数学科授業案

数　学　科　授　業　案

授業者　森　　　正　樹

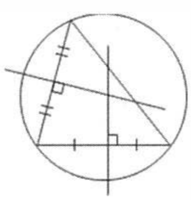
1　日　　時　　平成30年10月12日（金）第1時　10：15～11：05
2　学　　級　　3年B組　（3年B組教室）
3　題 材 名　　「円に内接する多角形」
　　　　　　　　―発展的な捉えから図形の世界を広げよう―

4　題材の目標

円と多角形の関係に気づいていない子どもたちが，円に多角形が内接する条件や内接する多角形の性質を明らかにする活動を通して，図形に関する事象を発展的に捉え，帰納的・演繹(えき)的な考えをもつ。

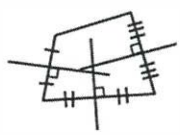
5　題 材 観

⑴　三角形の外接円



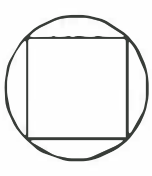
外接円を描くことのできる多角形は何か。その唯一の答えは，三角形である。なぜなら，三角形の各辺の垂直二等分線を作図することで，外心を求めることができるからである。外心は，三角形の外接円の中心であるため，どのような三角形であっても外接円を描くことができる。

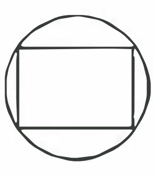
⑵　四角形の外接円



それでは，四角形は円に内接すると言えるだろうか。図のように，四角形の各辺の垂直二等分線を作図しても，三角形のように1点で交わるとは限らないことがわかる。つまり，四角形は円に内接するとは言えないのである。

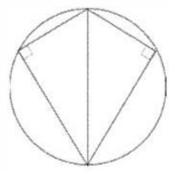
しかし，正方形や長方形のような特別な図形においては，その外接円がイメージしやすいことから，四角形には外接円を描くことができるものとそうでないものがあることがわかる。



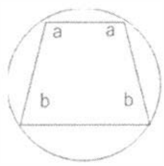


⑶　円に内接する四角形の性質

では，四角形に外接する円を描くためには，どのような条件が必要なのだろうか。まずは，円に内接する四角形からその性質について考えてみる。



例として，等脚台形や一つの対角線が直径に等しいたこ形をあげる。二つの図形に共通する性質に着目すると，次のように，対角の和が１８０°であることがわかる。

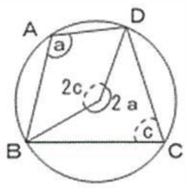


たこ形の対角線が直径であり，その円周角は９０°であるため，対角の和は１８０°である。

図より，等脚台形の隣り合った内角の大きさは等しいため，対角の和は１８０°である。

以上のことから，「円に内接する四角形の対角の和は１８０°である」と仮定して，一般的な四角形で証明を考える。

（証明）



図より，円に内接する四角形ABCDにおいて，

∠A＝a，∠C＝cとする。

$\overset{\frown}{BCD}$に対する中心角と円周角より，

∠BOD＝2∠a

$\overset{\frown}{BAD}$に対する中心角と円周角より，

∠BOD＝2∠c

2∠a＋2∠c＝３６０°　より，

∠a＋　∠c＝１８０°　となる。

したがって，∠A＋∠C＝１８０°

また，四角形の内角の和は３６０°より，

∠B＋∠D＝１８０°

以上より，円に内接する四角形の対角の和は１８０°であることが示された。

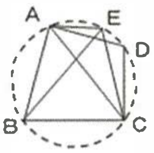
⑷　円に内接する四角形の条件

次に，明らかになった「円に内接する四角形の対角の和は　１８０°」であることの逆から，内接する四角形の条件を「対角の和が１８０°である四角形」と仮定し，証明を考えてみる。

（証明）

四角形ABCDにおいて，仮定より，

∠ABC＋∠ADC＝１８０°　…㋐



このとき，ΔABCの外接円を円Oとする。また，点Bを含まない$\overset{\frown}{AC}$上に点Eをとると，四角形ABCEは円Oに内接するので，その対角は１８０°となる。

∠ABC＋AEC＝１８０°　…㋑

㋐㋑より，∠ADC＝∠AEC

このとき，円周角の定理の逆より，点A，C，D，Eは同一円周上にある。この円は，ΔACEの外接円であるから円Oとなる。円OはΔABCの外接円であるので，四角形ABCDは円Oに内接することが示された。

⑸　円に内接する多角形

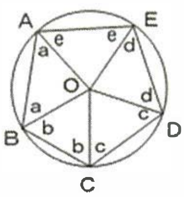
すべての四角形が円に内接するわけではないが，１８０°という値によって，円と四角形の関係性を明らかにすることができた。図形では，多角形の内角の和や星形多角形の内角の和に一般性があることは知られているが，円に内接する多角形においても，何か関係があるのだろうか。ここで，円と多角形について考えてみる。

