Teaching to solve everyday life and social events in junior high school mathematics : Through the process of finding and solving problems based on authentic mathematical activities in the function domain

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2020-03-10 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 杉山, 元希, 松元, 新一郎 メールアドレス: 所属:
URL	https://doi.org/10.14945/00027106

論文

中学校数学科における日常生活や社会の事象を解決する指導
ー関数領域における真正な数学的活動を意識した問題発見・解決の過程を通してー

杉山　元希・松元　新一郎
（静岡大学教育学部附属静岡中学校・静岡大学教育学部）

Teaching to solve everyday life and social events in junior high school mathematics:
Through the process of finding and solving problems based on authentic mathematical activities in the function domain

Sugiyama Motoki, Matsumoto Shinichiro

Abstract

The purpose of this study is to propose authentic mathematical activities to be used in the area of function for students of junior high school mathematics, to analyze the process by which students find and solve problems through practical classes based on these activities, and to clarify issues that might arise as these activities are implemented. In the "Earthquake Early Warning" activity, it became clear that: (1) In order for the students to consider the correlation between the earthquake’s arrival time and the distance from the epicenter by plotting out actual earthquake observation data on a graph, clear instruction from the teacher was necessary. (2) In a simulated exercise of "an earthquake that occurred at the school", the students were able to study an authentic scenario. In the "Olympic Torchbearer" activity, it became clear that: (1) As the situation involved Sunpu Castle Park, which lies just across from their school, the students had a greater tendency to look for an authentic solution to the problem. (2) By considering the opinion that the intersection point on the graph is the place where a picture could be taken, many students could understand the need for the graph.

キーワード：　現実の問題　真正(authentic)　問題発見・解決の過程　緊急地震速報　聖火ランナー

１．研究の背景

平成 29 年告示の中学校学習指導要領・数学科では数学的活動の定義が見直され，数学的に考える資質・能力を育成する観点から，現実の世界と数学の世界における算数・数学の問題発見・解決の過程を通して，「事象を数理的に捉え，数学の問題を見いだし，問題を自立的，協働的に解決し，解決過程を振り返って概念を形成したり体系化したりする過程」（中央教育審議会，2016，p.141）を重視している。問題発見・解決の過程の図には，「現実の世界」と「数学の世界」の２つのサイクルが示されている（図１）。

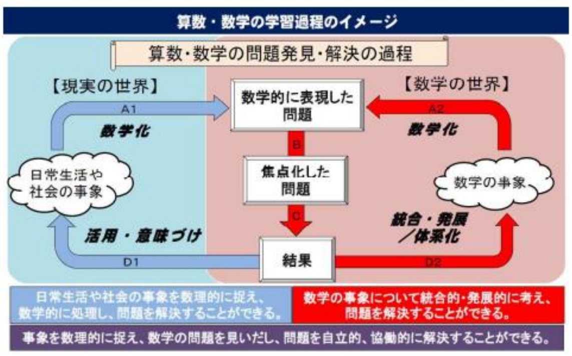


図１　問題発見・解決の過程
（中央教育審議会，2016，別添資料 p.30）

このうち本研究では「現実の世界」の部分を含む過程，すなわち，「日常生活や社会の事象を数理的に捉え，数学的に表現・処理し，問題を解決し，解決過程を振り返り得られた結果の意味を考察する過程」（文部科学省，2018，p.23）に着目する。「現実の世界」の部分を含む過程に着目した理由は，次の３点である。

① 子どもたちが疑問を抱きやすく，解決したいと考える問いをもつことができること。
② 問題発見・解決の過程において，数値に着目したり，図形に置き換えたりして数学的な見方・考え方を子どもたちなりに働かせやすいこと。
③ 今日の複雑化した社会の将来を適切に判断していくためには，「数学の世界」と「現実の世界」を行き来し，自ら数学的に表現した問題を見いだすこと必要であること。

「現実の世界」であったとしても，生徒にとって解決したい課題とは限らない。生徒にとって真正(authentic)な数学的活動を設定することが大切である（Weiss, Herbst, & Chen，2009）。すなわち，教科の本質に即した真正の学びを実現するためには，教材開発（文脈の真正性）と授業展開（活動の真正性）の両者の検討が重要である。なお，本研究における真正の定義を，佐伯・川上・金児(2019)におけるオーセンテ

ィックの定義を参考にして，「児童・生徒にとって身近で偽りのない文脈や活動」とする。

２．研究の目的

本研究の目的は，中学校数学科の関数領域における生徒にとって真正な数学的活動を提案し，実践授業を通して子どもたちの問題発見・解決の過程を分析し，今後の実践に向けた課題を明らかにすることである。

