# 技術進歩と貧困のわなからの脱出に関する一考察

**論　説**

# 技術進歩と貧困のわなからの脱出に関する一考察

村　田　　　慶

## Ⅰ．はじめに

本稿では，技術進歩が経済発展に及ぼす影響について，物的資本蓄積と人的資本蓄積の両方を考慮した世代間重複モデルによる一考察を行う．世代間重複モデルでは，生産者の利潤最大化により，賃金率は資本・労働比率による影響を受け，所得水準もそれによる影響を受けるが，人的資本蓄積に関する先行研究の多くでは，単純化のため，経済成長パターンが資本・労働比率の影響を受けず，人的資本蓄積のみによって決定付けられるという設定の下で考察されてきた．例えば，Galor and Tsiddon (1996, 1997) では，小国開放経済を設定することによって資本・労働比率を一定としており，Glomm and Ravikumar (1992) やCardak (2004a,b) では，生産者の存在自体を考慮しない．すなわち，これらの先行研究では，経済成長パターンが人的資本水準の一変数のみで決定されるモデル設定となっている．しかしながら，古典的な人的資本蓄積モデルとして知られるRomer (1986) およびLucas (1988) の研究背景として，それまでのSolow (1956) およびSwan (1956) が物的資本ストックの形成のみに着目し，貯蓄の役割を最重視していたのに対し，労働力人口と技能の習得も重要な成長要素とし，資本概念の拡張を行ったことが挙げられることからも，人的資本蓄積における物的資本蓄積に関する議論である資本・労働比率の影響を組み入れることが望ましい．世代間重複モデルにおいて，人的資本蓄積と物的資本蓄積の両方の影響を考慮するモデル分析は，Galor and Moav (2004) で初めて行われ，これにより，世代間重複モデルによる人的資本蓄積と経済成長に関する研究が大きく前進した．Galor and Moav (2004) では，人的資本蓄積は教育支出によって決定付けられ，それは所得移転を財源とすることから，各個人が決める最適教育支出が経済発展に伴う資本・労働比率の上昇による影響を受ける．具体的には，資本・労働比率が閾値に到達するまでは最適教育支出はゼロで決まり，閾値を上回るとプラスに転じ，資本・労働比率の上昇に伴い，増加していくという分析結果が得られている．さらに，Galor and Moav (2004) では，経済発展の段階について，資本・労働比率の上昇段階とそれに伴う教育支出の変化に基づいて定義されている．また，全人口を富裕層と貧困層に分類し，資本・労働比率の上昇は，両タイプの所得移転によって決定付けられるという設定になっており，特に，貧困層が

所得移転を行わない状態として定義される「貧困のわな」からの脱出について詳細に検討している．しかしながら，Galor and Moav (2004) における人的資本の蓄積方程式は，一般関数で与えられているため，最適教育支出の増加について，図による明示はなされていない．それに対し，村田 (2014) では，人的資本関数について，Galor and Moav (2004) と全く同じ条件を満たす具体関数を設定することによって，図による明示を可能にした．

本稿では，Galor and Moav (2004) および村田 (2014) について，技術進歩を導入することによる分析範囲の拡張・修正を行う．Galor and Moav (2004) では，生産関数に技術水準を導入しているものの，技術進歩に関する議論がなされていない．そのため，村田 (2014) では，Galor and Moav (2004) と同じ条件を満たす具体関数を設定しているとはいえ，技術水準は捨象されている．それに対し，本稿では，外生的な技術進歩が人的資本蓄積および経済発展に及ぼす影響について検討する．具体的には，Galor and Moav (2004) と同様，技術水準がヒックス中立的である場合，外生的な技術進歩は人的資本蓄積に影響を及ぼさないものの，経済発展における「貧困のわな」からの脱出に影響を及ぼすことを示す．

本稿の構成として，まずⅡ節において，村田 (2014) と同様，Galor and Moav (2004) における人的資本の蓄積方程式について，具体関数を設定した基本モデルを概観する．次に，Ⅲ節において，Galor and Moav (2004) に倣い，全人口を富裕層と貧困層に分類し，資本・労働比率の上昇段階とそれに基づく両タイプの教育支出の変化をレジームで規定し，各レジームにおける資本・労働比率の決定式と所得移転の動態，特に貧困層が次世代への所得移転を行わない「貧困のわな」からの脱出について検討する．その上で，Ⅳ節において，外生的な技術進歩が所得移転の動態および「貧困のわな」からの脱出に及ぼす影響について考察する．

## Ⅱ．モデル設定

完全競争下の閉鎖経済とする．各個人の経済活動は２期間にわたって行われる．本稿では，$t$期と$t+1$期を基準とし，各期の期首に生まれた個人をそれぞれ，$t$世代，$t+1$世代と呼ぶ．各世代の子供は第２期に誕生する．また，経済は信用制約下にあり，借り入れはできないと仮定する．さらに，各世代の人口規模は一定であり，１で基準化されるものとする．

### Ⅱ．１．最終財生産

最終財生産は，新古典派の性質を持つ生産関数で表される．$t$期における総生産量$Y_t$は，(1)のように決定付けられるとする．

$$Y_t = F(K_t, H_t) = A(K_t)^{\alpha}(H_t)^{1-\alpha} \;; \quad A > 0, \quad \alpha \in (0,1) \tag{1}$$

(1)において，$K_t$ と $H_t$ はそれぞれ，$t$ 期の期首における一国全体の資本ストックと効率的労働力，$A$ は各期における技術水準である．Galor and Moav (2004) と同様，技術水準はヒックス中立的であると仮定する．人的資本１単位当たりの生産量を $f(k_t)$ とおくと，(2)が得られる．

$$f(k_t) \equiv \frac{Y_t}{H_t} = A\left(\frac{K_t}{H_t}\right)^{\alpha} \equiv Ak_t^{\alpha} \tag{2}$$

(2)において，$k_t$ は $t$ 期における資本・労働比率である．$f(k_t)$ は新古典派の性質を持ち，強い単調増加，強い意味での凹関数であるとする．$t$ 期において，生産者は利潤 $\Pi_t$ を最大化するような $k_t$ を需要する．$t$ 期における賃金率と資本賃料率をそれぞれ，$w_t$，$r_t$ とおくと，生産者の利潤最大化問題は，次のように表される．

$$\underset{k_t}{Maximize} \quad \Pi_t = F(K_t, H_t) - w_t H_t - r_t K_t = H_t f(k_t) - w_t H_t - r_t H_t k_t$$

