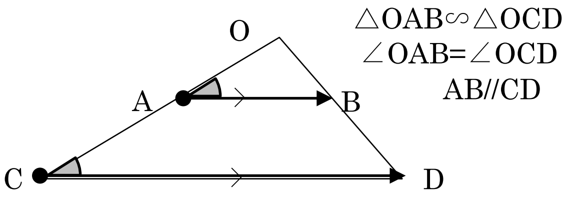


図５（平面図）

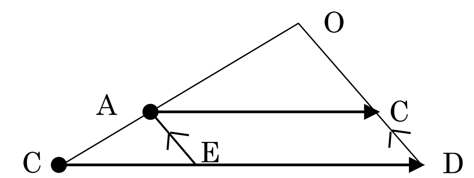


図６（平面図と平行線）

　点 A を通る OD に平行な線分と CD との交点を点 E とし，線分 AE をひく。

△ACE と△OCD において
∠ACE＝∠OCD（共通）･･･①
AE//OD より，平行線の同位角は等しいので
∠CEA＝∠CDO　　　　･･･②
①②より，２組の角がそれぞれ等しいので
△ACE∽△OCD
同様にして，△ACE∽△OAB
したがって，△OAB∽△OCD

⑷ 本題材における数学科ならではの文化

　「移動する物体とその物体の影の先端の軌跡を図形として表し，その変化を捉える活動を通して，空間における平行線と線分の比の関係を自分たちなりにまとめていくことができること」を数学科ならではの文化であると考えます。

⑸ 題材と子どもたち

　空間の中で相似を捉えることは子どもたちにとって想像以上に難しいと考えられます。そのため，説明する活動を行う際には，具体物を用いたり，生活体験を踏まえたりできる題材であることが求められます。

　ピーターパンの物語のように，影が勝手に動いたり現れたり消えたりすることはありませんが，見えていない影の変化を予想し，予想した動きの根拠を示すために，実際に具体物を使って動きをイメージし，見取り図や投影図に表していくでしょう。子どもたちは，理科の光の進行（直進，反射，屈折）などの学習も活かし，自分たちなりに動きを明確にしていくでしょう。そこでは，辺の比や対応する角度に着目して相似な三角形を示すことや，同位角が等しい２直線が平行になることなど，数学的な表現が用いた説明がされていくでしょう。子どもたちが単に知識として平行線とその線分の比の関係を使うのではなく，この性質や定理を自ら導き出すことができたとしたら，数学のおもしろさがより一層深まるのではないでしょうか。

　今後，子どもたちが，図形の分野に限らず，疑問に感じたことを数学的に表現し，他者に論理的かつ客観的に伝えようと挑戦していくことを願っています。

参考文献：柗元新一郎（1997）「数学的モデル化における生徒の考え方の変容」
東京学芸大学教育学部附属大泉中学校　研究集録　第37号
国宗進（2017）「数学教育における論証の理解とその学習指導」東洋館
永田潤一郎（2018）「数学的活動の授業デザイン」明治図書

６　学習指導要領との関連

Ｂ　図形

(1) 図形の相似について，数学的活動を通して，次の事項を身につけることができるよう指導する。
ア　次のような知識及び技能を身につけること。
(ア)平面図形の相似の意味及び三角形の相似条件について理解すること。
(イ)基本的な立体の相似の意味及び相似な図形の相似比と面積比や体積比との関係について理解すること。
イ　次のような思考力，判断力，表現力などを身に付けること。
(ア)三角形の相似条件などを基にして図形の基本的な性質を論理的に確かめること。
(イ)平行線と線分の比についての性質を見いだし，それらを確かめること。
(ウ)相似な図形の性質を具体的な場面で活用すること

７　題材構想（全３時間）

(1) 影はどのように変化しているだろう（１時間）
(2) 影の先端の軌跡について考える（２時間：本時はその１）

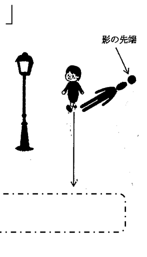
８　題材構想（全３時間）

(1) 影はどのように変化しているだろう（１時間）

授業者は，以下のような２人の会話の書かれたワークシートを配付し，「影はどのように変化しているだろう」と尋ねます。

絵を書くことが好きな明子さんは，今度自作のパラパラマンガを作成しようと考えていました。そこで，マンガが好きな晃くんに相談しました。

明子「今度，自分の絵でパラパラマンガを作りたいんだけど，手伝ってくれる？」
晃　「いいよ。どんなマンガなの？」
明子「まだはっきりは決まっていないんだけど，主人公は小学生で，スポーツはできるけど怖がりで人前にでるのは苦手なタイプ」
晃　「おもしろそうじゃん。で，なにを手伝えばいいの？」
明子「夜，ランニングに出かけたときの動きを書きたいんだけど，影の動きが上手く書けなくて困っているの」
晃　「光はどこからあたっているの？」
明子「街灯から。高さは 2.1mくらいかな。主人公の身長は 140 cmだよ」
晃　「なるほど～。じゃあ……