３．研究の方法

（１）中１の「関数」の指導において，「緊急地震速報」及び「聖火ランナー」に関わる教材開発，授業実践を行い，授業時の生徒の反応例等をもとにして，教材，指導法などの視点について考察する。さらに，授業後の生徒の感想から考察を加える。

（２）（１）を踏まえ，真正な数学的活動を意識した問題発見・解決の過程を重視した指導のあり方についての示唆を得る。

なお，（１）における授業の考察は，授業を撮影した動画・静止画，配布したワークシート，振り返りカードなどをもとに行う。

４．「緊急地震速報」の実践

（１）取り上げる教材

課題
地震の観測計データから気づくこと，考えられることを挙げ，そのように考えられる根拠を明確にして説明してみよう。

この教材は，静岡県民にとって切実な東南海地震に関わるものであり，切実感のある事象であると考える。この事象を数学的に扱うため，地震波のＰ波とＳ波が届くまでの時間が震源からの距離に比例することを取りあげ，可視化していく。すると，もうひとつの比例を見つけることができ，子どもたちは初期微動継続時間と震源からの距離の関係に驚きを感じるだろう。

この教材の特徴は次の３点である。

ア．対象の生徒たちにとって切実感のある問題であり，地震の震源を考えることや議論することに，興味・関心をもつと考えられる。

イ．理科でも扱われる内容であり，平成 29 年告示学習指導要領で示されている「他教科連携」に関わるものである（文部科学省，2018）。

ウ．比例のグラフを２つ重ねることで，その間の時間（差）が震源からの距離に伴って変化していると，視覚的に気づくことができる。

（２）授業の概要

本単元は，中１の「比例・反比例」の単元を既習として計画した。つまり，比例の表，式，グラフ（負の数含む）は学習済みである。なお，理科における地震の単元は未習である。

①　単元（実施）計画（３時間扱い）

時間	学習内容
1	身の回りにある比例と地震の比例 ・実際の地震の計測結果をもとに，揺れ始めるまでにかかる時間は震源からの距離に比例していることを視覚的に説明する。
2 3	緊急地震速報のしくみと比例 ・架空の計測結果から，震源までの距離は初期微動継続時間に比例していることを見いだし，その関係を明らかにする。

②　実施時期：平成 28(2016)年 10 月

③　対象生徒：国立大学附属中学校１年生

④　授業の目標：

地震発生時に即座に危険を知らせてくれる緊急地震速報において，連続的に事象を捉え，比例とみなしていく対話を通して，日常生活や社会の事象を数学化するよさを感じ，問題を解決しようとすることができる。

（３）授業展開と生徒の反応

第１時：地震と比例

はじめに授業者から，静岡県東部地震の観測データ（図２）を提示し，「この資料から，気づくこと，考えられること，予測できることを挙げてみよう」となげかけた。本題材を扱うにあたり，震災に対する心的不安を抱える子どもがいないか十分に配慮して実施した。

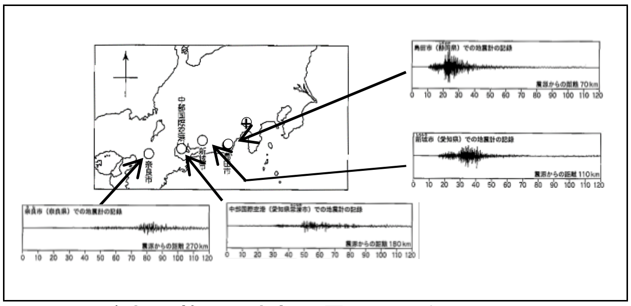


図２　資料：静岡県東部地震（2011 年 3 月 15 日）
（「新版　理科の世界１」　大日本図書 p.231 より引用）

子どもたちは，目盛りの数値に注目し，何を表しているのか，単位は何なのかを考えていた。そして，震源からの距離が遠くなるほど，揺れが届くまで時間がかかることを予測していた。以下は子どもたちの記入したワークシートの一部である。

・島田から奈良まで，震源から遠い順に並んでいるということは，震源から波状に広がっているということがわかる。
・震源から遠くなるにつれて波が徐々に弱くなる。
・震源地からの距離と揺れ始める時間は比例している。
・震源地からの距離と地震の震度は反比例してい

る？

・地震が発生してから大きく揺れた時間と，震源地からの距離は比例している。

	島田	新城	空港	奈良
時間（秒）	22	35	57	85
距離（km）	70	110	180	270

×1.57　×2.57　×3.85

・時間をｘ秒，距離をｙkmとすると，ｙ＝3.165ｘで表すことができるので，ｙはｘに比例している。

授業者は，子どもたちから出た意見を板書しながら，比例関係になっているものを丁寧に確認した。そして，震源からの距離と地震の揺れが届くまでの時間が比例することを説明するため，観測データを切り取って並び替えてみようとなげかけた。