①　円に内接する五角形

五角形の内角の数は奇数であり，四角形のように対角の関係を捉えることはできない。そこで，図のように円の中心を頂点とする二等辺角形に分けて考えてみると，

∠A＋∠C＋∠d＝∠B＋∠D＋∠eとなることがわかる。

（証明）



円に内接する五角形ABCDEにおいて，中心Oから各頂点を結ぶ半径をひき，５つの二等辺三角形それぞれの底角を図のようにおく。このとき，

∠A＋∠C＋∠d＝∠a＋∠b＋∠c＋∠d＋∠e

∠B＋∠D＋∠e＝∠a＋∠b＋∠c＋∠d＋∠e

となり，∠A＋∠C＋∠d＝∠B＋∠D＋∠eであることが示された。五角形の内角の和が５４０°であることから，

∠A＋∠C＋∠d＝∠B＋∠D＋∠e＝２７０°

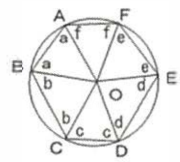
であることも言える。

つまり，対角を隣り合わない内角と考えたとき，五角形の隣り合わない内角の和と分割した残りの内角の隣り合わない角の和は，等しいと考えられる。

②　円に内接する六角形

六角形の内角では，対角を向かい合う２角と捉えると３組の対角ができるが，それらに明らかな関係は見いだせない。そこで，対角を「隣り合わない内角」として考えると，「隣り合わない内角の和は３６０°」であることがわかる。

（証明）



円に内接する六角形ABCDEFを図のようにおく。

このとき，五角形と同様に隣り合わない内角の和は，

∠A＋∠C＋∠E

＝（∠a＋∠f）＋（∠b＋∠c）＋（∠d＋∠e）

＝∠a＋∠b＋∠c＋∠d＋∠e＋∠f

＝７２０°／2　（六角形の内角は７２０°）

＝３６０°　…㋐

よって，∠B＋∠D＋∠F＝７２０°－３６０°

＝３６０°　…㋑

㋐㋑より，円に内接する六角形の隣り合わない内角の和は３６０°であることが示された。

③円に内接する偶数角形

ア帰納的な考え

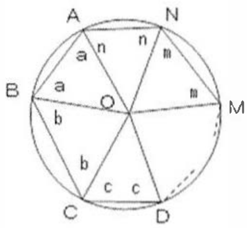
前述のように，円に内接する多角形の隣り合わない内角（対角）の和を１８０°，２７０°，３６０°のように具体的に求めることができた。このことから，隣り合わない内角の和を四角形，五角形，六角形と求めていくと，表のように１８０°ずつ大きくなっていくと考えられる。つまり，角の数が一つ増えると隣り合わない内角の和が１８０°大きくなるという関係から，円に内接するｎ角形の隣り合わない内角の和は，９０°×（ｎ－２）と言えるのではないだろうか。

内接する偶数角形	隣り合わない内角の和
四角形	１８０°
五角形	２７０°
六角形	３６０°
⋮	⋮
ｎ角形	９０°×（ｎ－２）

イ演繹的な考え

帰納的に見いだした円に内接するn角形の内角の和が，９０°×(n－２)で表されることを演繹的に示す。

（証明）



円に内接する偶数n角形ABC…Nにおいて，中心Oから各頂点を結ぶ半径をひき，n個の二等辺三角形それぞれの底角を図のようにおく。

このとき，n角形の隣り合わない内角の和は，次のように表される。

∠Ａ＋∠Ｃ＋∠Ｅ＋…＋∠Ｍ
＝(∠n+∠a)+(∠b+∠c)+(∠d+∠e)+…+(∠ℓ＋∠m)
＝∠ａ＋∠ｂ＋∠ｃ＋…＋∠ｎ
＝｛１８０°×（ｎ－２)｝÷２
＝９０°×（ｎ－２）…㋐
よって，∠Ｂ＋∠Ｄ＋∠Ｆ＋…＋∠Ｎ
＝１８０°×（ｎ－２）－９０°×（ｎ－２）
＝９０°×（ｎ－２）…㋑

㋐㋑より，円に内接する偶数n角形の隣り合わない内角の和は，９０°×(n－２)であることが示された。

円に内接する奇数n角形ABC…Nにおいても，n個の二等辺三角形で考える。隣り合わない内角の和と∠Nを分割した∠mと∠nの関係について，次の式が成り立つ。

∠A+∠C+…+∠L+∠m＝∠a+∠b+∠c+…+∠n
∠B+∠D+…+∠M+∠n＝∠a+∠b+∠c+…+∠n

つまり，円に内接する偶数n角形の隣り合わない内角の和は，９０°×（ｎ－２）であることが示された。

円に内接するという条件がある中でも，多角形の隣り合わない内角の和が，９０°×（ｎ－２）で求められることは驚きである。奇数角形と偶数角形において，隣り合わない内角の捉えが異なる点も含んではいるが，円と多角形の関係についてさらなる追究の余地を残しているだろう。このように発展的に図形を捉えることで，演繹的な考えが深まっていくと考える。

(6) 本題材で味わう数学科ならではの文化

「これまでに明らかにしてきた外接円を描くことのできる四角形の特徴や円に内接する四角形の性質から，円と多角形の関係について，子どもたちが対話していくことで図形を発展的に捉えていく」ことを本題材における「数学科ならではの文化」とする。円に内接する図形を描きながら，既習事項を用いて，新たな性質を導き出していくおもしろさを味わっている子どもたちの姿を期待している。

