育児時間を組み込んだモデルにおける児童手当と人的資本の安定的な定常状態に関する一考察

メタデータ	言語: ja 出版者: 静岡大学人文社会科学部 公開日: 2019-11-22 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 村田, 慶 メールアドレス: 所属:
URL	https://doi.org/10.14945/00026877

論　説

育児時間を組み込んだモデルにおける児童手当と人的資本の安定的な定常状態に関する一考察

村　田　　　慶

Ⅰ．はじめに

内閣府「平成30年版少子化社会対策白書」によれば，わが国における夫婦の理想的な子どもの数 (平均理想子ども数) は1987年から減少傾向にあり，2015年には2.32人と過去最低となっている．また，実際に持つつもりの子どもの数 (平均予定子ども数) も2.01人と過去最低となっている．実際に持つつもりの子供の数 (平均予定子ども数) が理想的な子どもの数 (平均理想子ども数) を下回る理由としては,「子育てや教育にお金がかかりすぎるから」が56.3%と最も多く，30～34歳では８割を超えている．すなわち，わが国では少子化が深刻化しており，その主な要因は育児費用および教育費の負担であることが分かる．わが国では，育児費用および教育費の負担軽減を目的として，各家計に対して児童手当が支給されている．経済学において，児童手当とは，子どもの数に応じて各家計に支給される補助金であり，現役世代から税金を徴収し，それを財源として次世代に支給されることから，世代間重複モデルによる分析がしばしば行われている．

世代間重複モデルによる児童手当と出生率に関する先行研究としては，Groezen, Leers and Mejidam (2003) が代表的である．Groezen, Leers and Mejidam (2003) では，小国開放経済を設定することによって賃金率を一定とし，それが各個人の所得水準と等しくなるとした上で，政府が定額税および国民年金保険料を徴収し，前者を財源とする児童手当，後者を財源とする賦課方式年金をモデル化している[1]．また，Groezen, Leers and Mejidam (2003) では，各個人の生涯効用は第１期における消費と子どもの数，および第２期における消費によって決まるとしている．しかしながら，Groezen, Leers and Mejidam (2003) では，児童手当と出生率の関係についてはモデル化されているものの，教育支出と出生率の関係については考慮されておらず，さらには，経済学的に，教育支出による影響を受ける子どもの人的資本蓄積についても分析されていない．

世代間重複モデルによる教育支出と人的資本蓄積に関する先行研究としては，教育支出を公教育と私教育に分類したものが数多く見られ，分析手法としては，以下のようなアプローチが存在

[1] 子育て支援の出生率への影響，あるいは出生率の変化を通じた年金財政への影響については，Nishimura and Zhang (1992)，Peters (1995)，およびKato (1999) においてもモデル化がなされている．

する．1つ目は，Glomm and Ravikumar (1992)，Gradstein and Justman (1997)，およびSaint Paul and Verdier (1993) で見られるように，両教育を別々に捉えるというものである．2つ目は，Benabou (1996)，Eckstein and Zilcha (1994)，およびKaganovich and Zilcha (1999) で見られるように，両教育が補完関係にあるというものである．3つ目は，Cardak (2004a,b) および村田 (2011, 2013)[2] で見られるように，両教育について，比較検討のみならず，効用比較による選択を分析するというものである．これらの先行研究では，公教育支出を政府による所得比例課税，私教育支出を親世代からの所得移転によって行うという点は共通しているものの，人口規模を一定，もしくは人口成長率を一定としており，出生率の内生化は考慮されていない．

出生率の内生化を組み込んでの教育支出と人的資本蓄積に関しては，村田 (2017b) において一つの考察がなされている．村田 (2017b) では，Groezen, Leers and Mejidam (2003) における生涯効用の決定要素として，次世代が獲得する人的資本水準を新たに組み入れている[3]．また，村田 (2017b) では，教育支出が次世代に均等配分されるという設定を行うことによって，人的資本蓄積において人口動態を組み入れた設定となっている．ただし，Groezen, Leers and Mejidam (2003) とは異なり，児童手当の財源について，教育支出と人的資本蓄積に関する先行研究における公教育支出と同様，所得比例課税を財源としている．ただし，教育支出は私教育のみを想定しており，さらに，老年期における経済活動を考慮しないため，貯蓄および公的年金に関する議論は捨象している．

本稿では，村田 (2017b) における児童手当と人的資本蓄積に関する世代間重複モデルについて，以下のような拡張・修正を行う．村田 (2017b) では，人的資本蓄積に人口動態を組み入れているものの，教育支出を子ども全員に均等配分するというのは，モデル設定としてはやや窮屈と言える．さらに，村田 (2017b) では，各個人が生涯効用を最大化するにあたり，児童手当が政府による所得比例課税を財源とする点についても制約条件として組み込んでいる．しかしながら，各個人が仮に政府の行動を完全に把握できるとしても，児童手当の支給額はともかく，財源確保までを考慮して行動するというのは稀であろう．それに対し，本稿モデルでは，前者の問題については，育児時間を組み込むことによって，教育支出を均等配分するという設定をすることなく，児童手当が人的資本蓄積に及ぼす影響について分析可能なモデルを構築する．また，各個人は生涯