一階条件である $\partial \Pi_t / \partial k_t = 0$ およびゼロ利潤条件より，$k_t$ は次の条件を満たすように需要される．

$$\begin{aligned} f'(k_t) &= \alpha A k_t^{\alpha-1} = r_t \\ w_t &= f(k_t) - f'(k_t) \cdot k_t = (1-\alpha) A k_t^{\alpha} \end{aligned} \tag{3}$$

(3)より，$w_t$ は $k_t$ によって決定付けられることから，(4)のように定義できる．

$$w_t = (1-\alpha) A k_t^{\alpha} \equiv w(k_t) \tag{4}$$

### Ⅱ．２．個人

各個人は，第１期において全ての時間を人的資本の蓄積に費やし，第２期において，親世代からの所得移転を受け取り，人的資本を供給する．すなわち，$t$ 世代の個人 $i$ は，$t$ 期において全ての時間を人的資本の獲得に費やし，親世代である $t-1$ 世代からの所得移転を受け取り，人的資本を供給する．$t$ 世代の個人 $i$ の $t+1$ 期における所得水準 $I_{t+1}^{i}$ は，(5)のように決定付けられるとする．

$$I_{t+1}^{i} = w_{t+1} h_{t+1}^{i} + x_{t+1}^{i} \tag{5}$$

(5)において，$w_{t+1}$，$h_{t+1}^{i}$および$x_{t+1}^{i}$はそれぞれ，$t+1$期における賃金率，$t$世代の個人$i$が$t+1$期において獲得する人的資本水準および$t-1$世代からの遺産贈与である．また，$t+1$期における所得は，消費と$t+1$世代への所得移転に割り振られるとする．

$$c_{t+1}^{i} + b_{t+1}^{i} \leq I_{t+1}^{i}$$

ここで，$c_{t+1}^{i}$と$b_{t+1}^{i}$はそれぞれ，$t$世代の個人$i$の$t+1$期における消費水準および$t+1$世代への所得移転である．$t+1$世代の個人$i$は$t+1$期において，(6)のように，$t$世代からの所得移転を教育支出と貯蓄に振り分けるとする．

$$b_{t+1}^{i} = e_{t+1}^{i} + s_{t+1}^{i} \tag{6}$$

(6)において，$e_{t+1}^{i}$と$s_{t+1}^{i}$はそれぞれ，$t+1$世代の個人$i$の$t+1$期における教育支出および貯蓄水準である．$t$世代の個人$i$の$t+1$期における$t-1$世代からの遺産贈与$x_{t+1}^{i}$は，(7)のように決定付けられるとする．

$$x_{t+1}^{i} = s_{t}^{i} R_{t+1} = \left(b_{t}^{i} - e_{t}^{i}\right)\left(1 - r_{t+1} - \delta\right); \quad R_{t+1} \equiv 1 + r_{t+1} - \delta \tag{7}$$

ここで，$r_{t+1}$は$t+1$期における資本賃料率，$\delta$は資本の減価償却率である．(7)について，本稿では，大住 (2003) と同様，$\delta=1$を仮定する．すなわち，資本はある期間を通して完全に償却されるとする．したがって，$x_{t+1}^{i}$は最終的に，$x_{t+1}^{i}=s_{t}^{i}r_{t+1}$と定義される．

### Ⅱ．3．人的資本関数

本稿では，人的資本の蓄積方程式を(8)のように設定する．本稿では，村田 (2014) と同様，Galor and Moav (2004) における条件を満たす人的資本の蓄積方程式を具体的に設定する．

$$h_{t+1}^{i} = h\left(e_{t}^{i}\right) = \left(1 + e_{t}^{i}\right)^{\gamma}; \quad 0 < \gamma < 1 \tag{8}$$

本稿では，Galor and Moav (2004) および村田 (2014) と同様，$h_{t+1}^{i}$は$e_{t}^{i}$についての狭義の凹関数

であるとする．人的資本関数は図１のように描かれる．

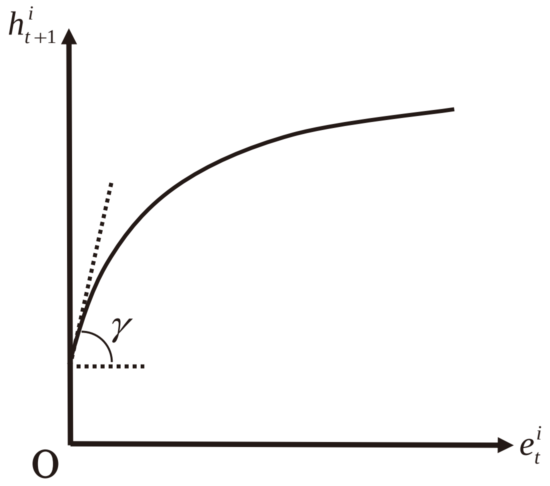


**図１：人的資本関数**

また，Galor and Moav (2004) および村田 (2014) と同様，(8)における人的資本関数は，次の条件を満たす．

$$h(0)=1, \quad \lim_{e_t^i \to 0} \frac{dh_{t+1}^i}{de_t^i} = \lim_{e_t^i \to 0} = \gamma < +\infty, \quad \lim_{e_t^i \to \infty} \frac{dh_{t+1}^i}{de_t^i} = \lim_{e_t^i \to \infty} \gamma \left(1+e_t^i\right)^{\gamma-1} = 0$$

## Ⅱ．４．最適教育支出

Galor and Moav (2004) および村田 (2014) と同様，各個人は親世代からの所得移転を財源として，所得を最大化するように自身への教育支出を行うとする．すなわち，$t$ 世代の個人 $i$ は，親世代である $t-1$ 世代からの所得移転額を上限として，所得 $I_{t+1}^i$ を最大にするように，教育支出 $e_t^i$ を決定付ける．

$$\underset{e_t^i}{Maximize} \quad w_{t+1}h_{t+1}^i + x_{t+1}^i = w_{t+1}\left(1+e_t^i\right)^{\gamma} + \left(b_t^i - e_t^i\right)R_{t+1} = w_{t+1}\left\{\left(1+e_t^i\right)^{\gamma} - \frac{R_{t+1}}{w_{t+1}}e_t^i\right\} + b_t^i R_{t+1}$$

