数学科授業案

数 学 科 授 業 案

授業者 杉 山 元 希

1 日 時 令和元年10月17日（木） 第1時 10：20～11：10

2 学 級 1年D組 （1年D組教室）

3 題 材 名 **伴って変わる数量についてグラフを基に考察しよう**

－聖火ランナーが駿府城公園に来る！－

4 題材の目標

聖火ランナーの動きと写真を撮りに行く人の動きを，グラフを基に，式や表と関連付けて考察することを通して，正負の向きや比に着目したりして誰もが納得できる説明にしていくとともに，事象を数理的に捉えるよさに気づくことができる。

5 題 材 観

(1) 身近な事象を関数として捉えること

現代社会において，私たちは日常的に身の回りの事象について変化や対応の様子を把握したり，「関数」の考えを用いて考察し将来を予測したりしています。例えば，電車で旅行をする時，電車の出発時刻から起床時刻を割り出したり，欲しいものを手に入れるために，どれだけ節約していけばよいかを判断したりしているでしょう。その際，頭の中は，多様な数量についての様々な関数関係が巡っています。それは，物事を関数として捉えることが，問題の解決に有効な場合が多いと考えられるからだと言えます。また，グラフは二つの数量関係が一目でわかり，グラフを基に式の意味を考えたり，グラフを基に表の数値を予測したりできることも関数（比例）のよさと言えるでしょう。

関数の学びによって私たちは，表，式，グラフを関連付け，表を用いて帰納的に発見した性質を式に基づいて演繹的に説明したり，演繹的に説明された性質がグラフのどのような特徴に結びついているのかを考察したりすることができます。関数の考えを用いて考察することができれば，物事の変化をより明確に捉えることができ，誰もが納得できる問題解決への足がかりになるでしょう。

(2) 聖火ランナーが駿府城公園を走る

2020年東京オリンピック・パラリンピックに向けて，聖火ランナーが3月に福島を出発し，6月24日に静岡を通過します。オリンピック関連のイベントが身近な地域で行われることは，誰にとっても興味をひくものでしょう。聖火ランナーは，各都道府県にゆかりのある人が選ばれます。知人や有名人が走るともなれば，きっと実際に見に行きたくなることでしょう。しかし，走り去っていくランナーに声援を送るためには，ランナーの走るコースや時間を把握し，通り過ぎる時刻を予測する必要があります。

本題材では，聖火ランナーが駿府城公園の周りを何周か走ることとし，その様子を自分も移動しながら，いろいろな場所から写真に撮ろうとする場面を想定します。その際，聖火ランナーと写真を撮る人の速さをそれぞれ一定とすると（実際には速さはゆっくり走る程度と明確に決められておらず，約200 mで交代する），それぞれの進んだ距離は走り出してからの時間に比例します。聖火ランナーの動きと写真を撮る人の動きを何となく理解できていても，頭の中でイメージしていることを明確に伝えることは難しいでしょう。そのため，頭の中でイメージしている動きを数理的に捉え，言葉や式，図，表，グラフを関連付けて説明していくことが必要になります。それらを考察する過程で，聖火ランナーと写真を撮る人の動きを客観的に捉えることができるでしょう。

(3) 聖火ランナーの動きを比例とみなすこと

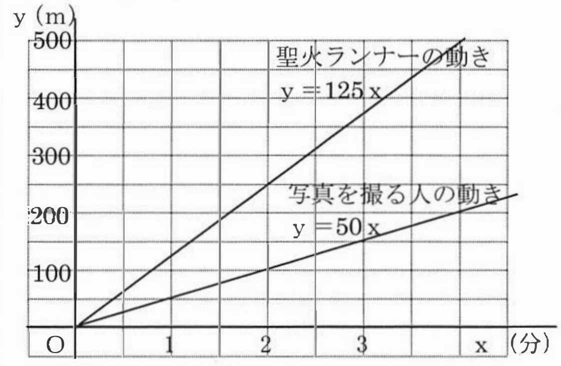
私たちは比例の考えを当たり前のように使っていますが，今という断面を見るのではなく，常に一定の割合で変化していく，連続性のある事象はそれほど多くありません。そのため，問題を解くうえでいくつもの条件が重なり複雑化しているとき，いくつかの条件を捨象し，理想化して考えたり，いくつかの条件を一時的に無視して，単純な場合に直して考えたりすることが重要となります。