(7) 題材と子どもたち

２年時に図形を切り取って並べかえたり，敷きつめたりする実験で「三角形の内角の和が180°であること」を確認し，初めて演繹的に証明することができた子どもたちは,「数学する」実感を得ているようであった。「定義から言えることは何なのか」「誰もが納得できる根拠はあるのか」「どの図形においても成り立つのか」など，論証していくうえで欠かすことのできない視点を取り入れ，確かなことを積み上げてきた。しかし,対象が具体から抽象へと移行していく過程では，飛躍して物事を考えてしまったり，どのように書けばよいのか戸惑ったりする場面も少なくなかった。そのような中でも，子どもたちが豊かに表現し捉えようとする姿も見られた。つまり，考えを伝え合い，重ね合わせる経験を通して，論理的かつ客観的な視点が組み込まれ，自分たちなりによりよいものにしようとする姿につながってきたと考える。

本題材では，円に多角形が内接あるいは外接する位置関係における性質について考察していく。円も多角形も身近な存在でありながら，それらの関係性においては，未知なことが多く追究しがいがあるだろう。円に内接する四角形の内角の和に関する性質については，これまでに明らかにしてきた定理や性質を用いて導くことができる。子どもによって図形の捉えが異なることは，自分では気づかなかったアイディアを発見する驚きをもたらすと考える。図形を多面的に捉え，既習事項に帰着させて考えることは，図形同士の関連も明らかにしていくことにつながるだろう。また，円と内接する三角形，四角形との関係について，数学的推論などによって明らかにしようとする子どももいると考えられる。その過程では条件や仮定を設定し，図形の関係を数学的に表現し，帰納的・演繹的に推論しようとする子どもの姿を価値づけていきたい。円と多角形の性質を発展的に捉え，それらの性質に一般性を見いだすことで，子どもたちが図形を体系的に捉え理解を深めていくことにつながると考える。そして，数学の世界だけでなく，様々なことに対しても，多様な視点から事象を捉え，誰もが納得できる明確な根拠をもって解決にあたる人になってほしいと願っている。

参考文献：朝倉幹晴（2014）『円　－小中学生から学べる初等幾何学入門－』 暗黒通信団
片桐重男（2004）『数学的な考え方の具体化と指導』 明治図書出版
米田重和（2016）『中学校数学科　アクティブ・ラーニングの教材＆授業プラン』 明治図書出版

6　新学習指導要領との関連

B　図形

⑵　円周角と中心角の関係について，数学的活動を通して，次の事項を身に付けることができるよう指導する。

イ　次のような思考力，判断力，表現力等を身に付けること。

(ｲ) 円周角と中心角の関係を具体的な場面で活用すること。

7　題材構想（全７時間）

⑴　頂点が円周上にある四角形（２時間）
⑵　四角形が円に内接するための条件（１時間）
⑶　円に内接する四角形の性質（２時間）
⑷　円と多角形の追究活動（２時間　本時はその１）

⑴　頂点が円周上にある四角形（２時間）

授業者は黒板に１点を記し，子どもたちに「この点を通る円を描くことができるか」と尋ねる。すると，子どもたちからは「何個でも描くことができる」という答えが返ってくるだろう。さらに授業者は「２点，３点と点の数を増やしたとき，その点を通る円を描くことができるだろうか」となげかける。子どもたちは，適当に２点，３点をとり，それらの点を通る円を描きながら確かめていくだろう。子どもたちからは以下のような発言が出されるだろう。

- ２点を通る円も無限に描くことができる
- ２点を結んだ線分の垂直二等分線を作図すれば，中心は何個でもとることができる
- ３点を通る円は描くことができる
- ３点の場合は１個しか描くことができない
- ３点の場合は三角形の外心を求めればよい
- ３点が同一直線上に並んだ場合は，円を描くことはできない
- ４点を通る円は，描くことができる場合とできない場合がある

など

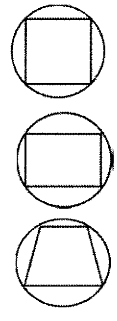
授業者は，垂直二等分線の作図を用いて，２点と３点を通る円が描くことができる理由を子どもたちと確認していく。その際には，各点を通る多角形の考え方が出されたところで，「円に内接する」という表現を図で示しながら定義しておく。そして，４点を通る円について，話題にしている子どもたちの考えを聞いてみる。

- ４点が円周角の定理の逆が成り立つ状態ならば，円を描くことができる
- ４点が正方形や長方形，平行四辺形のような特別な四角形の頂点なら描くことができる
- ５点以上は無理だろう

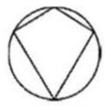
など

子どもたちにとって，既に証明されている「円周角の定理の逆」が成り立つ場合は明らかだろう。しかし，「円周角の定理の逆」が成り立つかわからなくても，４点を通る円を描くことができる特別な四角形があると思う子どももいると考える。その一方，平行四辺形やひし形，台形など，四角形によっては円を描くことができないという考えが出されることも予想される。そこで，授業者は「円に内接する四角形の特徴をみつけよう」と，子どもたちの４点を四角形の頂点と捉える視点を取りあげてなげかける。そして，子どもたちは追究活動に入る。その際には，個人で調べたり，仲間と協力してより多くの図形を対象にしたりすることも認めていく。以下のように，子どもたちは一つの円周上に４つの頂点がある根拠を見いだしていくだろう。