[2] 村田 (2011, 2013) では，Cardak (2004a) において，Glomm and Ravikumar (1992) に倣い，生涯効用関数に余暇時間，人的資本関数に学習時間を新たに組み入れ，分析範囲の拡張・修正を行っている．

[3] Glomm and Ravikumar (1992) およびCardak (2004a,b) では，人的資本蓄積に関わる効用の決定要素として，次世代への教育支出を組み込んでいる．村田 (2017b) でも，出生率を内生化しているとはいえ，次世代の一人当たりが受け取る教育支出を導入しており，同じ類の設定がなされている．しかしながら，村田 (2017a) で述べているように，人的資本蓄積が教育支出と親世代の人的資本水準のみで決まるというシンプルなタイプの人的資本関数であっても，次世代への教育支出そのものから効用を得ることと，次世代が獲得する人的資本水準から効用を得ることとでは，意味合いが異なってくる点には注意が必要である．

効用を最大化するにあたり，児童手当の財源確保 (政府の行動) を制約条件に組み込まないケースについて検討することによって，より現実的な拡張・修正を行う．さらに，本稿モデルにおける人的資本関数は，村田 (2017b) よりも複雑化しているものの，人的資本関数の影響力パラメータおよび所得税率の条件設定によって，村田 (2017b) と同様，人的資本について，安定的な定常状態がただ１つ存在するケースを設定することが可能であることを示す．加えて，本稿モデルにおける人的資本関数は一見，定常状態の人的資本水準の具体値を求めることは困難に思われるが，上記のような影響力パラメータの条件設定の下では，具体値を求めることも可能であることを示す．

本稿における構成として，まずⅡ節において，村田 (2017b) に育児時間を組み入れ，さらに，各個人の生涯効用の最大化において，政府による児童手当の財源確保 (政府の行動) を制約条件に組み込まないケースについて検討した基本モデルを概観する．その上で，Ⅲ節において，人的資本関数を導出し，人的資本について，安定的な定常状態がただ１つ存在するための各パラメータの条件設定を行う．さらに，定常状態の人的資本水準の具体値を導出する．

Ⅱ．モデル設定

各個人の経済活動は，２期間にわたって行われるとする．本稿では，２期について，$t-1$期とt期を基準とし，各期に生まれた個人をそれぞれ，$t-1$世代，t世代の個人と呼ぶこととする．また，各世代の子供は，第２期に誕生するものとする．また，各期における総時間を１で基準化する．

Ⅱ．1．人的資本形成

各世代の個人は，第２期において自身の人的資本を形成するものとする．本稿では，人的資本形成は親世代による教育支出と親世代の人的資本水準によって決定付けられるとする．すなわち，t世代の各個人の$t+1$期における人的資本形成は，(1)のように決定付けられる．

$$h_{t+1} = e_t^{\gamma} h_t^{\delta}\ ;\ \gamma, \delta \in (0,1), \gamma + \delta < 1 \tag{1}$$

(1)において，h_{t+1}はt世代の各個人が$t+1$期において獲得する人的資本水準，e_tは$t-1$世代の各個人のt期におけるt世代への教育支出，h_tは$t-1$世代の各個人がt期において獲得する人的資本水準である．本稿では，$t+1$期における一国全体の効率労働H_{t+1}を(2)のように定義する．

$$H_{t+1}=\prod_{j=0}^{t}n_jL_0h_{t+1}=(n_0\times n_1\times\cdots n_t)L_0h_{t+1} \tag{2}$$

(2)において，L_0は初期における人口規模，n_jはj期における各個人の子どもの数である．

Ⅱ．２．効用最大化

各世代の個人は，第２期において，人的資本の供給を行うことによって労働所得を得るものの，子ども一人につき，ϕの育児時間が必要であるとする．本稿モデルでは，生産者の存在を考慮しないため，賃金率が存在しない．したがって，$t-1$世代の各個人のt期における労働所得y_tは，(3)のように決定付けられる．

$$y_t=(1-\phi n_t)h_t\text{；}0<\phi<1 \tag{3}$$

(3)において，n_tは$t-1$世代の各個人のt期における子どもの数である．各世代の個人は，第２期において，政府から所得税を徴収され，それを財源とする児童手当を子どもの数に応じて支給される．その上で，各個人は労働の可処分所得と児童手当を自身の消費と子どもへの教育支出に配分するものとする．t世代の各個人が$t+1$期において直面する予算制約は(4)のようになる．