今回の聖火ランナーの動きを考える際も，風の影響や走者の疲労，交代による遅れは考えず，一定の速度で進むことができるとみなすことが必要です。そして，それをグラフにすることにより動きの連続性が示されます。

(4) グラフを基に，式や表と関連付ける

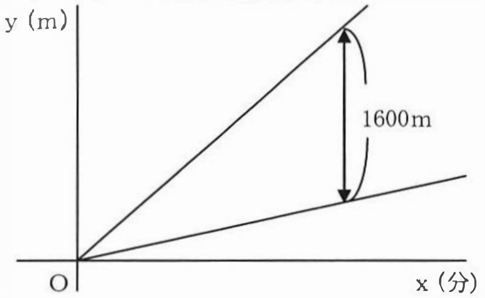
駿府城公園1周の長さを1600ｍとしたとき，聖火ランナーと写真を撮る人が，グラフ1のように同じ場所をスタートしたとすると，次に写真を撮ることができるのはどの地点と言えるでしょうか。

【グラフ1】スタートからの時間と距離

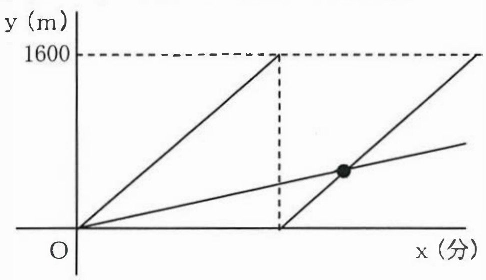


もし一直線の道を同じ方向に進んでいるのであれば，写真を撮る人はもう一度聖火ランナーに出会うことはできません。周回コースだからこそ，一周回って写真を撮ろうとしている人に，聖火ランナーが追いつく形で再び写真を撮ることができます。この様子をグラフで表すと次のようになります。

【グラフ2】二人の間の距離に注目



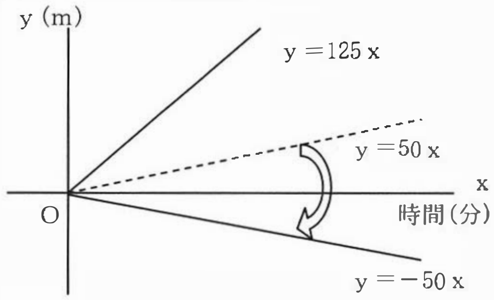
【グラフ3】一周回ってスタートに戻る



再び写真を撮ることができるのは，上のグラフで考えると，差が1600ｍになるときなので，これを式で表すと，125ｘ－50ｘ＝1600となり，ｘ＝21分20秒と言うことになります。スタートしてから聖火ランナーは2666.66…（m），写真を撮る人は，1066.66…（m）移動した地点と言うことができます。

次に，二人が駿府城公園の周りを逆回りに進む場合を考えてみます。聖火ランナーの進む向きを正の向き，写真を撮る人の進む向きを負の向きと考えと，写真を撮る人の動きは，式でｙ＝－50ｘと表すことができます。

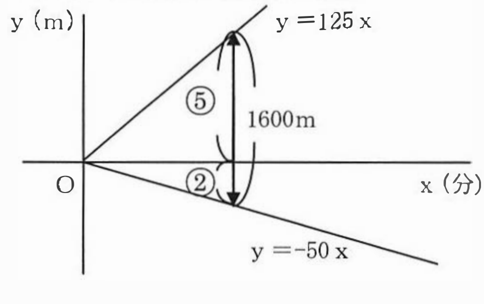
【グラフ4】正・負の向きを意識



二人の動きを表にしてみると，以下のようになります。グラフから数値を読み取ることで，およその時間や距離を把握することができます。

スタートしてからの時間（分）	1分	2分	…	8分	9分	10分
聖火ランナーが進んだ距離（m）	125	250	5：2	1000	1125	1250
写真を撮る人が進んだ距離（m）	50	100		400	450	500
合わせた距離（m）	175	350	…	1400	1575	1750

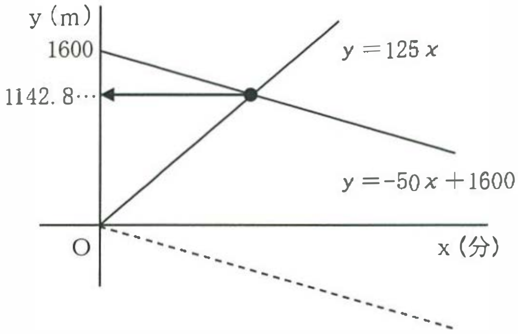
【グラフ5】二人の間の距離に注目



表やグラフ5から，二人が出会う時は聖火ランナーが進んだ距離と写真を撮る人が進んだ距離の和が1600ｍになるときであることが見えてきます。これを式で表すと，125ｘ＋50ｘ＝1600となり，ｘ＝9.142857…と言うことになります。スタートしてから聖火ランナーは1142.857…（m），写真を撮る人は，457.142857…（m）移動した地点と言うことができます。