ここで，次式が成立する．

$$\frac{R_{t+1}}{w_{t+1}}=\frac{\alpha Ak_{t+1}^{\alpha-1}}{(1-\alpha)Ak_{t+1}^{\alpha}}=\frac{\alpha}{(1-\alpha)k_{t+1}}$$

したがって，$R_{t+1}/w_{t+1}$ は $k_{t+1}$ が増大するにつれて減少することが分かる．したがって，最適教育支出について，以下の結果を得る．

(i)　$R_{t+1}/w_{t+1}\geq\gamma(1+e_t^i)^{\gamma-1}$ の場合

このケースは，$k_{t+1}$ が低い段階であり，最適教育支出は，$e_t=0$ のみである．すなわち，$t$ 世代の個人 $i$ は，教育支出を行わず，$h(0)=1$ を獲得する．

(ii)　$R_{t+1}/w_{t+1}<\gamma(1+e_t^i)^{\gamma-1}$ の場合

このケースは，$k_{t+1}$ が高い段階である．効用最大化の一階条件は(9)のようになる．

$$\frac{dh_{t+1}^i}{de_t^i}-\frac{r_{t+1}}{w_{t+1}}=\gamma(1+e_t^i)^{\gamma-1}-\frac{\alpha}{(1-\alpha)k_{t+1}}=0 \tag{9}$$

(9)より，最適教育支出 $e_t$ は，(10)のように導出される．

$$e_t=\left\{\frac{\alpha}{\gamma(1-\alpha)k_{t+1}}\right\}^{\frac{1}{\gamma-1}}-1=\left\{\frac{\gamma(1-\alpha)}{\alpha}\right\}^{\frac{1}{1-\gamma}}(k_{t+1})^{\frac{1}{1-\gamma}}-1 \tag{10}$$

(10)より，技術水準 $A$ は教育支出に何ら影響を及ぼさないことが分かる．すなわち，本稿モデルでは，技術進歩は人的資本蓄積に直接的な影響を及ぼさない．

### Ⅱ．5．最適教育支出と資本・労働比率

最適教育支出がゼロとなる資本・労働比率の閾値を考える．$e_t=0$ となる資本・労働比率を $\tilde{k}$ とおくと，(10)を変形することによって，(11)が成り立つ．

$$\tilde{k}=\frac{\alpha}{\gamma(1-\alpha)} \tag{11}$$

したがって，最適教育支出と資本・労働比率の関係について，以下の結果を得る．

(i)　$k_{t+1} \le \tilde{k}$ の場合

数学的には，$e_t < 0$ となる．しかしながら，$e_t \ge 0$ であるので，$e_t = 0$ となる．

(ii)　$\tilde{k} < k_{t+1}$ の場合

$e_t = 0$ となる資本・労働比率の閾値 $\tilde{k}$ を上回っているため，$e_t > 0$ となる．

また，⑽について，$1/(1-\gamma) > 1$ であるので，最適教育支出と資本・労働比率の関係は，図２のように描かれる．

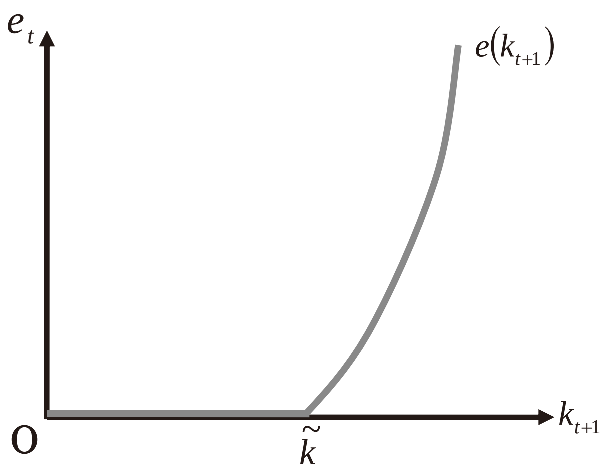


**図２：資本・労働比率と最適教育支出**

資本・労働比率に依存する最適教育支出については，⑿の関係式が得られる．

$$e_t = e(k_{t+1}) \begin{cases} = 0 & if \quad k_{t+1} \le \tilde{k} \\ > 0 & if \quad k_{t+1} > \tilde{k} \end{cases} \tag{12}$$

本稿では，経済は信用制約下にあり，借り入れはできないと仮定しているので，$e_t > b_t^i$ であれば，最適教育支出 $e_t$ を下回る額しか実現できず，$b_t^i$ の全てを教育支出に振り向けることになる．一方，$e_t \le b_t^i$ であれば，$e_t^i$ は最適教育支出 $e_t$ と等しい額を達成できる．したがって，教育支出の決定については，⒀が成立する．

$$e_t^i = \min\left[e(k_{t+1}), b_t^i\right] \tag{13}$$

### Ⅱ．6．最適移転支出

$t$世代の個人$i$は，自身で決定付けた教育支出と$t-1$世代からの所得移転を遺産贈与として所得水準を決定付け，それを予算制約として，効用を最大化するように，$t+1$世代への所得移転$b_{t+1}^i$を決定付ける．それは，次のように表される．

$$\underset{c_{t+1}^i, b_{t+1}^i}{Maximize} \quad u^{t,i} = (1-\beta)\log c_{t+1}^i + \beta \log\left(\overline{\theta} + b_{t+1}^i\right); \quad \beta \in (0,1), \quad \overline{\theta} > 0$$

$$subject\ \ to \quad c_{t+1}^i = I_{t+1}^i - b_{t+1}^i$$

ここで，$u^{t,i}$は$t$世代の個人$i$の生涯効用水準，$\beta$は各個人にとっての所得移転の選好度，$\overline{\theta}$は所得移転を行うにあたっての所得水準の閾値であり，これは，各個人の効用における消費と所得移転の選好度がちょうど等しいとき，所得移転を行うにあたって最低限必要な所得水準である．本稿では，期と世代を明確に区別するため，Galor and Tsiddon (1997) に倣い，期を右下，世代を右上に添え字で表記するものとする[1]．一階条件である $\partial u^{t,i} / \partial c_{t+1}^i = 0$ より，次式が成り立つ．

$$\frac{\partial u^{t,i}}{\partial c_{t+1}^i} = \frac{1-\beta}{I_{t+1}^i - b_{t+1}^i} - \frac{\beta}{\overline{\theta} + b_{t+1}^i} = 0$$