$$(1-\tau_t)y_t+\eta n_t=c_t+n_te_t\text{；}0<\tau_t<1,\ \eta>0 \tag{4}$$

(4)において，τ_tはt期における所得税率，ηは各期において支給される子ども一人当たりに対する児童手当，c_tは$t-1$世代の各個人のt期における消費である．本稿モデルでは，Glomm and Ravikumar (1992) やCardak (2004a,b) に倣い，所得比例課税を仮定する．単純化のため，遺産贈与は考慮しないものとする．本稿では，村田 (2017b) と同様，児童手当ηは所得税を財源として支給されると仮定する[4]．それは(5)のように定義される．

[4] Groezen, Leers and Mejidam (2003) では，児童手当の財源を定額税としているが，本稿では，村田 (2017b) と同様，所得比例課税を財源とする．わが国における所得税は累進課税であり，それを踏まえると，定額税よりも所得比例課税を想定する方が望ましいであろう．累進課税のケースでは，所得水準によって税率が変わり，議論がやや複雑化することから，本稿では捨象する．

$$\eta = \frac{\tau_t \prod_{j=0}^{t-1} n_j L_0 y_t}{\prod_{j=0}^{t} n_j L_0} = \frac{\tau_t y_t}{n_t} \tag{5}$$

政府は子どもの数 (出生率) と労働所得を所与として，児童手当ηが維持されるように所得税率を調整するものとする．したがって，t期における所得税率τ_tは(6)のように定義される．

$$\tau_t = \frac{\eta n_t}{y_t} \tag{6}$$

以上を前提として，各個人は生涯効用を最大化するように行動するものとする．本稿における生涯効用とは，２期間全体において得られる効用水準を意味し，それは第２期における消費水準と子どもの数，および次世代が獲得する人的資本水準によって決定付けられるものとする．$t-1$世代の各個人の２期間全体における効用水準をV^{t-1}とおくと，それは以下のように表される．

$$\underset{c_t, n_t, e_t}{Maximize} \quad V^{t-1} = (1-\alpha)\log c_t + \alpha \log n_t + \beta \log h_{t+1}\ ;\ \alpha, \beta \in (0,1)$$
$$subject\ to \quad (1-\tau_t)y_t + \eta n_t = c_t + n_t e_t,\ y_t = (1-\phi n_t)h_t,\ h_{t+1} = e_t^{\gamma} h_t^{\delta}$$

ここで，$1-\alpha$とαはそれぞれ，第２期における自身の消費および子どもの数に対する選好パラメータ，βは割引率である．一階条件より，$t-1$世代の各個人のt期における最適な子どもの数，最適教育支出，および最適消費はそれぞれ，(7)，(8)，および(9)のように導出される[5]．

$$n_t = \frac{(\alpha - \beta\gamma)(1-\tau_t)h_t}{\phi(1-\tau_t)h_t - \eta} \tag{7}$$

$$e_t = \frac{\beta\gamma\{\phi(1-\tau_t)h_t - \eta\}}{1-\alpha+\beta\gamma} \tag{8}$$

$$c_t = \frac{(1-\alpha)\{\phi(1-\tau_t)h_t - \eta\}}{1-\alpha+\beta\gamma} \tag{9}$$

[5] (7)，(8)，および(9)の導出過程については，付録１を参照せよ．

(7)について，本稿では，$\alpha > \beta\gamma$を仮定する[6].

Ⅲ．人的資本蓄積と定常状態

Ⅱ節を踏まえ，本節では，定常状態の人的資本水準について考察する．(8)を(1)に代入すると，人的資本関数は(10)のように求められる．

$$h_{t+1} = \left[\frac{\beta\gamma\{\phi(1-\tau_t)h_t - \eta\}}{1-\alpha+\beta\gamma}\right]^{\gamma} h_t^{\delta} \tag{10}$$

(10)から分かるように，本稿モデルにおける人的資本関数は，村田 (2017b) よりも複雑化している．そこで，まず定常状態の存在について議論することが必要となる．定常状態の人的資本水準を$h_{t+1} = h_t = h_s$とおくと，(11)の関係式が成り立つ．

$$(h_s)^{\frac{1-\delta}{\gamma}} = \frac{\beta\gamma}{1-\alpha+\beta\gamma}\{\phi(1-\tau_t)h_s - \eta\} \tag{11}$$

(11)について，本稿では，左辺をLS，右辺をRSと定義する．(10)と(11)より，定常状態の近傍におけるdh_{t+1}/dh_tは，(12)のように導出される[7].