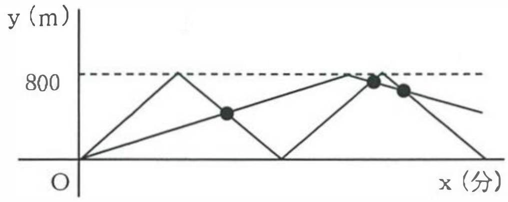
このとき，125：50＝5：2であることから，聖火ランナーが進んだ道のりをａｍとすると，ａ：1600＝5：7と表すこともできます。

【グラフ６】写真を撮る人を1600mから移動したと考えた



グラフ５のように長さの比が対応していることは，グラフを図形的に捉え，三角形の合同や相似の学びにつながるとも言えるでしょう。逆向きに進む様子を，式でｙ＝50 ｘとｙ＝－50 ｘで区別したり，再びグラフに戻って傾きの比５：２に着目したりできることは，関数を学ぶうえで大切な過程であると考えます。また，グラフ６のように，平行移動させていくことで，右上がりと右下がりのグラフの交点が現れます。この場合，聖火ランナーと写真を撮る人が同じ場所をスタートしたのではなく，互いが1600ｍ離れた地点から近づいていると条件を一部変えて考えたことになります。交点が出会う場面になるという考え方を取り入れていくことは，２年生の連立方程式や１次関数の学びにつながるでしょう。

【グラフ７】ｙをスタート地点からの距離と考えた



さらに，グラフ７ように，ｙ軸を「スタートした地点からの距離」とすると，同じ方向に進んだ場面と逆方向に進んだ場面を一つのグラフに表すことができます。グラフはその瞬間だけでなく，二人の動きを連続的に捉え，頭の中でイメージしている動きをより明確にすることができます。これにより，それまで見えていなかった性質や新たな視点を得ることができるのです。

⑸　本題材で味わう数学科ならではの文化

本題材で味わう「数学科ならではの文化」を，「**聖火ランナーの動きと写真を撮りに行く人の動きを，グラフを基に，式や表と関連付けて考察することを通して，事象を数理的に捉えるよさを感じながら，正負の向きや比に着目したりして誰もが納得できる説明にしていくこと**」とします。

そのような文化を味わうためには，仲間に自分の考えを伝えることで根拠を明確にしていく経験や，仲間の考えを聞くことによって客観的な意見にしていく経験を積み重ねていくことが大切です。事象の考察において，論理性と客観性を意識した自分たちなりの意見にしていくことで，事象を数理的に捉えるよさを感じる姿は，数学科ならではの文化をより深く味わっているのではないかと考えます。

⑹　題材と子どもたち

子どもたちは，駿府城公園の内堀の周りをランニングすることを「堀ラン」と呼び，親しみを感じています。そこで，堀ランをトレーニングの場として，地域の方との交流の場としてだけでなく，学習の場とすることができないかと考えました。

聖火ランナーが身近な地域を走ることは，子どもたちの興味をひく一つの要因になるでしょう。聖火ランナーが実際に駿府城公園の回りを何周も走ることはないかもしれませんが，Ａ地点からＢ地点に向かって走るのではなく，周回する動きにすることで，反時計回りと時計回りの向きが生まれます。子どもたちは，これまでの右上がりのグラフだけでは表現できない事象を，どのように表せばよいのか思考し，工夫を凝らしていくでしょう。座標で学んだ知識や正の数・負の数で考えてきた基準や正負の向きの考え方を駆使しながら，自分たちなりのグラフ（図，表）をつくっていくでしょう。グラフの形状が異なれば，「なぜそのような形になるのか」「式との関連はどのようになっているのか」など，仲間の考えを知りたくなるのではないでしょうか。

そして，子どもたちが，身の回りの事象を数学的な表現（数や言葉，式，図，表，グラフ）と関連付けて考えることで，論理的かつ客観的に解決にあたるとともに，事象を数理的に捉えるよさを味わってほしいと願い，題材を構想しました。