子どもたちは，震源からの距離によって並び替えられたグラフ（図３）を見て「揺れる時間が右上がりにずれていること」や「小刻みな揺れと大きな揺れがあること」に気づいた。また，「縦揺れと横揺れ」という表現をする子どものつぶやきから，観測データでは，縦揺れと横揺れがどのように表されているのかを考え始めた。イメージのもてない子どもには，地震波の伝わり方をばねの動きに例えて，ばねを揺すったり伸縮させたりする動画を子どもたちに見せた。子どもたちは，波の伝わる速さの違いを実感し，わかったこと，さらに調べたいことを記入するように伝え，授業を終えた。子どもたちの振り返りシートには，次ページのような内容が記入された。

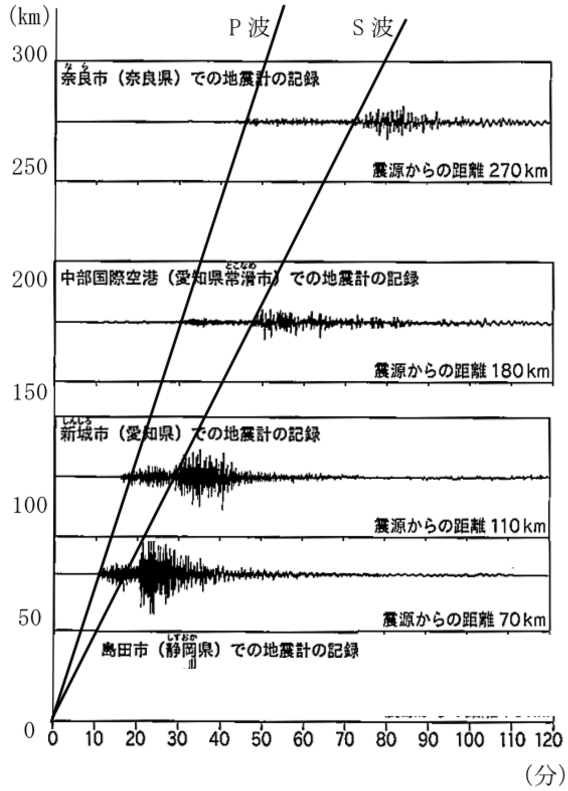


図３　図１の観測データを並び替える

この地震は数学の授業のために発生したものです。実際の地震とはまったく関係ありませんので，心配せずに聞いてください。

10時15分51秒，とある中学校のどこかで地震が発生しました。Ｐ波の速度は秒速12m，Ｓ波の速度は秒速４ｍとして，４つの観測地点で地震のＰ波とＳ波を観測しました。観測時刻を伝えるので，震源から20m以内にいる人は避難してください。

観測地点	Ｐ波が届いた時刻	Ｓ波が届いた時刻
A	10時15分54秒	10時16分00秒
B	10時16分01秒	10時16分21秒
C	10時15分56秒	10時16分06秒
D	10時15分52秒	10時15分54秒