$$\frac{\gamma\phi(1-\tau_t)h_s}{\phi(1-\tau_t)h_s - \eta} + \delta \tag{12}$$

人的資本の定常状態について，安定性条件は$0 < dh_{t+1}/dh_t < 1$である[8]．したがって，(13)が満たされれば，h_sは安定的な定常状態の人的資本である．

$$(1-\gamma-\delta)\phi(1-\tau_t)h_s > (1-\delta)\eta \tag{13}$$

本稿モデルでは，$\gamma + \delta < 1$を仮定しているため，所得税率τ_tが(14)の条件を満たせば，安定的な

6 この仮定を置かなければ，最適な子どもの数がゼロもしくはマイナスとなるケースが生じてしまい，これは現実的に有り得ないためである．

7 (12)の導出過程については，付録2を参照せよ．

8 (12)より，人的資本関数が$dh_{t+1}/dh_t > 0$を満たしていることは明らかである．

人的資本h_sは存在することが分かる.

$$\tau_t < 1 - \frac{(1-\delta)\eta}{(1-\gamma-\delta)\phi h_s} \tag{14}$$

⒁より，本稿モデルでは，人的資本の定常状態が安定的であるためには，所得税率に上限が存在することが分かる．さらに，⒀が満たされるならば，$(1-\gamma-\delta)\phi h_s > (1-\delta)\eta$ となることから，$0 < \tau_t < 1$ が成り立つため，⑷との矛盾はないことも確認できる．

本稿モデルでは，村田 (2017b) との比較を可能とするため，人的資本について，安定的な定常状態がただ１つしか存在しないケースを想定する．$\gamma + \delta < 1$ であるため，⑾より，このケースにおけるLSとRSは図１のように描かれる．

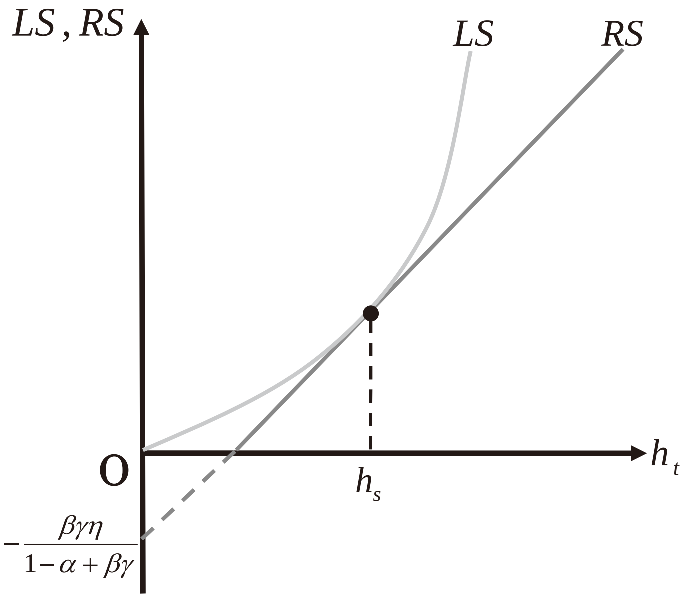

図１：人的資本の定常状態

図１から分かるように，人的資本の定常状態h_sにおいては，⑾におけるLSとRSの傾きが等しくなることから，h_sは⒂のように導出される[9]．

[9] ⒂の導出過程については，付録３を参照せよ．

$$h_s = \left[\frac{\beta\gamma^2 \phi (1-\tau_t)}{(1-\delta)(1-\alpha+\beta\gamma)} \right]^{\frac{\gamma}{1-\gamma-\delta}} \tag{15}$$

⒂より，人的資本の定常状態における所得税率は⒃のように導出される．

$$\tau_t = 1 - \frac{(1-\delta)(1-\alpha+\beta\gamma)}{\beta\gamma^2\phi} (h_s)^{\frac{1-\gamma-\delta}{\gamma}} \tag{16}$$

ここで，人的資本の定常状態h_sが安定的であるためには，⒃における所得税率は同時に，⒁の条件を満たさなければならない．したがって，⒁と⒃より，定常状態の人的資本水準h_sは，⒄の条件を満たさなければならないことが分かる．

$$\left\{ \frac{\beta\gamma^2\eta}{(1-\gamma-\delta)(1-\alpha+\beta\gamma)} \right\}^{\frac{\gamma}{1-\delta}} < h_s < \left\{ \frac{\beta\gamma^2\phi}{(1-\delta)(1-\alpha+\beta\gamma)} \right\}^{\frac{\gamma}{1-\gamma-\delta}} \tag{17}$$

⒄について，本稿モデルでは，⒅を仮定する．

$$\eta < \frac{(1-\gamma-\delta)(1-\alpha+\beta\gamma)}{\beta\gamma^2} \left\{ \frac{\beta\gamma^2\phi}{(1-\delta)(1-\alpha+\beta\gamma)} \right\}^{\frac{1-\delta}{1-\gamma-\delta}} \tag{18}$$