参考文献：片桐重男（2004）『数学的な考え方の具体化と指導』　明治図書
竹下知行・坂本健司・熊倉啓之（2011）『数学的な思考力・表現力を鍛える授業24』　明治図書
東京都中学校数学教育研究会研究部関数委員会（2012）
『中学校数学科　関数指導を極める』　明治図書
粕元新一郎（2009）『中学校新数学科「数学的な表現力」を育成する授業モデル』　明治図書

6　新学習指導要領との関連

C　関数

(1)　比例，反比例について，数学的活動を通して，次の事項を身に付けることができるよう指導する。

イ　次のような思考力，判断力，表現力等を身に付けること。

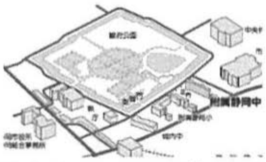
（ア）比例，反比例として捉えられる二つの数量について，表，式，グラフなどを用いて調べ，それらの変化や対応の特徴を見いだすこと。

（イ）比例，反比例を用いて具体的な事象を捉え考察し表現すること。

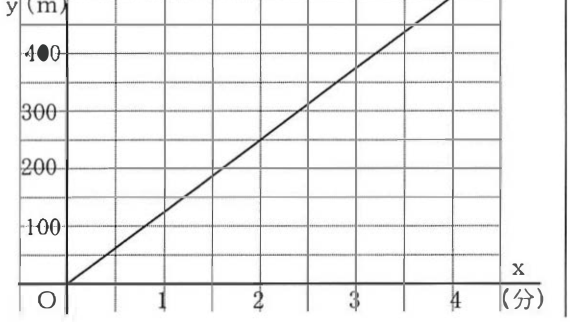
7　題材構想（全4時間）

(1)　聖火ランナーが駿府城公園に来る！（1時間）
(2)　2枚目の写真はどの地点から撮れたか？（1時間）
(3)　グラフと式，グラフと表を関連付けて考察する（2時間　本時はその1）

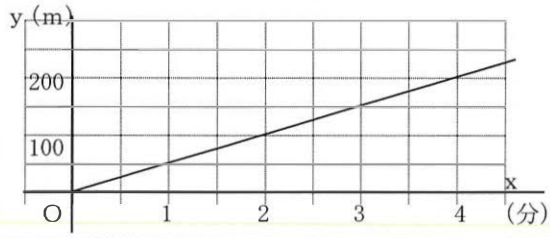
(1)　聖火ランナーが駿府城公園に来る！（1時間）



授業者は2020年6月に聖火ランナーが駿府城公園に来ることを紹介します。子どもたちは，聖火ランナーの募集があったことや県内のコース等について知っている情報を挙げながら，身近な場所で行われるイベントに興味を抱いていくことでしょう。駿府城公園では，一年間で様々なイベントが行われますが，聖火ランナーが走る姿を見ることができるのは一生に一度あるかないかのことです。子どもたちの中にも実際に声援を送りに行きたいと考える人はいるでしょう。そこで，授業者は以下のような文章とグラフA，Bを配ります。

> 家康くんたち4人は，地域の広報を担当する係をしています。聖火ランナーが駿府城公園の周りを走る様子を，写真に収めることにしました。はじめは東御門で1枚目の写真を撮り，その後，別の場所に移動して2枚目の写真を撮ろうと考えています。
>
> 2枚目の写真はどのあたりで撮ることができるのでしょうか。ただし，駿府城公園1周の長さは1600 mとし，聖火ランナーと写真を撮る人は，次のグラフのように移動していると考えるものとします。
>
> 【グラフA】聖火ランナーの動き
>
> 
>

【グラフB】写真を撮る人の動き



授業者は，グラフのx軸はスタートしてからの時間（分），y軸は門からの距離（m）であることを確認します。子どもたちは，まずグラフの整数の値を読みとりながら，どの地点の写真を撮ることができるのかを予想していくでしょう。

写真を撮る人が，聖火ランナーと同じ向きに移動しているのか，反対向きに移動しているのかによって，撮る場所が変わってくるという意見が出たところで，同じ向きに移動した場合と逆向きに移動する場合に分かれて考えることを提案します。その際，4人組をつくり，2人ずつ分かれるようにします。授業者は，「2枚目の写真はどの地点から撮れたのか」という問いを確認し，ペアで考える時間を十分にとります。子どもたちは，次のように発言していくでしょう。