変形して整理すると，⒁が得られる．

$$b_{t+1}^i = \beta\left(I_{t+1}^i - \theta\right); \ \theta \equiv \frac{1-\beta}{\beta}\overline{\theta} \tag{14}$$

ここで，$(1-\beta)/\beta$ は$\theta$を基準とした所得移転に対する消費の選好度の比率である．すなわち，$(1-\beta)/\beta$ の値が高く（低く）なるほど，所得移転の選好が低く（高く）なり，所得移転を行うにあたって最低限必要な所得水準の基準値が上昇（低下）することになる．また，$\theta$は$b_{t+1}^i$が 0 となる

[1] Galor and Moav (2004) では，$t$世代の個人$i$の効用水準を$u_t^i$と表記しているが，この表記では紛らわしいためである．

ような所得水準である．$t$世代の個人$i$の$t+1$期における最適移転支出については，⒂の関係式が得られる．

$$b_{t+1}^{i}=b\left(I_{t+1}^{i}\right)\equiv\begin{cases}\beta\left(I_{t+1}^{i}-\theta\right) & if \quad I_{t+1}^{i}>\theta\\ 0 & if \quad I_{t+1}^{i}\leq\theta\end{cases} \tag{15}$$

また，⑹と⑿より，次の関係が成り立つ．

$$s_{t+1}^{i}=\begin{cases}b_{t+1}^{i} & if \quad k_{t+1}\leq\tilde{k}\\ b_{t+1}^{i}-e_{t+1}^{i} & if \quad k_{t+1}>\tilde{k}\end{cases} \tag{16}$$

## Ⅲ．所得移転と資本蓄積

Galor and Moav (2004) および村田 (2014) と同様，全人口を富裕層$R$と貧困層$P$に分類する．第0期において，全人口の$\lambda$の割合だけ存在する富裕層$R$が初期の物的資本ストックを全て所有し，全人口の$(1-\lambda)$の割合だけ存在する貧困層$P$は物的資本ストックを所有しないと仮定する．また，初期の物的資本ストックは$K_0>0$を仮定する．

### Ⅲ．１．人口の初期分布

富裕層$R$と貧困層$P$，２タイプからなる経済における$K_{t+1}$と$H_{t+1}$はそれぞれ，⒄と⒅のように決定付けられるとする．

$$K_{t+1}=\lambda s_{t}^{R}+\left(1-\lambda\right)s_{t}^{P}=\lambda\left(b_{t}^{R}-e_{t}^{R}\right)+\left(1-\lambda\right)\left(b_{t}^{P}-e_{t}^{P}\right) \tag{17}$$

$$H_{t+1}=\lambda h\left(e_{t}^{R}\right)+\left(1-\lambda\right)h\left(e_{t}^{P}\right)=\lambda\left(1+e_{t}^{R}\right)^{\gamma}+\left(1-\lambda\right)\left(1+e_{t}^{P}\right)^{\gamma} \tag{18}$$

ここで，$s_t^R$と$s_t^P$はそれぞれ，富裕層$R$と貧困層$P$の$t$期における貯蓄，$b_t^R$と$b_t^P$はそれぞれ，富裕層$R$と貧困層$P$の$t$期における所得移転，$e_t^R$と$e_t^P$はそれぞれ，富裕層$R$と貧困層$P$の$t$期における教育支出である．⒄と⒅に⒀を代入すると，⒆と⒇のように定義できる．

$$K_{t+1}=\lambda\left\{b_t^R-\min\left[e\left(k_{t+1},b_t^R\right)\right]\right\}+\left(1-\lambda\right)\left\{b_t^P-\min\left[e\left(k_{t+1}\right),b_t^P\right]\right\}\equiv K\left(b_t^R,b_t^P,k_{t+1}\right) \tag{19}$$

$$H_{t+1}=\lambda h\left\{\min\left[e\left(k_{t+1}\right),b_t^R\right]\right\}+\left(1-\lambda\right)h\left\{\min\left[e\left(k_{t+1},b_t^P\right)\right]\right\}\equiv H\left(b_t^R,b_t^P,k_{t+1}\right) \tag{20}$$

(19)と(20)より，$b_t^R$と$b_t^P$を所与とすると，$t+1$期における資本・労働比率$k_{t+1}$は，(21)のように定義できる．

$$k_{t+1}=\frac{K\left(b_t^R,b_t^P,k_{t+1}\right)}{H\left(b_t^R,b_t^P,k_{t+1}\right)}\equiv\frac{\lambda\left\{b_t^R-e^R\left(k_{t+1}\right)\right\}+\left(1-\lambda\right)\left\{b_t^R-e^P\left(k_{t+1}\right)\right\}}{\lambda h\left\{1+e^R\left(k_{t+1}\right)\right\}^\gamma+\left(1-\lambda\right)h\left\{1+e^P\left(k_{t+1}\right)\right\}^\gamma} \tag{21}$$

本稿では，Galor and Moav (2004) および村田 (2014) と同様，初期の資本・労働比率$k_0$の値について，$k_0\in\left(0,\tilde{k}\right)$を仮定する．この区間において，最適教育支出は富裕層$R$と貧困層$P$ともに，$e_t^R=0$，$e_t^P=0$となるため，(17)と(18)より，(22)と(23)が成り立つ．

$$K_{t+1}=\lambda b_t^R+\left(1-\lambda\right)b_t^P \tag{22}$$

$$H_{t+1}=\lambda h\left(0\right)+\left(1-\lambda\right)h\left(0\right)=1 \tag{23}$$