⒅より，本稿モデルでは，一定額とはいえ，各期において支給される子ども一人当たりに対する児童手当には，上限が存在することが分かる．

ところで，⑴と⑽より，人的資本関数は原点を通ることは明らかであり，図１のように，人的資本の定常状態が１つしか存在しないケースでは，人的資本関数は図２のように描かれる．

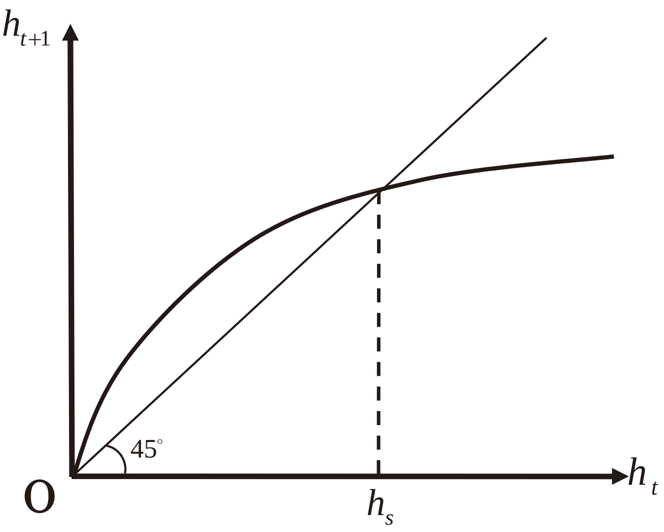

図２：人的資本関数と定常状態

以上の議論から，本稿モデルでは，村田 (2017b) に育児時間を新たに組み込み，さらに，各個人の生涯効用の最大化において，政府による児童手当の財源確保を制約条件に組み込まないことから，人的資本関数が複雑化したものの，人的資本関数の影響力パラメータに条件を与えることによって，村田 (2017b) と同様，安定的な定常状態がただ１つ存在するケースを設定すること，さらには，定常状態の人的資本水準の具体値を求めることが可能であることが確認できる．

Ⅴ．結語

本稿モデルでは，村田 (2017b) における児童手当と人的資本蓄積に関する世代間重複モデルについて，育児時間を新たに組み込むことによって，教育支出を次世代に均等配分するのではなく，各々に配分することが可能なモデルを構築し，さらには，各個人は生涯効用を最大化するにあたり，政府による児童手当の財源確保を制約条件に組み込まないケースについて検討することによって，分析内容の現実的な拡張・修正を行った．その上で，人的資本関数における影響力パラメータの条件を設定することによって，村田 (2017b) と同様，人的資本について，安定的な定常状態がただ１つ存在するケースを設定すること，さらには，定常状態の人的資本水準の具体値を求めることも可能であることを示した．すなわち，本稿モデルでは，人的資本がただ１つの安定的な定常状態を持つという，村田 (2017b) と同じ条件を満たしつつも，分析範囲が大きく拡張されている．

本稿における分析について，今後の展望を述べる．本稿モデルでは，村田 (2017b) との比較を目的とすることから，人的資本の定常状態を考察するにあたり，整理した人的資本関数の左辺と右辺が，定常状態において接しているケースについて考察した．しかしながら，本稿モデルにおける整理した人的資本関数では，左辺と右辺が２点で交わり，人的資本の定常状態が２つ存在するケース，さらには，左辺と右辺が交点を持たず，人的資本の定常状態が存在しないケースも起こり得る．特に，人的資本の定常状態が２つ存在するケースにおいては，安定的な定常状態と不安定的な定常状態の組み合わせになることが予想される．これらの点については，稿を改めて論じたい．

参考文献

［1］ Benabou, R. (1996) “Heterogeneity, Stratification, and Growth: Macroeconomics Implications of Community Structure and School Finance,” *The American Economic Review*, Vol.86, pp.584-609.

［2］ Cardak, B.A. (2004a) “Education Choice, Endogenous Growth and Income Distribution,” *Economica*, Vol.71, pp.57-81.

［3］ Cardak, B.A. (2004b) “Education Choice, Neoclassical Growth, and Class Structure,” *Oxford Economic Papers*, Vol.56, pp.643-666.

［4］ Eckstein, Z. and I. Zilcha (1994) “The Effects of Compulsory Schooling on Growth, Income Distribution and Welfare,” *Journal of Public Economics*, Vol.54, pp.339-359.

［5］ Glomm, G. and B. Ravikumar (1992) “Public versus Private Investment in Human Capital: Endogenous Growth and Income Inequality,” *Journal of Political Economy*, Vol.100, pp.818-834.