子どもたちは，自分の生活体験をもとに影の先端の軌跡を線で表し，影の変化を規則的であると考えていくでしょう。授業者は，街灯の高さと主人公の背の高さ以外に必要な条件は何なのかについて尋ねながら，数学的に考えられる土台をつくっていきます。そして，予想される影の先端の変化をいくつか示し，現時点での自分の考えと同じものに挙手を求めます。同じ考えをもつ人がいることで安心して自分の意見を述べることができ，違う考えをもつ人がいることでなぜそうなのかと疑問をもつきっかけにしてもらいたいためです。子どもたちは，以下のような予想をするでしょう。

・街灯から離れれば影が長くなるだろう
・街灯から離れると光が弱くなるのだから，弧を描くように丸くなるだろう
・直線になるのではないか
・徐々に長くなるので放物線になるのではないか
など

授業者は，各自の考えの根拠を明確にしていくよう時間をとります。影の変化のイメージがもてなかったり，とにかく実際に試して確認したいと考えたりする子どもには，別室でライトの明かりで確かめてもよいことを伝えます。
本時でわかったこと，疑問に感じたことを子どもたちは次のように追究の記録に書くでしょう。

・広がる曲線になると予想したけれど，その理由が説明できないし，ならない理由もわからない
・街灯からの距離と影の長さに関係がありそうだ
・実際にやってみたら，影は移動する方向と平行に変化しているように見えた。でも，それでは数学の説明になっていないので，本当に平行と言えるのか，次回理由を考えたい

など

(3) 影の先端の軌跡について考える

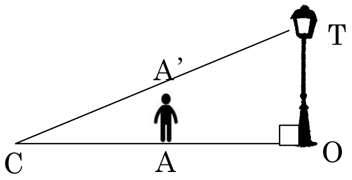
（２時間：本時はその１）

授業者は，模型となる街灯（ライト）と，14 ㎝程度の発泡スチロール，画用紙や方眼紙を準備しておきます。そして前時で考えた影の先端の変化を思い出し，実際に動きを調べた結果を確認します。影の先端は移動する主人公に平行に動くと知った子どもたちは，なぜ平行に動くのか疑問をもつでしょう。授業者は，主人公の動きを AB とし，「なぜ影の先端の軌跡 CD が AB に平行と言えるのか」となげかけます。子どもたちは，解決には実測したり，図示したり，筋の通った説明になっているか確認することが必要となるため，すぐに小グループ（４人組）で考えたいと思うでしょう。そこで授業者は，４人組で解決していくように提案します。

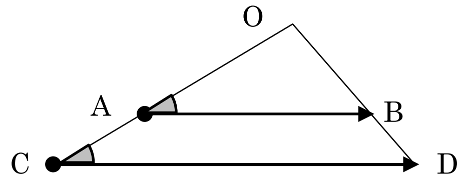
子どもたちは，実測値や動きを確かめながら説明を考えていくでしょう。そのため，多くのグループが影の先端の軌跡を画用紙に記入していき，平面図を考えることが予想されます。そして，平行であるという根拠を補助線や立面図を使って説明するために，影という投影された形だけでなく，立体的に線分を結んだり，模型をつくったりしてイメージを膨らめていくでしょう。

以下は，子どもたちが説明していく際の対話や図示していく内容です。

A：とりあえず実際やってみよう。
B：やっぱり平行っぽい。
A：どうしたら平行と言えるかな。
B：ここの角度が等しければ，同位角が等しくなって平行と言えるよね。
A：角度か。分度器持ってくる？
B：いや，角度が等しいことは相似が言えれば大丈夫だよ。
C：あー，街灯の高さと主人公の身長はわかっているから比が求められそうだね。
A：え？でも街灯から主人公までの距離と主人公の影の長さの比はわからないんじゃないの。
B：横から見てみると直角三角形ができていて，相似が言えるから比が求められるよ。



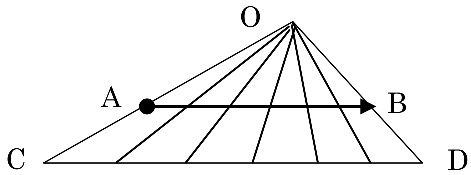
△A’CA と△TCO において
∠A’ AC＝∠TOC＝90°　　・・・①
∠A’CA＝∠TCO（共通）　・・・②
①②より，２組の角が等しいので
△A’CA∽△TCO
A’A：TO=CA:CO
同様にして，A’A：TO=BD:OD
したがって AC:OC＝BD:OD



△OAB と△OCD において
∠AOB＝∠COD（共通）・・・①
立面図より，AC:OC＝BD:OD
OA:OC＝(OC－AC):OC
OB:OD＝(OD－BD):OD
よって　OA:OC＝OB:OD　・・・②
①②より，2 組の辺の比とそのはさむ角がそれぞれ等しいので，
△OAB∽△OCD
対応する角が等しいので，∠OAB=∠OCD
同位角が等しい２直線は平行なので，
AB//CD