- 正方形や長方形は，対角線の交点が中心になるから円に内接する
- 平行四辺形やひし形，台形，たこ形は円に内接しない
- 台形やたこ形でも，円に内接するものもある



・円に内接するためには，正方形や長方形のように，四つの頂点から等距離にある点が必要になる



・一般的な四角形でも，円に内接するものを描くことができる

など

子どもたちは，描いた四角形を互いに見せ合いながら，円に内接する四角形の特徴を考えるだろう。授業者は，子どもたちが描いた四角形を取りあげ，円に内接する理由について全体で確認していく。ここでは，子どもたちが円に内接する四角形の共通点を明らかにするために，内接する四角形の特徴が明確になるような授業者のかかわりが必要だろう。以下は，予想される子どもたちの考えである。

・等脚台形なら円に内接する
・等脚台形の２辺は等しい
・等脚台形の２組の角も等しい
・たこ形の１組の対角が直角なら円に内接する
・たこ形の対角が直角なら，対角線が直径になって，円周角が９０°になる場合だ
・たこ形でなくても，一般的な四角形の１組の対角が直角なら円に内接すると言えるだろう
・四角形の対角が直角でなくても，対角の和が１８０°なら円に内接する
・特別な四角形でも，一般的な四角形でも，対角の和が１８０°なら，円に内接すると言えそうだ
・本当に対角の和が１８０°なら円に内接すると言えるか

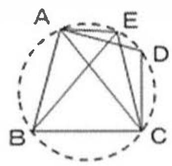
など

子どもたちは，円に内接する四角形を図示しながらその特徴を伝え合う。そして，子どもたちの中で「対角の和が１８０°の四角形」が円に内接すると言えそうであることが共有されると，「本当に言えるだろうか」という疑問の声も出てくるだろう。そして，まだ証明されていないことに気づいた子どもから「証明しよう」と声が上がると思われる。そのような子どもの言葉を確認し，授業者は「『対角の和が１８０°の四角形は円に内接する』ことを証明しよう」と全体になげかける。

(2) 四角形が円に内接するための条件（１時間）

前時の「対角の和が１８０°の四角形が円に内接すると本当に言えるだろうか」という疑問の解決に向けて，子どもたちは証明する活動に入っていくだろう。その際にはワークシートを配付し，全体で共有する一般的な四角形を用意しておく。また，根拠を明確にしながら伝え合うことを大切にし，授業者は証明を書くことにこだわらないことを前提に個人で追究していくよう促し，子どもたちが証明の見通しをもてるようにかかわっていく。考えをもつことができずにいる子どもに補助線や記号を書き込むよう声をかけると，子どもたちは証明に必要な根拠を明らかにしようとするだろう。そして，子どもたちの「この方法を伝えたい」「この説明で本当に証明ができているのだろうか」という声が聞こえてきたところで，４人グループで証明について伝え合う活動に入る。子どもたちは，各グループに配付されたホワイトボードに考えたことを図示しながら，互いの考えを伝えていくだろう。

・円周角の定理の逆が成り立つことを証明すればよい
・円周角の定理の逆で注目する角はどこだろう
・三角形は必ず内接円を描くことができるから，四角形を三角形に分けてみよう



四角形 ABCD において，仮定より，

∠ ABC ＋∠ ADC ＝１８０°…㋐

このとき，Δ ABC の外接円を円 O とする。

点 B を含まない $\overset{\frown}{AC}$ 上に点 E をとると，四角形 ABCE は円 O に内接するので，その対角は１８０°となる※。

∠ ABC ＋ AEC ＝１８０°　…㋑

㋐㋑より，∠ ADC ＝∠ AEC

このとき，円周角の定理の逆より，点 A，C，D，E は同一円周上にある。この円は，Δ ACE の外接円であるから円 O となる。円 O はΔ ABC の外接円であるので，四角形 ABCD は円 O に内接することが示された。

子どもたちにとって，この証明は思いつきにくいと思われる。授業者は，三点を通る円を描くことをヒントとして提示することも想定し，子どもたちの考えに寄り添っていく。証明後は，疑問やさらに考えてみたいことを追究用紙に記入するよう伝えておく。以下はその内容である。

- 証明は難しかったけど，円周角の定理の逆をここで利用できるとは思わなかった
- 四つの点でも，円を通る条件があることに驚いた
- ※について，本当に対角の和が１８０°になっているのか

など

⑶ 円に内接する四角形の性質（２時間）

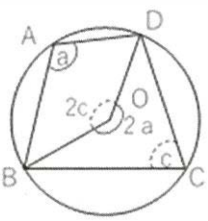
円に内接する四角形の条件を明らかにした子どもたちからは，「そもそも円に内接する四角形は，本当に対角の和が１８０°になっているのか」という疑問が出てくることが予想される。以下は予想される子どもたちの考えである。