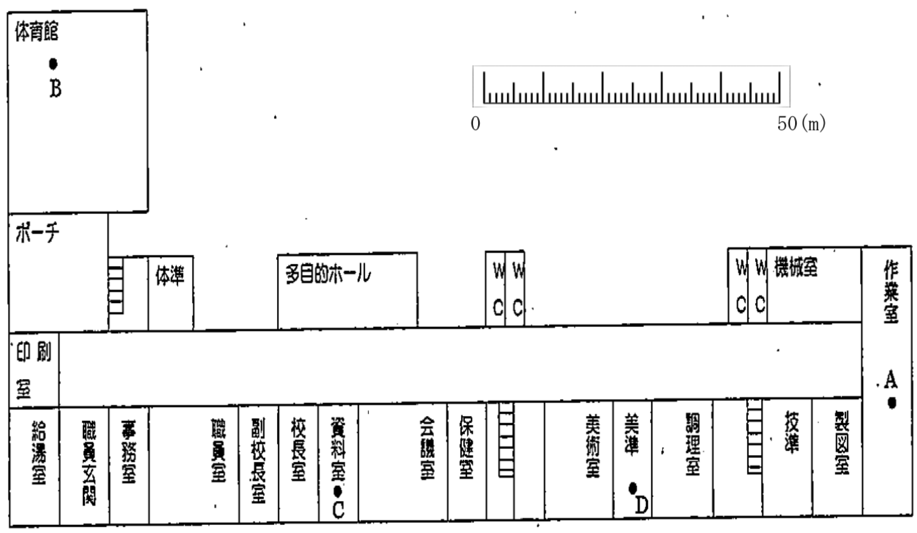


図４　第２時で配布したワークシートの一部（図の縮尺は 1:1000）

・揺れのピークは直線で結ぶことができた。
・地震波の伝わり方には２種類あることがわかった。震源からの距離にＰ波もＳ波もそれぞれ届くまでの時間が比例している。
・震源から遠ざかるほど伝わるのが遅く，揺れが小さくなっている。その距離と時間に規則があると思う。近い方は揺れが大きく短いが，遠くなってくると揺れが小さく長くなっている。
・揺れのピークと震源からの距離だけでなく，揺れのはじまりも距離と比例していた。
・終わりと距離も比例しているのだろうか。
・はじまりの点からピークの点の間の距離がだんだん長くなっているので，その距離も比例しているのだろうか。

第２時： 緊急地震速報のしくみと比例

授業者は，子どもたちと前時までの学習を振り返る中で，授業用に準備した緊急地震速報を流す。子どもたちは，何がはじまるのか興味をもちながら，内容に耳を傾けていた。

授業者は，各観測地点がわかる地図とそれぞれの観測地点の時刻（図４参照）を机の裏に貼り付けておき，「震源をみつけてみよう」となげかけた。観測時刻はそれぞれ異なるので，子どもたちは必然的に４人組になり，以下のような意見を述べながら震源を見つけ出していった。

・地震発生からの時間と震源からの距離が比例関係にあるから，地震発生時刻と観測時間がわかれば，震源までの距離がわかるので，震源地を見つけることができそうだ。
・地震波の届いた時間が早い地点が震源から近いだろう。でも，いつ発生したかがわからなければ，地震波が届いた時間はわからないのではないか。
・地震発生の時間からＰ波が届くまでの時間がわかっているのだから，Ａ地点の震源からの距離はＰ波の速さ 12×３＝36mだ。
・地図は１㎝が 10mの縮図になっているから，36mだったらＡ地点からは 3.6 ㎝の半径の円を描けば円周上に震源があることがわかる。
・震源からの距離が１地点だけわかっても東西南北，どちらの方角かわからない。２地点，いや３地点の震源からの距離が必要だ。

そして，子どもたちは，それぞれの地点の震源までの距離を導き出し，コンパスで円を描いて震源がどこにあるのかを断定することができた。学級全体で震源がどこにあるのか全体で確認した後，授業者から「もし地震が発生した時間がわからなかったら震源をみつけることができるか」となげかけた。ここでのねらいは，地震発生からの時間以外に変化しているものに視点を向けさせることであったが，子どもたちは地震発生の時刻を求めるための方程式を導き出していった。

＜地震発生の時刻を未知数とした考え＞

地震が発生した時刻を 10 時 15 分ｘ秒とする。

$$12(56-x)=4(66-x)$$

（式変形略）

$$x=51$$

したがって，地震が発生した時刻は，
10 時 15 分 51 秒である。

＜地震発生の時刻を基準０とした考え＞

地震発生から（地点 C に）P 波が届くまでの時間をｘ秒とする。

$$12x=4(x+10)$$

（式変形略）

$$x=5$$

したがって，P 波が届いた時刻から５秒前，
10 時 15 分 56 秒－5 秒＝10 時 15 分 51 秒である。

$12x=4(x+10)$の 10 がなにを表しているのかを問い直すことで，子どもたちは２つの地震波が届くまでの時間の差に着目し，「２つの地震波が届くまでの時間の差は，震源からの距離に比例しているのではないか」という考えをもちはじめた。このような考えが子どもたちの間で共有されることにより，「震源からの距離がわかれば地震波が届くまでの時間の差がわかるのではないか」つまり，「地震波が届くまでの時間の差がわかれば，震源までの距離がわかるのではないか」という仮説を立てることができた。

第３時： 比例の概念の再構築

授業者は，「２つの地震波が届くまでの時間の差（初期微動継続時間）と震源からの距離が比例していることを，根拠を明確にして説明してみよう」となげかけ，比例の概念を創りあげていった。子どもたちは，以下のような説明でまとめていった。