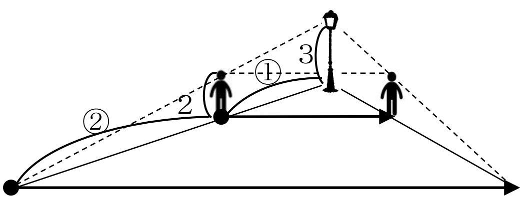
など

D：主人公を動かしたとき，影の先端までの長さは変化（長くなったり短くなったり）しているよ。
E：でも曲線にはならずにまっすぐに動く。
D：街灯から主人公までの距離と主人公の影の長さの比が等しければ，平行と言えるのではないかな。
E：じゃあ，街灯から主人公までの距離と主人公の影の長さを測ってみよう。
F：街灯から主人公までの距離ってどうやって測るの？
E：ライトの真下から測ればいいでしょ。
F：わかった。いくつか測ってみるね。



OA＝３㎝，AC＝２㎝，
OB＝２㎝，BD＝0.6㎝
△OABと△OCDにおいて
OA:OC＝OB:OD　…①
∠AOB＝∠COD（共通）…②
①②より，２組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいので
△OAB∽△OCD
対応する角が等しいので∠OAB＝∠OCD
同位角が等しい２直線は平行なので
AB//CD　など

G：街灯の高さと主人公の身長が影の長さと関係していると思うんだよね。
H：そうそう。今回は街灯の高さと主人公の身長の比は 210：140 だから，３：２だよね。
G：ってことは，なんかこの比が相似と合わせて使えそうだよね。
H：三角形の相似から，（街灯から主人公までの距離）：（主人公の影の長さ）＝３：２と言えないかな。
G：いや３：２じゃなくて，１：２でしょ。
H：そうか。比が３なのは街灯から影の先端までの長さか。３－１＝２だね。

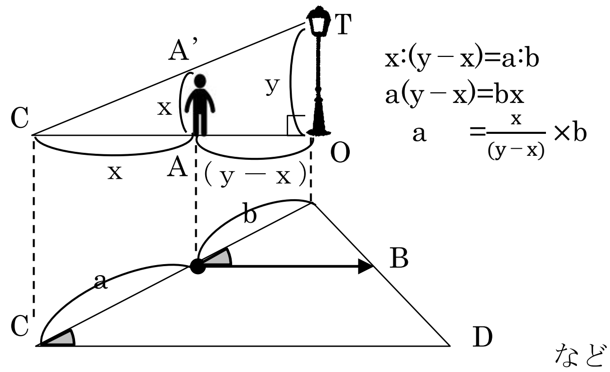


など

授業者はそれぞれのグループに「誰にでもわかる説明になっているか」「どんな場合でも言えるのか」など声をかけていき，図示を色分けしていたり，筋道立てて説明できていたりするグループを称賛していきます。また，グループのつまずきや説明しきれていない個所を把握しておきます。子どもたちから「意見を伝えたい」「みんなの意見を聞いてみたい」という反応を見られたところで，全体でなぜ平行線になると言えるのかについて，意見を出し合い，まとめていくようになげかけます。

子どもたちは，自分たちの考えたことと比較しながら，図示の仕方，明確な根拠とまだ不確定な根拠を区別し，筋道立てて説明できているかを吟味ししていくでしょう。その際，グループで解決しきれなかった疑問や説明を聞いて生まれた疑問をさらに解決しようと追究し，「根拠」を伝え合いより明確なものにしていきます。そして，空間における平行線と線分の比について自分たちなりにまとめ，説明することで影（の長さ）についての考えを深めていくでしょう。

I：街灯から主人公までの距離をｘｍとするとどうなるのかな。
J：比が１：２になるということだから２倍だよ。
I：どんな場合でも影は２倍になるってこと？
J：いや，街灯の高さや主人公の身長によるよ。



など

本題材を終えた子どもたちの「追究の記録」には，以下のような言葉が書かれるでしょう。

・最初は平行になることに疑問を感じたけれど，説明を考えていくうちにつじつまが合っておもしろかった。影の長さとライトから物体までの距離の関係が相似によって明確になった
・本当に平行と言えるのか筋道立てて説明することで，自分の説明に自信をもつことができた。そして，辺の比が等しくなることで平行線が描かれることがわかった。中点連結定理も１：１の比になっているから平行だと言えるだろう
・相似な三角形を立面（横）と平面（上）からの２通り考えることで，互いの辺の比が等しい関係が組み合わさったところが数学っぽいと感じた。投影図にすることで辺の比が明らかになって，今度は自分から説明できそうだ
・見取り図が最初はイメージできなかったけど，他の人の説明を聞いてイメージできるようになった。それに，辺の比が３：２が２：１になる理由が納得できてよかった
・視覚的に示すことは相手に伝わりやすく説明することができた。これから別の問題でも図を使ったり，置き換えて考えたりして説明してみよう

など

子どもたちが日常の事象を数学的に捉え，論理的に自分の考えをまとめ，他者に伝え，問い直すことにより，客観的に説明していく過程を楽しむ子どもたちの姿に思いを馳せ，題材をとじること

とします。