- 前の授業で，対角の和が１８０°の四角形は円に内接することを証明したから，成り立つ
- 特別な四角形は，成り立つことが説明できたけれど，一般的な四角形では確かめていないからわからない
- 円に内接しているから，証明できそうだ

など

前時で明らかにした命題の逆を提示することで，「命題の逆が常に成り立つのではないか」という飛躍した考えに陥らない姿勢を大切にしていきたい。「証明ができそうだ」と考え始めた子どもたちは，「円に内接する四角形の対角の和は１８０°である」ことを次のように証明していくだろう。

①円周角の性質を用いた証明



図より，円に内接する四角形 ABCD において，

$\angle A = a$，$\angle C = c$ とする。

$\overset{\frown}{BCD}$に対する中心角と円周角より，

$\angle BOD = 2\angle a$

$\overset{\frown}{BAD}$に対する中心角と円周角より，

$\angle BOD = 2\angle c$

$2\angle a + 2\angle c = 360°$ より，

$\angle a + \angle c = 180°$ となる。

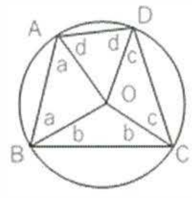
したがって，$\angle A + \angle C = 180°$

また，四角形の内角の和は３６０°より，

$\angle B + \angle D = 180°$

以上より，円に内接する四角形の対角の和は１８０°であることが示された。

②二等辺三角形の性質を用いた証明



円に内接する四角形 ABCD において，中心 O から各頂点を結ぶ半径をひき，四つの二等辺三角形それぞれの底角を図のようにおく。

このとき，四角形の内角の和は３６０°より，

$2(\angle a + \angle b + \angle c + \angle d) = 360°$

また四角形の対角の和について，

$\angle A + \angle C$

$= (\angle a + \angle d) + (\angle b + \angle c)$

$= \angle a + \angle b + \angle c + \angle d$

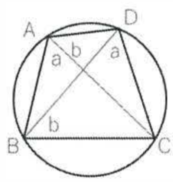
$= 180°$ …㋐

よって，$\angle B + \angle D = 360° - 180°$

$= 180°$ …㋑

㋐㋑より，円に内接する四角形の対角の和は１８０°であることが示された。

③三角形の内角の和を用いた証明



円に内接する四角形 ABCD において，対角線 AC と BD をひく。

$\overset{\frown}{BC}$に対する円周角より，

$\angle BAC = \angle BDC$ …㋐

$\overset{\frown}{CD}$に対する円周角より，

$\angle CAD = \angle CBD$ …㋑

$\triangle BCD$において，内角の和は１８０°なので，

$\angle BCD + \angle CBD + \angle BDC = 180°$ …㋒

㋐㋑㋒より，

$\angle BAC + \angle CAD + \angle BCD = 180°$ となり，円に内接する四角形の対角の和は１８０°であることが示された。

など

子どもたちはペアやグループで伝え合うことを通して，互いのワークシートに描いた図や証明を積極的に用いて根拠をより明確にしていくだろう。ここでは，これまでの図形に関する知識や論理立てて説明してきた経験を駆使して，多様な証明が示されるだろう。ある程度子どもたちの話し合いが進んだところで，授業者は，子どもたちが書いた証明をとりあげ，矛盾のない証明となっているか全体で確認していく。自分が思いつかなかった視点で書かれた証明を見て感嘆する声があがることも考えられる。授業者は，そのように仲間から新たな視点を得た子どもの数学的な気づきも価値づけていきたい。そして，これまでに明らかになったことをふり返りながら，疑問に思うことやさらに考えていること，考えてみたいことを追究用紙に記入するよう伝える。子どもたちからは，以下のような意見が出るだろう。

- ５点を通る円は無いだろうと思っていたが，五角形や六角形も円に内接するのか調べてみたい
- 正多角形なら何角形でも円に内接しそうだ
- 五角形以上になると，特徴がつかみにくい
- 五角形や六角形では，対角はどの角で考えればよいのかわからない
- 円に外接する四角形も考えてみたい

など

(4) 円と多角形に関する追究活動

（２時間　本時はその１）

子どもたちが前時までに円と多角形について抱いた疑問やさらに考えてみたいことは，これまでの学習を発展的に捉えたものであることが予想される。授業者はそれらを整理し，追究テーマとして子どもたちに提示する。そして，子どもたちはテーマを一つ選び，前時までに明らかになったことを基に追究活動に入っていく。その際には，自分が設定した追究テーマと同じテーマの仲間とグループを組むこととし，グループの人数は２～４人程度とする。明らかにしたことは，レポートとしてまとめていくことを子どもたちに伝えておく。

追究テーマの例
①円に内接する多角形（五角形～）の性質
③多角形（五角形～）が円に内接する条件
③円に外接する四角形の特徴

以下は，追究活動での予想される子どもたちの伝え合う様子である。

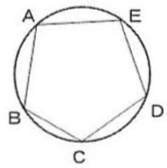
テーマ①では対角の定義について，五角形以降はその捉えを柔軟に考える必要が出てくるだろう。対角を向かい合う角から隣り合わない角へと捉え直したり，多角形を奇数角形と偶数角形と分類したりすることで，新たな性質がみえてくるだろう。授業者も子どもたちの思考に寄り添いながら，隣り合わない内角について提案することも想定している。そして，円に内接する多角形の性質を「どのような多角形でも言えるのではないか」と一般化して考え，帰納的な考察から演繹的な考察へと，根拠をより明確にしていく姿を期待している。