- グラフを重ねて考えてみたけど，聖火ランナーと写真を撮る人がどんどん離れていってしまう
- グラフから聖火ランナーは4分で500 m，写真を撮る人は2分で100 m移動していることがわかる
- 時間ごとに変わっていく距離の関係を表にしたい
- 式にすれば，方程式にできそうだ。もっと正確に写真を撮る場所を求めたい
- 2枚目を撮った後はどうなるのだろう

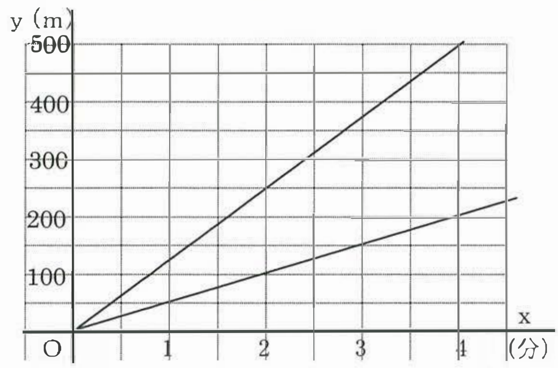
など

※授業の中では，距離（進んだ距離）と道のりを同じものとして考えます。

(2)　2枚目の写真はどの地点から撮れたか？（1時間）

授業者は，次時にそれぞれの意見を発表し合うことを伝え，誰がどちらの場合を考えているのかがわかるように板書します。子どもたちは，以下のような疑問を解消するために，同じ考え方をしている人のところへ集まり，意見を重ね合わせていくでしょう。授業者は，困り感のある子どもに寄り添い，具体的な数値を埋めることから考えるよう促します。また，電卓を使うことができるように用意しておきます。

【二人の動きを重ねたグラフ】



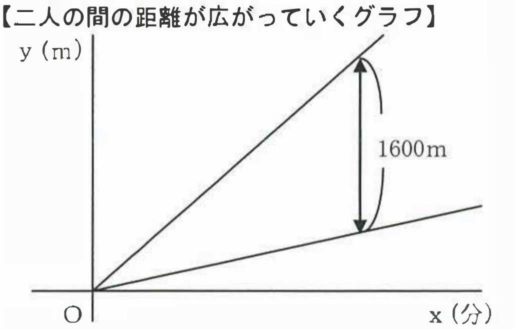
＜グラフを見た疑問＞

- グラフはどんどん幅が広がっていくから，同じ方向に進むと出会うことができないのではないか。経験（理屈）上，出会うはずなのにおかしい
- 逆方向に進む様子は，どのようにグラフに表せばよいのだろう
- yの上限は1600ｍだろう。答えの地点は整数なのだろうか

など

（ア）聖火ランナーと同じ向きに移動する場合

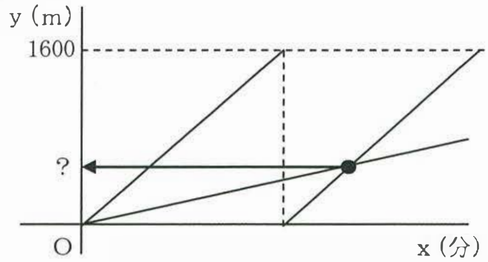
【二人の間の距離が広がっていくグラフ】



- 1分あたり 125 − 50 ＝ 75ｍずつ幅が広がっている
- 幅が1周分の1600ｍになっている地点が出会う場所だ

など

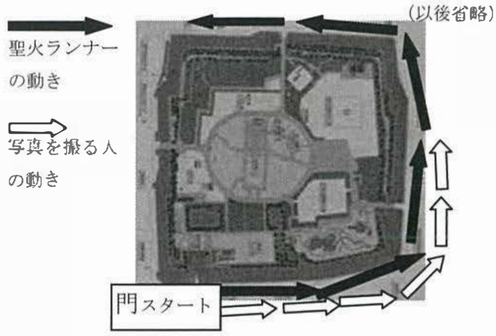
【進んだ距離が1600mでスタートに戻るグラフ】



- 1周1600ｍなのだからそれ以上の距離になるのではなく，一度切り取ってまた0ｍからスタートさせればよいのではないか

など

図に書き込む考え



- 聖火ランナーが1周回ってきてから，写真を撮る人に追いつくことになる

など

表を用いた考え

スタートしてからの時間（分）	1分	2分	3分	4分	5分	…
聖火ランナーが進んだ距離（m）	125	250	375	500	625	…
写真を撮る人が進んだ距離（m）	50	100	150	200	250	…
差の距離（m）	75	150	225	300	375	…