［6］ Gradstein, M. and M. Justman (1997) “Democratic Choice of an Education System: Implications for Growth and Income Distribution,” *Journal of Economic Growth*, Vol.2, pp.169-183.

［7］ Groezen, B. van T. Leers and L. Mejidam (2003) “Social Security and Endogenous Fertility: Pension and Child Allowance as Siamese Twins,” *Journal of Public Economics*, Vol.87, pp.233-251.

［8］ Kaganovich, M. and I. Zilcha (1999) “Education, Social Security, and Growth,” *Journal of Public Economics*, Vol.71, pp.289-309.

［9］ Kato, H. (1999) “Overlapping Generations Model with Endogenous Population Growth,” *Journal of Population Problems*, vol.25, pp.15-24.

［10］ Nishimura, K. and J. Zhang (1992) “Pay-As-You-Go Public Pensions with Endogenous Fertility,” *Journal of Public Economics*, Vol.48, pp.239-258.

［11］ Peter, W. (1995) “Public Pensions, Family Allowances and Endogenous Demographic Change,” *Journal of Population Economics*, Vol.8, pp.161-181.

［12］　Saint, Paul, G. and T. Verdier (1993) “Education, Democracy and Growth,” *Journal of Development Economics*, Vol.42, pp.399-407.
［13］　内閣府「平成30年版少子化社会対策白書」
https://www8.cao.go.jp/shoushi/shoushika/whitepaper/measures/w-2018/30pdfgaiyoh/pdf/s1-1.pdf
［14］　村田 慶 (2011)「教育選択と経済成長」『九州経済学会年報』第49集, pp.75-82.
［15］　村田 慶 (2013)「教育選択と内生的経済成長―ゆとり教育による弊害と教育政策の有効性に関する考察―」,『経済政策ジャーナル』第10巻第２号, pp.3-15.
［16］　村田 慶 (2017a)「効用関数と人的資本蓄積に関する一考察」『経済研究』(静岡大学) 21巻３号, pp.1-9.
［17］　村田 慶 (2017b)「児童手当と人的資本蓄積に関する一考察」『経済研究』(静岡大学) 21巻４号, pp.31-38.

付録１

制約条件式を効用関数V^{t-1}におけるc_tに代入すると，次式のようになる．

$$\begin{aligned} V^{t-1} &= (1-\alpha)\log\{(1-\phi n_t)(1-\tau_t)h_t + (\eta - e_t)n_t\} + \alpha\log n_t + \beta\log h_{t+1} \\ &= (1-\alpha)\log\{(1-\phi n_t)(1-\tau_t)h_t + (\eta - e_t)n_t\} + \alpha\log n_t + \beta\gamma\log e_t + \beta\delta\log h_t \end{aligned}$$

一階条件である$\partial V^{t-1}/\partial e_t = 0$より，

$$\frac{\partial V^{t-1}}{\partial e_t} = \frac{-(1-\alpha)n_t}{(1-\phi n_t)(1-\tau_t)h_t + (\eta - e_t)n_t} + \frac{\beta\gamma}{e_t} = 0$$

上の式を変形して整理すると，$t-1$世代の各個人のt期における最適教育支出は，(A1-1) のように求められる．

$$\begin{aligned} -(1-\alpha)n_t e_t + \beta\gamma(1-\phi n_t)(1-\tau_t)h_t + \beta\gamma(\eta - e_t)n_t &= 0 \\ (1-\alpha+\beta\gamma)n_t e_t &= \beta\gamma\{(1-\phi n_t)(1-\tau_t)h_t + \eta n_t\} \\ e_t &= \frac{\beta\gamma\{(1-\phi n_t)(1-\tau_t)h_t + \eta n_t\}}{(1-\alpha+\beta\gamma)n_t} \end{aligned} \tag{A1-1}$$

また，$c_t = (1-\phi n_t)(1-\tau_t)h_t + (\eta - e_t)n_t$より，$t-1$世代の各個人の$t$期における最適消費は，次

式のように求められる．

$$
\begin{aligned}
c_t &= (1-\phi n_t)(1-\tau_t)h_t + \eta n_t - \frac{\beta\gamma\{(1-\phi n_t)(1-\tau_t)h_t + \eta n_t\}}{1-\alpha+\beta\gamma} \\
&= \frac{(1-\alpha)\{(1-\phi n_t)(1-\tau_t)h_t + \eta n_t\}}{1-\alpha+\beta\gamma}
\end{aligned}
\tag{A1-2}
$$

(A1-1) および (A1-2) を効用関数に代入すると，次式のようになる．

$$
\begin{aligned}
V^{t-1} = (1-\alpha)\log\frac{(1-\alpha)\{(1-\phi n_t)(1-\tau_t)h_t + \eta n_t\}}{1-\alpha+\beta\gamma} + \alpha\log n_t \\
+ \beta\gamma\log\frac{\beta\gamma\{(1-\phi n_t)(1-\tau_t)h_t + \eta n_t\}}{1-\alpha+\beta\gamma} - \beta\gamma\log n_t + \beta\delta\log h_t
\end{aligned}
$$