五角形・六角形と具体的な図形で考察した後の予想される子どもたちの考えは以下の通りである。

①円に内接する多角形（五角形～）の性質

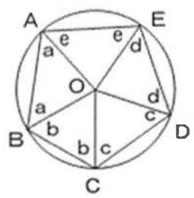
〈ア　円に内接する五角形を調べてみよう〉
- 四角形のように対角の和の関係があるのだろうか
- 五つの角の場合，対角はどれだろうか

(ｱ) 角度を測ってみよう



- $\angle A = 100^\circ$　$\angle B = 110^\circ$
  $\angle C = 65^\circ$　$\angle D = 118^\circ$
  $\angle E = 117^\circ$
- $\angle A + \angle C = 165^\circ$
  $\angle B + \angle D = 228^\circ$
  $\angle E = 117^\circ$　互いに関係がないと思う
- 正五角形の場合を考えよう
  $\angle A + \angle C = 216^\circ$
  $\angle B + \angle D = 216^\circ$
  $\angle E = 108^\circ$　何か関係があるのだろうか

(ｲ) 二等辺三角形の性質を利用してみよう



- 角の数が奇数だから，対角を考えると，一つ余る
- 余る角を二つに分けて考えると，$\angle A + \angle C + \angle d$ と $\angle B + \angle D + \angle e$ が，等しくなりそうだ
- $\angle A + \angle C + \angle d = \angle B + \angle D + \angle e$
  $= \angle a + \angle b + \angle c + \angle d + \angle e$
  $= 720^\circ \div 2 = 360^\circ$

(ｳ) 中心角と円周角の関係を利用してみよう
- 中心角の和が，うまく求められない
- 四角形の場合，中心角が３６０°になったから，五角形だと７２０°になるかもしれない
- 正五角形だと，

$2\angle a+2\angle c=108^\circ\times 2+108^\circ\times 2$
$=432^\circ$ …①

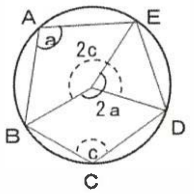
　$\angle E/2$ の大きさの円周角（$\angle e=54^\circ$）を考えて，その中心角（108°）を①に足すと，

$432^\circ+108^\circ=540^\circ$

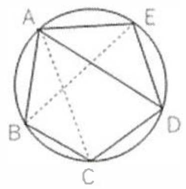
つまり，$2\angle a+2\angle c+2\angle e=540^\circ$

$\angle a+\angle c+\angle e=270^\circ$

- 五角形の２組の対角の和に残りの角の和を足すと，２７０°になる（正五角形に限定）

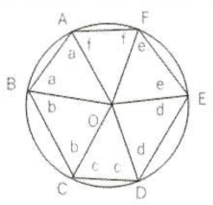


(ｴ) 四角形と三角形に分けて調べてみよう
- 三角形は必ず円に内接するから，五角形を三角形と四角形に分けてみよう
- 補助線を引いてみたが，何か言えるだろうか



〈イ　円に内接する六角形を調べてみよう〉
- 「対角」は，向かい合っている角で考えたが，３組の角の関係がわからない
- 「対角」については，「隣り合わない内角」「１点とばしの角」として考えてみると何か言えそうだ
- 「隣り合わない内角」の和は３６０°になる
- 六角形の場合は，証明ができそうだ

(ｱ) 二等辺三角形の性質を利用してみよう
- 四角形の場合と同じように１点とばしの角の和を求めることが



　円に内接する六角形 ABCDEF において，中心 O から各頂点を結ぶ半径をひき，六つの二等辺三角形それぞれの底角を図のようにおく。

　このとき，六角形の内角の和は７２０°より，

$2(\angle a+\angle b+\angle c+\angle d$
$+\angle e+\angle f)=720^\circ$

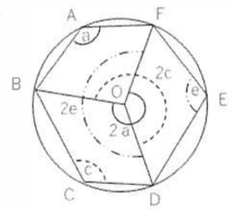
また，六角形の隣り合わない内角の和について，

$\angle A+\angle C+\angle E$
$=(\angle a+\angle f)+(\angle b+\angle c)+(\angle d+\angle e)$
$=\angle a+\angle b+\angle c+\angle d+\angle e+\angle f$
$=360^\circ$ …㋐

よって，$\angle B+\angle D+\angle F=720^\circ-360^\circ$
$=360^\circ$ …㋑

　㋐㋑より，円に内接する六角形の隣り合わない内角の和は３６０°であることが示された

(ｲ) 中心角と円周角の関係を利用してみよう
- 四角形と同じように考えてみると，１点とばしの角の中心角の和は，ちょうど２周分だから７２０°になる
- 隣り合わない内角の和は，７２０°の半分で３６０°になる
- 証明が書けそ