18	19	20	21	22	23
2250	2375	2500	2625	2750	2875
900	950	1000	1050	1100	1150
1350	1425	1500	1575	1650	1725

- 表から21分から22分の間であるとわかる。正確な距離は計算で求めるしかないのではないか

など

式を用いた考え

スタートしてからの時間を x 分とすると,

$$\begin{aligned}125x - 50x &= 1600\\ 75x &= 1600\\ x &= 64/3\\ x &= 21\text{分}20\text{秒}\end{aligned}$$

聖火ランナーの走った距離は,

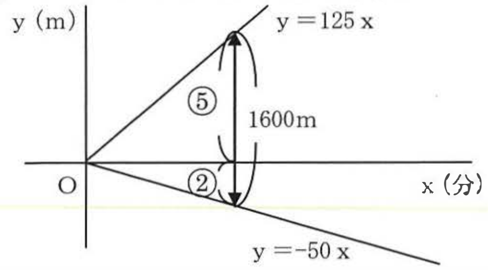
$$125 \times 64/3 = 2666.66\cdots$$

すでに 1 周回っているので，スタートした地点から約 1066 m の地点だ

など

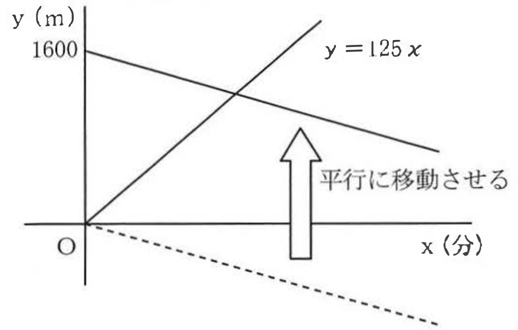
（イ）聖火ランナーと逆向きに移動する場合

【二人の間の距離が広がっていくグラフ】



- 逆回りに進む様子は y ＝ 50 x のグラフを x 軸で（線）対称にすればよい。互いに離れていくので，二人の間の距離が 1600 m になる地点を見つければよい
- 傾きの絶対値が 125 : 50 になっているので，1600 m を 5 : 2 で分けることができれば，聖火ランナーの進んだ距離，写真を撮る人の進んだ距離を求めることができる

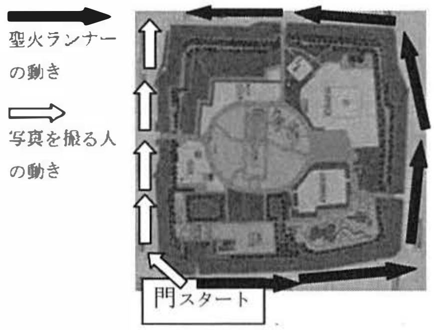
【二人の間の距離が短くなっていくグラフ】



- 反対から進むと言うことは，1600 m 離れたところから近づいてくると考えることができるだろう。グラフで考えると原点を通る直線を 1600 m のところに平行に移動させると考えればよいだろう。でも，交点の目盛りが読みとれない

など

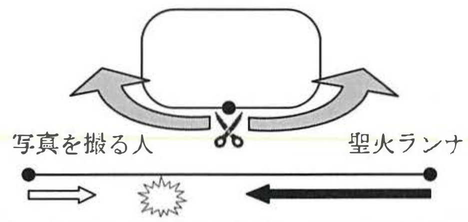
図に書き込む考え



- 聖火ランナーと写真を撮る人が出会うだいたいの場所はわかる。それぞれの矢印をセットで考えるとよさそうだ

など

線分図の考え



- スタート地点で円を切り取り，直線で表したとすると，両側から互いに近づいて出会う問題に置き換えることができる

など

表を用いた考え

スタートしてからの時間（分）	1 分	2 分	3 分	4 分	5 分	…
聖火ランナーが進んだ距離（m）	125	250	375	500	625	…
写真を撮る人が進んだ距離（m）	50	100	150	200	250	…
合わせた距離（m）	175	350	525	700	875	…

6 分	7 分	8 分	9 分	10 分	11 分
750	875	1000	1125	1250	1375
300	350	400	450	500	550
1050	1225	1400	1575	1750	1925

- 表から 9 分から 10 分の間であるとわかる
- 合わせた距離は，175 m ずつ増えている

など

式を用いた考え

スタートしてからの時間をx分とすると,

$125x + 50x = 1600$

$175x = 1600$

$x = 64/7$

聖火ランナーの走った距離は,

$125 \times 64/7 = 1142.8\cdots$ (m)