(22)と(23)より，$k_0\in\left(0,\tilde{k}\right)$においては，経済成長は$b_t^i=s_t^i$によって決定付けられる．すなわち，物的資本蓄積が経済成長の源泉となる．このような物的資本蓄積のみによる経済成長は，$R_{t+1}/w_{t+1}<\gamma$となるまで続く．また，(21)より，$t$期における所得移転によって$t+1$期における資本・労働比率が決定付けられるような連続関数が存在することが分かる．したがって，(24)が定義できる．

$$k_{t+1}=\kappa\left(b_t^R,b_t^P\right) \tag{24}$$

(24)より，ある期における資本・労働比率の上昇度は，その前の期における富裕層$R$と貧困層$P$の所得移転の規模によって決定付けられる．(16)より，富裕層$R$と貧困層$P$，それぞれの$b_{t+1}^i$の挙動は(25)のようになる．

$$b_{t+1}^i=\max\left\{\beta\left[w_{t+1}\left(1+e_t^i\right)^\gamma+\left(b_t^i-e_t^i\right)R_{t+1}-\theta\right],0\right\},\ i=R,P \tag{25}$$

ここで，⒀より，㉖が得られる．

$$b_{t+1}^{i} = \max\begin{cases} \beta\left[w(k_{t+1})h(b_t^i) - \theta\right] & if \quad b_t^i \le e(k_{t+1}),0 \\ \beta\left[w(k_{t+1})h(e(k_{t+1})) + \{b_t^i - e(k_{t+1})R(k_{t+1})\} - \theta\right] & if \quad b_t^i > e(k_{t+1}),0 \end{cases}, i = R, P \qquad (26)$$

㉖より，$b_{t+1}^i$ は $b_t^i$ と $k_{t+1}$ によって決定付けられることが分かる．したがって，㉗が定義できる．

$$b_{t+1}^{i} \equiv \phi\left(b_t^i, k_{t+1}\right) \qquad (27)$$

$b_t^i = 0$，$e_t^i = 0$ であるような，すなわち，親世代が子供世代に所得移転を行わない資本・労働比率の閾値を $\hat{k}$ とおく．このとき，$w(\hat{k}) = \theta$ となり，㉘が得られる．

$$\hat{k} = \left[\frac{\theta}{(1-\alpha)A}\right]^{\frac{1}{\alpha}} \qquad (28)$$

ここで，$k_{t+1} \le \hat{k}$ の段階では $w(k_{t+1}) \le \theta$，$\hat{k} < k_{t+1}$ の段階では $w(k_{t+1}) > \theta$ となる．したがって，$b_{t+1}^i = 0$ であっても，$\hat{k} < k_{t+1}$ であれば，$t$ 世代の個人 $i$ は $t+1$ 世代に対して所得移転を行うことが分かる．

$$b_{t+1}^{i} = \phi(0, k_{t+1})\begin{cases} = 0 & if \quad k_{t+1} \le \hat{k} \\ > 0 & if \quad k_{t+1} > \hat{k} \end{cases} \qquad (29)$$

Galor and Moav (2004) および村田 (2014) と同様，本稿では，$\tilde{k} \le \hat{k}$ を満たす $\theta$ の値が選ばれると仮定する．

### Ⅲ．2．経済発展におけるレジームの規定

本節では，資本・労働比率の上昇段階に応じての富裕層 $R$ と貧困層 $P$，それぞれの所得移転および教育支出の状況に基づき，経済発展におけるレジームの規定を行う．Galor and Moav (2004) および村田 (2014) に倣い，教育支出 (人的資本投資) が開始されない段階を初期段階，開始される段階を成熟段階とし，前者をレジームⅠ，後者をレジームⅡと呼ぶこととする．

### Ⅲ．２．１．レジームⅠ

レジームⅠの期間を$0 \leq t < \tilde{t}$と定義する．この段階では，資本・労働比率が$k_{t+1} \in (0, \tilde{k}]$であり，物的資本が不足しているとする．また，物的資本は富裕層$R$のみが所有し，富裕層$P$は所有しないとする．さらに，この段階では，富裕層$R$と貧困層$P$ともに，教育支出は行わないとする．したがって，$b_t^R > 0$，$b_t^P = 0$，$e_t^R = 0$，$e_t^P = 0$となるため，$t+1$期における資本・労働比率は，(30)のように決定付けられる．

$$k_{t+1} = \lambda b_t^R, b_t^R \in (0, \tilde{b}); \ \tilde{b} \equiv \frac{\tilde{k}}{\lambda} = \frac{\alpha}{\gamma(1-\alpha)\lambda} \tag{30}$$

(30)において，$\tilde{b}$は資本・労働比率が$k_{t+1} = \tilde{k}$のときの$b_t^R$の値であるとする．また，(25)より，この段階における富裕層$R$の所得移転の動態$b_{t+1}^R$は，(31)のようになる．

$$\begin{aligned} b_{t+1}^R &= \max\{\beta[w_{t+1}h(0) + b_t^R R_{t+1} - \theta], 0\} \\ &= \max\{\beta[(1-\alpha)A(\lambda b_t^R)^\alpha + b_t^R \alpha A(\lambda b_t^R)^{\alpha-1} - \theta], 0\} \\ &= \max\{\beta[\{(1-\alpha)\lambda^\alpha + \alpha\lambda^{\alpha-1}\}A(b_t^R)^\alpha - \theta], 0\} \end{aligned} \tag{31}$$

(31)を満たす$b_t^R$と$b_{t+1}^R$の関係は，図３のように描かれる[2]．

[2] 図３から分かるように，$\underline{b}$は不安定な定常均衡である．さらに，$b_0^R \in (0, \bar{b}^u)$である場合，富裕層の所得移転は$b_t^R = 0$に収束することになり，レジームⅡへの移行が不可能となることも分かる．

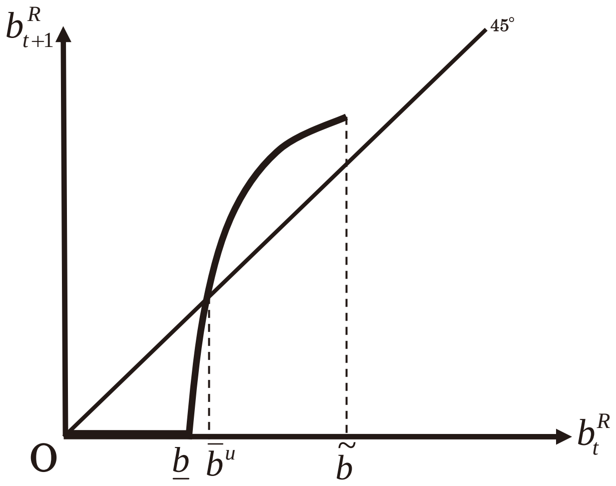


**図３：富裕層の所得移転の動態（レジームⅠ）**

図３について，$\underline{b}$は(32)のように導出される．

$$\left\{(1-\alpha)\lambda^{\alpha}+\alpha\lambda^{\alpha-1}\right\}A\left(b_t^R\right)^{\alpha}=\theta \Rightarrow \underline{b}=\left[\frac{\theta}{\left\{(1-\alpha)\lambda^{\alpha}+\alpha\lambda^{\alpha-1}\right\}A}\right]^{\frac{1}{\alpha}} \tag{32}$$