一階条件である $\partial V^{t-1}/\partial n_t = 0$ より，

$$
\frac{\partial V^{t-1}}{\partial n_t} = \frac{(1-\alpha)\{-\phi(1-\tau_t)h_t + \eta\}}{(1-\phi n_t)(1-\tau_t)h_t + \eta n_t} + \frac{\alpha}{n_t} + \frac{\beta\gamma\{-\phi(1-\tau_t)h_t + \eta\}}{(1-\phi n_t)(1-\tau_t)h_t + \eta n_t} - \frac{\beta\gamma}{n_t} = 0
$$

上の式を変形して整理すると，$t-1$ 世代の各個人の t 期における最適な子どもの数は，次のように求められる．

$$
\begin{aligned}
\frac{(1-\alpha+\beta\gamma)\{-\phi(1-\tau_t)h_t + \eta\}}{(1-\phi n_t)(1-\tau_t)h_t + \eta n_t} + \frac{\alpha-\beta\gamma}{n_t} = 0 \\
(1-\alpha+\beta\gamma)\{-\phi(1-\tau_t)h_t + \eta\}n_t + (\alpha-\beta\gamma)\{(1-\phi n_t)(1-\tau_t)h_t + \eta n_t\} = 0 \\
(1-\alpha+\beta\gamma)\{-\phi(1-\tau_t)h_t + \eta\}n_t + (\alpha-\beta\gamma)\{-\phi(1-\tau_t)h_t + \eta\}n_t \\
+ (\alpha-\beta\gamma)(1-\tau_t)h_t = 0 \\
\{-\phi(1-\tau_t)h_t + \eta\}n_t + (\alpha-\beta\gamma)(1-\tau_t)h_t = 0 \\
\{\phi(1-\tau_t)h_t - \eta\}n_t = (\alpha-\beta\gamma)(1-\tau_t)h_t \\
n_t = \frac{(\alpha-\beta\gamma)(1-\tau_t)h_t}{\phi(1-\tau_t)h_t - \eta}
\end{aligned}
\tag{A1-3}
$$

(A1-3) を (A1-1) に代入することによって，$t-1$世代の各個人のt期における最適教育支出は，次のように求められる．

$$\begin{aligned}
e_t &= \beta\gamma\left\{\frac{(1-\tau_t)h_t}{(1-\alpha+\beta\gamma)n_t}-\frac{\phi(1-\tau_t)h_t}{1-\alpha+\beta\gamma}+\frac{\eta}{1-\alpha+\beta\gamma}\right\}\\
&= \beta\gamma\left\{\frac{(1-\tau_t)h_t}{1-\alpha+\beta\gamma}\times\frac{\phi(1-\tau_t)h_t-\eta}{(\alpha-\beta\gamma)(1-\tau_t)h_t}-\frac{\phi(1-\tau_t)h_t}{1-\alpha+\beta\gamma}+\frac{\eta}{1-\alpha+\beta\gamma}\right\}\\
&= \beta\gamma\left\{\frac{\phi(1-\tau_t)-\eta}{(\alpha-\beta\gamma)(1-\alpha+\beta\gamma)}-\frac{\phi(1-\tau_t)h_t-\eta}{1-\alpha+\beta\gamma}\right\}\\
&= \frac{\beta\gamma\{\phi(1-\tau_t)h_t-\eta\}}{1-\alpha+\beta\gamma}
\end{aligned}$$

(A1-3) を (A1-2) に代入することによって，$t-1$世代の各個人のt期における最適消費は，次のように求められる．

$$\begin{aligned}
c_t &= (1-\alpha)\left\{\frac{(1-\tau_t)h_t}{(1-\alpha+\beta\gamma)n_t}-\frac{\phi(1-\tau_t)h_t}{1-\alpha+\beta\gamma}+\frac{\eta}{1-\alpha+\beta\gamma}\right\}\\
&= (1-\alpha)\left\{\frac{(1-\tau_t)h_t}{1-\alpha+\beta\gamma}\times\frac{\phi(1-\tau_t)h_t-\eta}{(\alpha-\beta\gamma)(1-\tau_t)h_t}-\frac{\phi(1-\tau_t)h_t}{1-\alpha+\beta\gamma}+\frac{\eta}{1-\alpha+\beta\gamma}\right\}\\
&= (1-\alpha)\left\{\frac{\phi(1-\tau_t)-\eta}{(\alpha-\beta\gamma)(1-\alpha+\beta\gamma)}-\frac{\phi(1-\tau_t)h_t-\eta}{1-\alpha+\beta\gamma}\right\}\\
&= \frac{(1-\alpha)\{\phi(1-\tau_t)h_t-\eta\}}{1-\alpha+\beta\gamma}
\end{aligned}$$