など

授業者は「追究の記録」にわかったことや疑問に感じたことを記入するよう伝え，次時につなげます。子どもたちは，以下のように「追究の記録」に記入していくでしょう。

<わかったこと・気づいたこと>

- 文章問題や今回のようなの問題を理解するには，まず図に書き込んでみたり，表にまとめてみたりするとよい。表にしてみると，規則性が見えてくるので，そのあと考えやすくなる
- 図でだいたいの場所はわかるけれど，表や式にすることで，根拠が明確になっていく
- グラフの5：2の考えを聞いた時，なるほどと驚いた。式や表でも5：2の関係は成り立つ

<疑問・さらなる追究>

- 同じ向きに進んだ時，追い抜いたことがわかるグラフにしたい
- 特定の地点で写真を撮るためには，どのくらいの速さで移動しなければいけないのだろう
- 条件を変えて問題を考えてみたい

など

(3) グラフと式，グラフと表を関連付けて考察する

（2時間　本時はその1）

授業者は，前時までに考察した「2枚目の写真がどの地点から撮ることができたのか」について，全体で共有していきます。ここでは「聖火ランナーが進んだ距離」から場所を示す子どもが多いと考えられるため，授業者は板書で場所を示しながら，門からの距離が何mであるのかを確認していきます。そして，第1時にグループ分けしてあった4人組で，その理由を説明し合う時間を設けます。

授業者は，グループを回りながら，話し合いの様子を把握し，他のグループにはない発想や考え方で説明している子どもには，学級全体に広げるよう促していきます。全体で意見を発表する際には，わかったことだけでなく，まだ疑問に感じていることも発言できる雰囲気を大切にしていきます。

- 二つのグラフの差はどんどん広がってしまうので，2枚目の写真を撮ることができる場所はわからないと思ったが，二人の間（差）の距離が1600mになればよい
- 表にまとめていったら，聖火ランナーは1分間に125m進んで，写真を撮る人は1分間に50m進んでいることに気がついた。同じ方向に進んでいるということは速さの差の $125 - 50 = 75$ m/分で間が広がっているから，$75x = 1600$ になる時を求めれば，走り出してからの時間がわかる。その式に，代入して距離を求めればよい
- 逆向きに進んだ場合，差は $125 - (-50)$ になるので，175mずつ広がっていくことになる。なので $125x + 50x = 1600$ で求められる。同じ向きの場合は $125x - 50x$ が1600mになればよい
- 聖火ランナーが1周回ってきた時の様子をグラフでどのように表せばいいか考えてみた。1600mまで来たところで基準（スタート地点）に戻ったと考えることができれば，写真を撮る人と追い抜くところをグラフに表すことができる

など

説明が一段落したところで，授業者は「同じ向きに移動する時と逆向きに移動する時を比較してみて，気づいたことや共通することを伝え合おう」となげかけます。子どもたちは，明確な根拠をもち，グラフ，式，表のそれぞれの特徴を関連付けながら見つけたことを伝えていくでしょう。

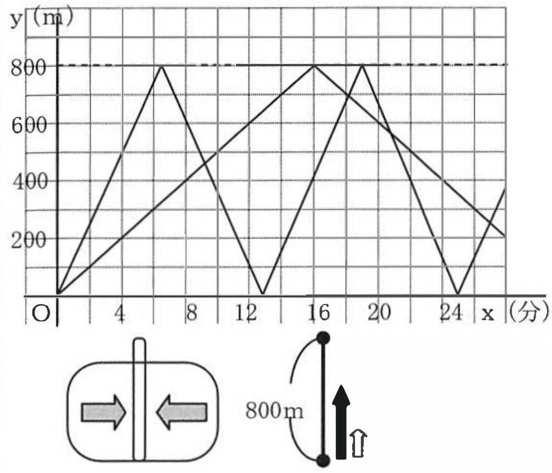
- 方程式で考えるときに，逆方向に進むのに，なぜ「速さ」を足すのかがわからなかったけれど，グラフを見たときにハッとした。グラフをみることで式が立てやすくなった
- グラフで逆方向に進む様子は，グラフを反転させて右下がりにすればよい。中学校に入ってから負の数には正の数と反対向きの性質があると学習したが，比例のグラフでは正の向きが右上がり，負の向きが右下がりになると考えられる
- グラフの交点は二人が出会った場所を表している
- グラフがクロスする考え方が，はじめはよくわからなかったが，互いに出会う場面を表すにはよい方法だ。比例は原点を通る直線と限定されている感じがしたけれど，ひっくり返したり，ずらしたりすればもっといろいろな問題に活用できる
- グラフで言うと，二人の間（差）は幅で表される。速さの比が $125:50 = 5:2$ であることから，二人の進んだ距離の比も5：2になると言える。逆方向に進んだ場合は，全体で進んだ距離と聖火ランナーの進んだ距離の比が7：5になる