また，Galor and Moav (2004) および村田 (2014) と同様，$\bar{b}^u \in \left(\underline{b},\tilde{b}\right)$であるとする．さらに，$b_t^i=\tilde{b}$のとき，(33)の条件が満たされているとする．

$$\beta\left[\left\{(1-\alpha)\lambda^{\alpha}+\alpha\lambda^{\alpha-1}\right\}A\left(\tilde{b}\right)^{\alpha}-\theta\right]>\tilde{b} \tag{33}$$

図３より，$b_t^R$は$\bar{b}^u$を下回る場合，$b_t^R=0$に収束し，$\bar{b}^u$を上回る場合，向上していく．レジームⅠの段階では，$k_{t+1}$の上昇は$b_t^R$のみによって決定付けられ，レジームⅡに移行する必要があることから，初期における富裕層$R$の所得移転は，$b_0^R \in \left(\bar{b}^u,\tilde{b}\right)$であるとする．

### Ⅲ．２．２．レジームⅡ

この段階に入ると，少なくとも，富裕層$R$と貧困層$P$のどちらかは教育支出を行うとする．Galor and Moav (2004) に倣い，レジームⅡについては，富裕層$R$と貧困層$P$，それぞれの教育支出の状況に基づき，ステージⅠ，ステージⅡ，およびステージⅢの３段階に分類する．

(i)　ステージⅠ

ステージⅠの期間を$\tilde{t} \leq t < \hat{t}$と定義し，この期間における資本・労働比率は$k_{t+1} \in \left(\tilde{k}, \hat{k}\right)$であるとする．ステージⅠにおいては，貧困層$P$はレジームⅠと同様，所得移転と教育支出をともに行わないが，富裕層$R$は所得移転に加え，教育支出を行うようになるとする．また，このとき，富裕層$R$は最適教育支出$e_t$を実行可能であるとする．したがって，$b_t^R > 0$，$e_t^R = e_t$，$b_t^P = 0$，$e_t^P = 0$となるため，$t+1$期における資本・労働比率は，(34)のように決定付けられる．

$$k_{t+1} = \frac{\lambda\left(b_t^R - e_t^R\right)}{\lambda h\left(e_t\right) + 1 - \lambda} = \frac{\lambda b_t^R - \lambda\left\{\dfrac{\gamma\left(1-\alpha\right)k_{t+1}}{\alpha}\right\}^{\frac{1}{1-\gamma}} + \lambda}{\lambda\left\{\dfrac{\gamma\left(1-\alpha\right)k_{t+1}}{\alpha}\right\}^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} + \left(1-\lambda\right)} \tag{34}$$

(ii)　ステージⅡ

ステージⅡの期間を$\hat{t} \leq t < t^*$と定義し，この期間における資本・労働比率は$k_{t+1} \in \left[\tilde{k}, \hat{k}\right]$であるとする．この段階では，富裕層$R$のみならず，貧困層$P$も教育支出を行うようになるとする．しかしながら，ステージⅡの段階では，貧困層は所得移転の規模がまだ不十分であり，最適教育支出$e_t$を下回るとする．したがって，$b_t^R > 0$，$e_t^R = e_t$，$b_t^P > 0$，$e_t^P = b_t^P$となるため，$t+1$期における資本・労働比率は，(35)のように決定付けられる．

$$k_{t+1} = \frac{\lambda\left(b_t^R - e_t^R\right) + \left(1-\lambda\right)\left(b_t^P - e_t^P\right)}{\lambda h\left(e_t\right) + \left(1-\lambda\right)h\left(b_t^P\right)} = \frac{\lambda b_t^R - \lambda\left\{\dfrac{\gamma\left(1-\alpha\right)k_{t+1}}{\alpha}\right\}^{\frac{1}{1-\gamma}} + \lambda}{\lambda\left\{\dfrac{\gamma\left(1-\alpha\right)k_{t+1}}{\alpha}\right\}^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} + \left(1-\lambda\right)\left(1+b_t^P\right)^{\gamma}} \tag{35}$$

(iii)　ステージⅢ

ステージⅢの期間を$t \geq t^*$と定義し，この期間における資本・労働比率は$k_{t+1} \geq k^*$であるとする．この段階では，教育支出が借入制約に拘束されなくなり，富裕層$R$と貧困層$P$がともに最適教育支出$e_t$を実行できるようになるとする．したがって，$b_t^R > 0$，$e_t^R = e_t$，$b_t^P > 0$，$e_t^P = e_t$となるため，$t+1$期における資本・労働比率は，(36)のように決定付けられる．

$$k_{t+1} = \left[ \frac{\lambda b_t^R + (1-\lambda) b_t^P + 1}{\left\{ \frac{\gamma(1-\alpha)}{\alpha} \right\}^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}} \right]^{1-\gamma} \tag{36}$$

## Ⅲ．３．所得移転の動態と貧困のわなからの脱出

Ⅲ．２節において，レジームⅡのステージⅠの段階まで，貧困層$P$は所得移転と教育支出をともに行わない．Galor and Moav (2004) では，この状態を「貧困のわな」と呼ぶ．本節では，所得移転による資本・労働比率の上昇と貧困のわなからの脱出について，村田 (2014) と同様の具体関数の下で検討する．本節では，所得移転の動態を明示するため，資本・労働比率を所与として考察する[3]．