　円に内接する六角形 ABCDEF において，

$\angle A=a$，$\angle C=c$，$\angle E=e$ とする。

$\overset{\frown}{BF}$ に対する中心角と円周角より，

$\angle BOF=2a$

同様にして，$\overset{\frown}{DB}$，$\overset{\frown}{FD}$ について，

$\angle DOB=2\angle c$

$\angle FOD=2\angle e$

図より，$2\angle a+2\angle c+2\angle e=720^\circ$

$\angle a+\angle c+\angle e=360^\circ$

よって，

$\angle A+\angle C+\angle E=360^\circ$ …㋐

また，六角形の内角の和は７２０°より，

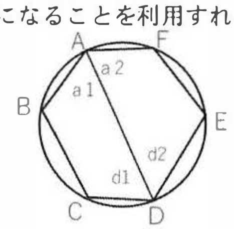
$\angle B+\angle D+\angle F=720^\circ-360^\circ$
$=360^\circ$ …㋑

　㋐㋑より，円に内接する六角形の隣り合わない内角の和は３６０°であることが示された。

(ｳ) 円に内接する四角形を利用してみよう
- 円に内接する四角形の対角の和が１８０°である

ことは分かっているから，六角形を２つの四角形に分割してみよう

・角を二つに分けて，それぞれの四角形で対角の和が１８０°になることを利用すれば証明できそうだ



円に内接する六角形 ABCDEF において，頂点 A と D を結び，円に内接する四角形 ABCD と四角形 ADEF に分ける。この図のように∠ A を∠ a1 と∠ a2，∠ D を∠ d1 と∠ d2 に分ける。

四角形 ABCD において，円に内接する四角形の対角の和は１８０°より，

∠ a1 ＋∠ C ＝１８０°　…㋐

四角形 DEFA において，同様にして，

∠ E ＋∠ a2 ＝１８０°　…㋑

㋐＋㋑より，

（∠ a1 ＋∠ C）＋（∠ E ＋∠ a2）＝３６０°

（∠ a1 ＋∠ a2）＋∠ C ＋∠ E ＝３６０°

∠ A ＋∠ C ＋∠ E ＝３６０°　…㋒

同様にして，四角形 DEFA において，

∠ B ＋∠ D ＋∠ F ＝３６０°　…㋓

㋒㋓より，円に内接する六角形の隣り合わない内角の和は３６０°であることが示された。

〈ウ　四角形，五角形，六角形と考えてみよう〉

・円に内接する偶数角形の隣り合わない内角の和は，四角形，六角形，八角形と角が増えるごとに，１８０°ずつ大きくなる

・角の数が２つ増えると隣り合わない内角の和が１８０°大きくなる

・円に内接するｎ角形（ｎは偶数）の隣り合わない内角の和は，９０°×（ｎ－２）になる

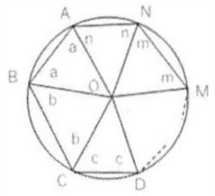
内接する偶数角形	隣り合わない内角の和
四角形	１８０°
五角形	２７０°
六角形	３６０°
⋮	⋮
ｎ角形	９０°×（ｎ－２）

・多角形の内角の和の半分になっている

・円に内接する多角形の隣り合わない内角の和は，規則性がありそうだから，証明を考えてみよう

〈エ　９０°×（ｎ－２）を証明しよう〉

(ｱ) 二等辺三角形の性質を用いて証明しよう



円に内接する偶数ｎ角形 ABC…N において，中心Ｏから各頂点を結ぶ半径をひき，（ｎ－２）個の二等辺三角形それぞれの底角を図のようにおく。

このとき，ｎ角形の内角の和は

１８０°×（ｎ－２）より，

２（∠ａ＋∠ｂ＋∠ｃ＋…＋∠ｎ）

＝１８０°×（ｎ－２）

またｎ角形の隣り合わない内角の和について，

∠ A ＋∠ C ＋∠ E ＋…＋∠ M

＝（∠ｎ＋∠ａ）＋（∠ｂ＋∠ｃ）＋（∠ｄ＋∠ｅ）＋…＋（∠l＋∠ｍ）

＝∠ａ＋∠ｂ＋∠ｃ＋…∠ｎ

＝｛１８０°×（ｎ－２)｝÷２

＝９０°×（ｎ－２）…㋐

よって，

∠ B ＋∠ D ＋∠ F ＋…＋∠ N

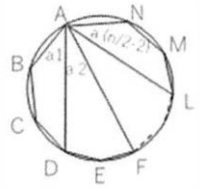
＝１８０°×（ｎ－２）－９０°×（ｎ－２）

＝９０°×（ｎ－２）…㋑

㋐㋑より，円に内接する偶数ｎ角形の隣り合わない内角の和は，９０°×（ｎ－２）であることが示された。

・ｎが奇数でも，ｎ番目の角を分割し，隣り合わない角の和を考えると，９０°×（ｎ－２）で求められる

(ｲ) 円に内接する四角形を利用して証明しよう



円に内接する偶数ｎ角形 ABC…N において，頂点 A と D を結び，円に内接する四角形 ABCD をつくる。次に，頂点 D から１点飛ばした点 F と頂点 A を結び，円に内接する四角形 ADEF をつくる。以下同様にして，円に内接する四角形 AFGH，AHIJ，…，ALMN をつくる。このとき，∠ A を∠ a1，∠ a2，∠ a3，…，∠ａ（n-2）と分け，隣