など

授業者は，互いの説明や気づいたことに納得できていることを確認しながら，もう一度グラフに注目させます。そして，「y軸が何を表しているのか」と問いかけます。子どもたちは，y軸は「距離」と答えながら，「進んだ距離」なのか「門からの距離」なのか疑

問に感じるでしょう。そこで，授業者は，ｙ軸を「門からの距離」として，グラフを再度書き直す時間を設けます。子どもたちは，試行錯誤しながら次のようなグラフをつくっていくでしょう。

【ｙをスタートした門からの距離と考えたグラフ】

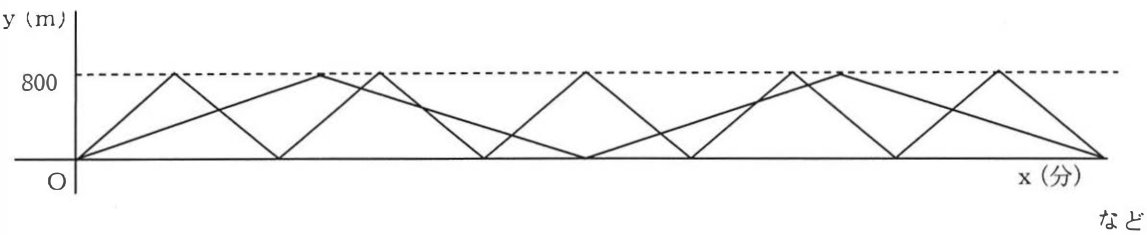


・駿府城公園をぎゅっと細くして単純に考えてみると，直線上を往復しているように考えられるのではないか

など

子どもたちは，新たにできたグラフを見て，「重なる点は何を表しているのか」「この先はどのようになっているのか」など，さらに疑問をもち，仲間とともにグラフについて考えを深めていくでしょう。

・このグラフは，同じ方向に進んだ場面と逆方向に進んだ場面を一つのグラフで表している。クロスするとき，出会う場面と追いつく場面が傾きから読み取ることができるだろう
・山の数が，とんがっている山が５個分と，ゆるやかな山２個分でぴったりスタート地点でそろう。実際の動きで考えると，聖火ランナーが５周回る間に，写真を撮る人は２周回ってくるということだ。このことからも，聖火ランナーと写真を撮る人の進んだ距離の比が５：２になっているとわかる



など

授業者は，今回の問題を通して，「関数を考えるうえで大切にすべきこと」について個人で考える時間をとります。子どもたちは，これまで学習したことと今回の問題を比較したり，重ね合わせたりしながら，自分たちなりの「関数を考えるうえで大切にすべきこと」をつくっていくでしょう。

子どもたちは，以下のように「追究の記録」に記述するでしょう。

・動き（関数）を捉えるとき，その瞬間を見るには式がわかりやすい。瞬間瞬間を並べたものが表であり，さらに細かくして動きを捉えたものがグラフと言える。なので，関数を考えるときにはグラフを見ることが大切だろう
・正負の向きがあるおかげで，逆向きに進む今回のような問題も，グラフの傾きを負の数にすることで理解できた。だから，負の数の考え方も関数で大切になっている
・規則性を発見するなら表がやっぱりわかりやすい。具体的な数値があったほうが考えやすいからだ。でも，今回グラフを基に変化を知ることもできたし，式にして具体的な数値を求めることもできた。もしかして，グラフは情報が多くて，関数を考えるときに一番わかりやすいのではないか。だから，グラフを読み取ることが大切だ
・実際に走るときには今回考えたようにはならないかもしれないけれど，条件を設定して考えることで，規則性に気づくことができ，自分一人では思いつかなかったような考えにたどり着くことができた。関数を考えるうえでは，条件が大切だろう

など

子どもたちが身の回りの事象を「関数」として捉えるよさを感じ，これからの生活に生かそうとしていく姿に思いを馳せ，題材を閉じたいと思います。