付録２

⑽より，dh_{t+1}/dh_t は次のように求められる．

$$\begin{aligned}
\frac{dh_{t+1}}{dh_t} = \gamma\left[\frac{\beta\gamma\{\phi(1-\tau_t)h_t-\eta\}}{1-\alpha+\beta\gamma}\right]^{\gamma-1}\frac{\beta\gamma\phi(1-\tau_t)h_t^{\delta}}{1-\alpha+\beta\gamma}\\
+\delta\left[\frac{\beta\gamma\{\phi(1-\tau_t)h_t-\eta\}}{1-\alpha+\beta\gamma}\right]^{\gamma}(h_t)^{\delta-1}
\end{aligned} \tag{A2-1}$$

さらに，⑾より，次式が得られる．

$$\left(h_s\right)^{\delta-1}=\left[\frac{1-\alpha+\beta\gamma}{\beta\gamma\left\{\phi\left(1-\tau_t\right)h_s-\eta\right\}}\right]^{\gamma} \tag{A2-2}$$

(A2-2) を (A2-1) に代入することによって，定常状態の近傍における dh_{t+1}/dh_t は，次のように導出される．

$$\begin{aligned}
\left.\frac{dh_{t+1}}{dh_t}\right|_{h_{t+1}=h_t=h_s} &= \gamma\left[\frac{\beta\gamma\left\{\phi\left(1-\tau_t\right)h_t-\eta\right\}}{1-\alpha+\beta\gamma}\right]^{\gamma-1}\frac{\beta\gamma\phi\left(1-\tau_t\right)}{1-\alpha+\beta\gamma}\times\left[\frac{1-\alpha+\beta\gamma}{\beta\gamma\left\{\phi\left(1-\tau_t\right)h_s-\eta\right\}}\right]^{\gamma}\left(h_s\right) \\
&\quad +\delta\left[\frac{\beta\gamma\left\{\phi\left(1-\tau_t\right)h_t-\eta\right\}}{1-\alpha+\beta\gamma}\right]^{\gamma}\times\left[\frac{1-\alpha+\beta\gamma}{\beta\gamma\left\{\phi\left(1-\tau_t\right)h_s-\eta\right\}}\right]^{\gamma} \\
&= \gamma\left[\frac{1-\alpha+\beta\gamma}{\beta\gamma\left\{\phi\left(1-\tau_t\right)h_s-\eta\right\}}\right]\times\frac{\beta\gamma\phi\left(1-\tau_t\right)}{1-\alpha+\beta\gamma}\times h_s+\delta \\
&= \frac{\gamma\phi\left(1-\tau_t\right)h_s}{\phi\left(1-\tau_t\right)h_s-\eta}+\delta
\end{aligned}$$

付録３

定常状態の人的資本水準を $h_{t+1}=h_t=h_s$ としており，図１において，横軸に h_t をとっていることから，⑾は次式のように書き換えられる．

$$\left(h_t\right)^{\frac{1-\delta}{\gamma}}=\frac{\beta\gamma}{1-\alpha+\beta\gamma}\left\{\phi\left(1-\tau_t\right)h_t-\eta\right\} \tag{A3-1}$$

(A3-1) において，左辺 LS と右辺 RS の傾きはそれぞれ，(A3-2) と (A3-3) のように導出される．

$$\frac{dLS}{dh_t}=\frac{1-\delta}{\gamma}\left(h_t\right)^{\frac{1-\gamma-\delta}{\gamma}} \tag{A3-2}$$

$$\frac{dRS}{dh_t}=\frac{\beta\gamma\phi\left(1-\tau_t\right)}{1-\alpha+\beta\gamma} \tag{A3-3}$$

(A3-2) と (A3-3) より，定常状態の人的資本水準は，次のように導出される．

$$\frac{1-\delta}{\gamma}\left(h_t\right)^{\frac{1-\gamma-\delta}{\gamma}} = \frac{\beta\gamma\phi\left(1-\tau_t\right)}{1-\alpha+\beta\gamma}$$

$$\left(h_t\right)^{\frac{1-\gamma-\delta}{\gamma}} = \frac{\beta\gamma^2\phi\left(1-\tau_t\right)}{\left(1-\delta\right)\left(1-\alpha+\beta\gamma\right)}$$

$$h_s = \left[\frac{\beta\gamma^2\phi\left(1-\tau_t\right)}{\left(1-\delta\right)\left(1-\alpha+\beta\gamma\right)}\right]^{\frac{\gamma}{1-\gamma-\delta}}$$