レジームⅡのステージⅠの段階では，所与となる資本・労働比率は$k \in (\tilde{k}, \hat{k})$を満たす．レジームⅡのステージⅠにおける所得移転の動態は，(37)のように表される．

$$b_{t+1}^i = \max\left\{ \begin{array}{ll} \beta\left[(1-\alpha)Ak^\alpha h(1+b_t^i)^\gamma - \theta\right] & if \;\; b_t^i \le e(k), 0 \\ \beta\left[(1-\alpha)Ak^\alpha \left\{\frac{\gamma(1-\alpha)k}{\alpha}\right\}^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} + \left(b_t^i - \left\{\frac{\gamma(1-\alpha)k}{\alpha}\right\}^{\frac{1}{1-\gamma}} + 1\right) - \theta\right] & if \;\; b_t^i > e(k), 0 \end{array} \right\} \tag{37}$$

(37)を満たす$b_t^i$と$b_{t+1}^i$の関係は，図４のように描かれる．Ⅲ．２．１節と同様，資本・労働比率を所与とする場合においても，$b_t^i = \tilde{b}$のとき，(33)の条件を満たすものとする．

[3] Galor and Moav (2004) では，これを「Conditional Dynamics」と呼ぶ．

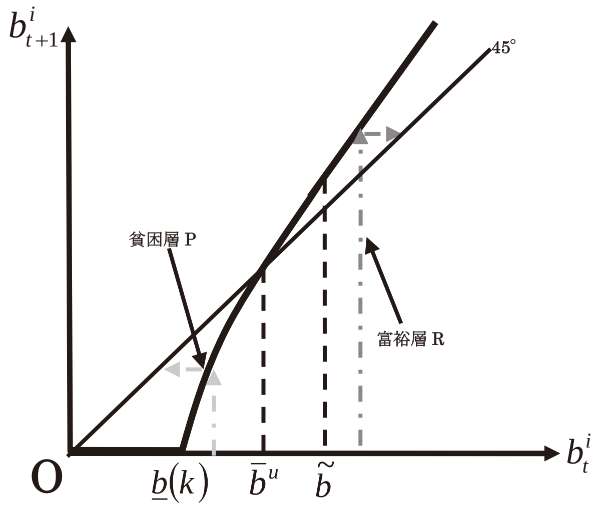


**図4：所得移転の動態（レジームⅡ ステージⅠ）**

図4について，富裕層$R$の所得移転は増加していくが，貧困層$P$の所得移転は$b_t^i = b_{t+1}^i = 0$に収束する．Galor and Moav (2004) および村田 (2014) に倣い，図4における$b_t^i = b_{t+1}^i = 0$の状態を「貧困のわな」と呼ぶ．また，図4について，$\underline{b}(k)$は(38)のように求められる．

$$(1-\alpha)Ak^{\alpha}\left(1+b_t^i\right)^{\gamma} = \theta \Rightarrow \underline{b}(k) = \left[\frac{\theta}{(1-\alpha)Ak^{\alpha}}\right]^{\frac{1}{\gamma}} - 1 \tag{38}$$

(38)より，資本・労働比率が上昇すると，$\underline{b}(k)$は減少する．したがって，本稿モデルにおいても，資本・労働比率の上昇は,「貧困のわな」からの脱出に貢献することが確認できる．

レジームⅡのステージⅡの段階になると，貧困層$P$は所得移転と教育支出をともに行うようになるため,「貧困のわな」から脱出することになる．すなわち，富裕層$R$だけでなく，貧困層$P$の所得移転も増加していくことになるため，レジームⅡのステージⅡにおける所得移転の動態は，(39)のように表される．

$$b_{t+1}^i = \begin{cases} \beta\left[(1-\alpha)Ak^{\alpha}h\left(1+b_t^i\right)^{\gamma} - \theta\right] & if \;\; b_t^i \le e(k) \\ \beta\left[(1-\alpha)Ak^{\alpha}\left\{\dfrac{\gamma(1-\alpha)k}{\alpha}\right\}^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} + \left(b_t^i - \left\{\dfrac{\gamma(1-\alpha)k}{\alpha}\right\}^{\frac{1}{1-\gamma}} + 1\right) - \theta\right] & if \;\; b_t^i > e(k) \end{cases} \tag{39}$$

(39)を満たす$b_t^i$と$b_{t+1}^i$の関係は，図５のように描かれる．

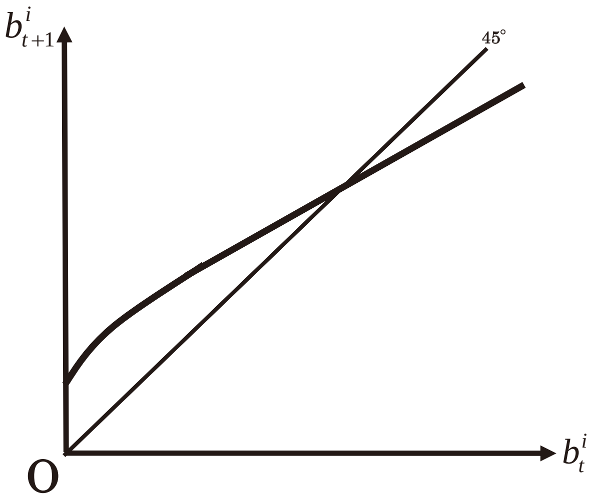


**図５：所得移転の動態（レジームⅡ ステージⅡ・Ⅲ）**

## Ⅳ．技術進歩と「貧困のわな」からの脱出

Ⅱ節およびⅢ節を踏まえ，本節では，レジームⅡのステージⅠの段階において，外生的な技術進歩が起こった場合，それが「貧困のわな」からの脱出，すなわち，ステージⅡへの移行に及ぼす影響について考察する[4]．技術水準について，技術進歩前を$A^1$，技術進歩後を$A^2$とおき，技術進歩前と技術進歩後における$\underline{b}(k)$の値をそれぞれ，$\underline{b}^1(k)$，$\underline{b}^2(k)$とおくと，(32)より，次式のような関係式が得られる．

$$\underline{b}^1(k)=\left[\frac{\theta}{(1-\alpha)A^1k^\alpha}\right]^{\frac{1}{\gamma}}-1>\left[\frac{\theta}{(1-\alpha)A^2k^\alpha}\right]^{\frac{1}{\gamma}}-1=\underline{b}^2(k) \tag{40}$$

また，(37)より，所得移転の動態は，$\underline{b}(k)<b_t^i<e(k)$においてグラフの傾きが大きくなり，$b_t^i\geq e(k)$において上方シフトすることになる．これらについて，$b_t^i$と$b_{t+1}^i$の関係から捉えると，図６のよ