り合う四角形で分割した∠Dを∠d1，∠d2とし，∠Fを∠f1，∠f2，…，∠Lを∠ℓ1，∠ℓ2とする。円に内接する各四角形の∠Aとそれと隣り合わない内角の和の総和は，

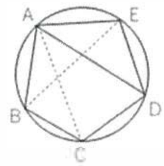
(∠a1＋∠C)＋(∠a2＋∠E)
＋(∠a3＋∠G)＋…＋(∠a(n-2)＋∠M)
＝180°＋180°＋180°＋…＋180°
＝１８０°×(ｎ－２)／2
＝９０°×(ｎ－２)…㋐

また，(∠a1＋∠C)＋(∠a2＋∠E)
＋(∠a3＋∠G)＋…＋(∠a(n-2)＋∠M)
＝(∠a1＋∠a2＋∠a3＋…＋∠a(n-2))＋∠C
＋∠E＋…＋∠M
＝∠A＋∠C＋∠E＋…＋∠M　…㋑

㋐㋑より，円に内接する偶数ｎ角形の隣り合わない内角の和は，９０°×(ｎ－２)であることが示された。

テーマ②について追究していく子どもたちも，テーマ①のグループと同様に，対角の定義が話題になると考える。そして，五角形や六角形が円に内接する条件をみつけようとして角の大きさを調べたり，各頂点から等距離にある点を求めたりするだろう。しかし，多くの子どもたちにとって円に内接する条件を明確に述べることは難しいと予想される。子どもたちは，テーマ①のように円に内接する五角形や六角形を図示し，逆の命題から考察していくと考える。そこで，テーマが異なっていても，互いの考えを聞いてみたいと思う子どもがいた際には，テーマを越えた子どもたちの対話も認めていく。予想される子どもたちの考えは以下の通りである。

②多角形（五角形～）が円に内接する条件
- 対角はどことどこの角になるのだろう
- 円に内接する条件を角の大きさから調べよう
- 各頂点からの距離が等しい点が見つけられないだろうか
- 円に内接する五角形や六角形の角の大きさを幾つか調べてみたけど，特徴は見つからない
- 正多角形なら円に内接する
- 円に内接する多角形の性質を見つけてから考えた方がよさそうだ
- テーマ①の人の考えを聞いてみたい
- 三角形（Δ ADE）は必ず円に内接するが，四角形ABCDの対角の和が１８０°なら円に内接するのか



- 分けて考えると円が一つに一致しない
- 円周角の定理の逆を利用して，∠AEB＝∠ACBという条件を付ければ，３点A，D，Eを通る円と４点A，E，B，Cを通る円が一致するので，５点を通る円が描くことができる

など

授業者は，各テーマで追究している子どもたちの様子を見て，今考えていることや明らかになってきたこと，困っていることなどを，全体で共有する時間を随時とっていく。子どもたちは，それぞれのテーマから共通することに気づいたり，考察していくうえでのヒントをもらったりすることができるだろう。

②多角形（五角形～）が円に内接する条件
- 円に内接する条件が見つけ出せない
- 円に内接する五角形や六角形の性質を知りたい

①円に内接する多角形（五角形～）の性質
- 円に内接する五角形は何が言えるのか
- 条件を付ければ，円に内接する五角形の性質がありそう
- 円に内接する六角形は，隣り合わない内角の和が３６０°になることが言える
- 対角を向かい合う角とすると性質は見つからないが，隣り合わない内角で考えると３６０°が言える

②多角形（五角形～）が円に内接する条件
- テーマ①から，円に内接する六角形の内角が３６０°だとわかったから，その値をヒントに条件を考えてみよう

など

子どもたちは，全体で共有したことから，改めて自分のテーマについて考えていく。円に多角形が内接する条件や性質を明らかにしていくことで，図形同士の関係性や新たな性質を見いだしていくだろう。その際に，子どもたちが「本当に言えるのか」と何度も問い直しながら，根拠を明確にしようとする姿勢を大切にしたい。子どもたちは，追究活動から得られたことをレポートにまとめ，後に互いにふり返ることで，図形の世界の広がりを感じることができるだろう。

以下は，授業後のふり返りに書かれると思われる子

どもたちの言葉である。

- 円に内接する多角形の隣り合わない内角の和は，９０°×（ｎ－２）で求められる
- 円に内接する奇数角形は，奇数角形を二等辺三角形に分割することで，証明できる
- 円に外接する多角形だったら，どうなるだろうか
- 多角形を円と合わせて考えることで，その内角の和について新しい性質があったことに驚いた
- 成り立ちそうな性質を証明することができたことが嬉しかった
- これまでに学んできた図形の性質が多くの場面で活用することができた
- 図形は自分たちで新しい性質が発見できるからおもしろい
- 発見した性質を利用して，まだ明らかになっていない円の性質も見つけてみたい

など