[4] モデル分析上，レジームⅠにおける技術進歩について考察することも可能であるが，本稿では，レジームⅡのステージⅡにおける「貧困のわな」からの脱出に焦点を当てる．加えて，レジームⅠでは，教育支出が全く行われておらず，このような状態における技術進歩を想定すると，人的資本の存在意義が失われてしまう恐れがある．

うに描かれる．

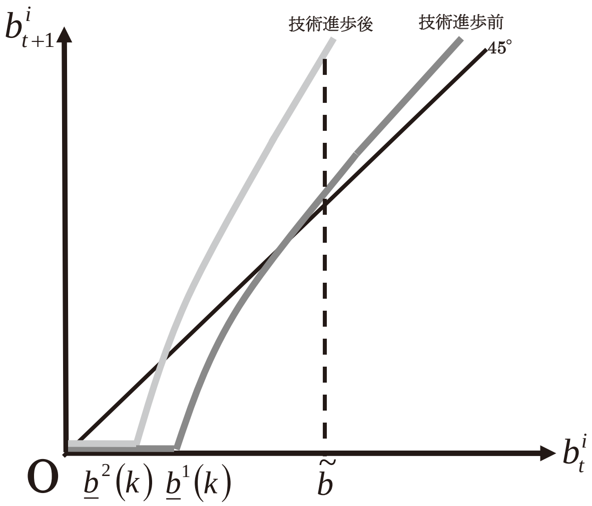


**図６：技術進歩と所得移転の動態（レジームⅡ ステージⅠ）**

さらに，$b_t^i=0$，$e_t^i=0$であるような資本・労働比率の閾値について，技術進歩前と技術進歩後をそれぞれ，$\hat{k}^1$，$\hat{k}^2$とおくと，(28)より，(41)のような関係式が得られる．

$$\hat{k}^1=\left[\frac{\theta}{(1-\alpha)A^1}\right]^{\frac{1}{\alpha}}>\left[\frac{\theta}{(1-\alpha)A^2}\right]^{\frac{1}{\alpha}}=\hat{k}^2 \tag{41}$$

したがって，技術進歩は富裕層$R$の所得移転の増加を促進させ，(34)より，それは資本・労働比率の上昇にとってプラスに働く．さらに，貧困層$P$が所得移転を開始するにあたっての資本・労働比率の閾値が低くなることから，技術進歩はレジームⅡのステージⅠにおける「貧困のわな」からの脱出において確実に貢献することが確認できる．

## Ⅴ．おわりに

本稿では，村田 (2014) について，Galor and Moav (2004) と同様，ヒックス中立的な技術水準を導入した上で，外生的な技術進歩が起こった場合，貧困層が次世代への所得移転および教育支出を行わない状態である「貧困のわな」からの脱出に及ぼす影響について考察した．

本稿における分析結果として，技術進歩が起こるのが経済発展における成熟段階である場合，

貧困層が次世代への所得移転および教育支出を行わないステージであれば，富裕層の所得移転を増加させ，貧困層が所得移転を開始するにあたっての資本・労働比率の閾値を低くし，さらには，資本・労働比率の上昇にとってもプラスに働き，これらの意味において,「貧困のわな」からの脱出に確実に貢献することが示された．

本稿における分析内容について，今後の展望を述べる．本稿では，技術進歩について，経済発展の成熟段階における第１ステージで起こるケースのみを想定したが，初期段階において技術進歩が起こることは考えにくいにせよ，成熟段階における第２・第３ステージで起こることは十分に考えられる．成熟段階における第１ステージでは，かなり明瞭な結果が得られたと言えるが，第２・第３ステージにおいても同様か否かについても確認する必要があるだろう．また，本稿モデルでは，成熟段階の第１ステージにおける技術進歩は，所得移転にとってプラスに働き，貧困層が次世代への所得移転および教育支出を開始するにあたっての資本・労働比率の閾値を低くすることを示したが，資本・労働比率の上昇スピードを速めるか否かについても気になるところである．さらに，本稿モデルでは，外生的な技術進歩を想定しているが，R&D活動や物的・人的資本投資の間における資源配分問題などを考慮した内生的な技術進歩についても検討する必要があるだろう．これらについては，稿を改めて論じたい．

**参考文献**

［１］ Cardak, B. A. (2004a) “Education Choice, Endogenous Growth and Income Distribution,” *Economica,* Vol.71, pp.57-81.

［２］ Cardak, B.A. (2004b) “Education Choice, Neoclassical Growth, and Class Structure,” *Oxford Economic Papers,* Vol.56, pp.643-666.

［３］ Galor, O. and D. Tsiddon (1996) “Income Distribution and Growth: The Kuznets Hypothesis Revisited,” *Economica,* Vol.63, pp.103-117.

［４］ Galor, O. and D. Tsiddon (1997) “The Distribution of Human Capital and Economic Growth,” *Journal of Economic Growth,* Vol.2, pp.93-124.

［５］ Galor, O. and O. Moav (2004) “From Physical to Human Capital Accumulation: Inequality and The Process of Development,” *The Review of Economic Studies,* Vol.71, pp.1001-1026.

［６］ Glomm, G. and B. Ravikumar (1992) “Public versus Private Investment in Human Capital: Endogenous Growth and Income Inequality,” *Journal of Political Economy,* Vol.100, pp.818-834.

［７］ Lucas, R. E. (1988) “On the Mechanics of Economic Development,” *Journal of Monetary Economics,* Vol.22, pp.3-42.

［８］ Romer, P. M. (1986) “Increasing Returns and Long-Run Growth,” *Journal of Political Economy,* Vol.94, pp.1002-1037.

［９］ Solow, R. M. (1956) “A Contribution to The Theory of Economic Growth,” *Quarterly Journal of Economics*, Vol.70, pp.65-94.

［10］ Swan, T. W. (1956) “Economic Growth and Capital Accumulation,” *Economic Record*, Vol.32, pp.334-361.

［11］ 大住 圭介 (2003)『経済成長分析の方法―イノベーションと人的資本のマクロ動学分析―』九州大学出版会.

［12］ 村田 慶 (2014)「経済発展と貧困のわなからの脱出に関する一考察」,『経済研究』(静岡大学) 第18巻４号, pp.1-15.