一方の量が２倍，３倍，……と変化するのにともなって，もう一方の量も，それぞれ２倍，３倍，……と変化する。

初期微動継続時間 x（秒）	0	2	4	6	…
震源までの距離 y（km）	0	12	□	36	…

一方がm倍になれば，もう一方もm倍になる。

初期微動継続時間 x（秒）	0	2	6	10	20
震源までの距離 y（km）	0	12	36	60	120

子どもたちは「初期微動継続時間が３倍になれば，震源までの距離も３倍になっている」と１箇所だけを示すのみになってしまうこともあったが，授業者から「他の数でも言えるのか」と声を掛け，２倍，３倍，……で示す意味や，m倍するという一般化する意味について理解していた。

ｙ／ｘが常に６の一定になる（ｔ≠０）

初期微動継続時間 ｘ（秒）	0	2	6	10	20
震源までの距離 ｙ（km）	0	12	36	60	120
ｙ／ｘ		6	6	6	6

ｘに６をかけるとｙになる

初期微動継続時間 ｘ（秒）	0	2	6	10	20
震源までの距離 ｙ（km）	0	12	36	60	120

×６

子どもたちはどこでも同じ数をかければ震源までの距離を求めることができることに納得し，表で比例の関係を示すには，横の変化よりも縦の対応の方が説明しやすいと感じ，その利点について説明していた。

表の対応で読みとった６はグラフの傾きを指しており，階段のようにしてｘが１増加するときの値を示すことで説明したり，ｘとｙが整数になる場合を代入して説明したりしていった。そして表，グラフ（図５），式を根拠に，初期微動継続時間がわかれば震源までの距離を求めることができる。すなわち，震源までの距離は，初期微動継続時間に比例していると結論づけた。

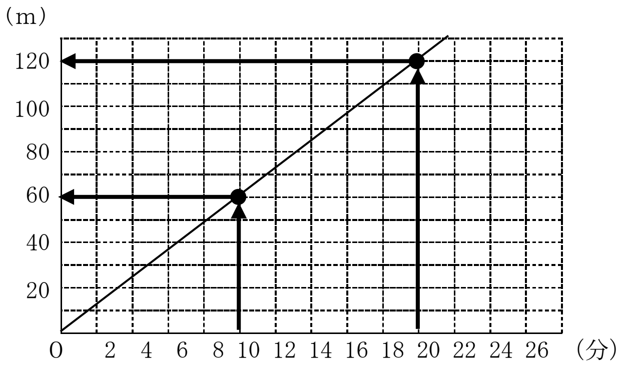


図５　初期微動継続時間と震源までの距離

・ｙ/x＝６　　・ｘ＝1/6ｙ　　・ｙ＝６ｘ

本題材で明らかにした比例定数は，実際の地震で震源までの距離を求める魔法の数字「大森係数 7.42」のことであり，地震発生時の緊急地震速報に活用されていることを伝え，授業を終えた。

（４）考察

授業全体を通して，「問題発見・解決の過程」という視点を基に，授業での子どもたちの発言や子どもたちの授業を終える際の振り返りの記述を検討して，次の点を指摘することができる。

① 実際の地震の観測結果を震源からの距離で並べ，グラフにして比例とみなすまでは，授業者の明確な指示が必要であった。その後，S1 のように小学校の比例の見方（表を横にみる）から，対応関係（表を縦にみる）に着目する子どもや，S2 のように表から式を作ることができることの意味を考える子どもなど，表と関連づける発言が多くみられた。

S1:比例の関係を一度，表にまとめることで，式やグラフに表しやすいと思った。また，表を横の変化で見ていたのが，縦の対応で見られるようになった。
S2:「比例といえること」について考え直すことで，文字を使ってｙ＝ａｘの式で一般化できるとわかった。
S3:表，式，グラフには関連する部分があることがわかった。事象を説明するとき，いくつかの視点で捉えることは大切だと思う。また，相手に伝えるとき，言葉だけでなく視覚的に示すことでよりわかりやすい説明になる。

本題材では，扱う数値は正の数であるため，グラフは右上がりのみとなる。正の数・負の数による数の拡張を活かした教材開発を目指したい。

② 子どもたちは，緊急地震速報の存在を知っており，「世の中に数学が活用されている」ことを実感している。しかし，その原理や自ら活用しようという考えに至ることはめったにない。このことを踏まえて，今回の実践では地震が校内で起こった場合を教材化した。これは架空の場面ではあるが，子どもたちにとっては真正な状況下に置かれた使用可能性のある学習になっていたこと（髙木,2000）が，授業を終える際の振り返りの記述の S4 に表れているといえよう。

また，授業を終える際の振り返りの記述の S5 や S6 のように，緊急地震速報以外の伴って変わる数量関係に着目し，発見しようと思考を巡らせた子どもがいたことは今後の学びの原動力になるだろう。

S4:Ｐ波とＳ波が届くまでの時間の差も震源からの距離と比例しているなんて驚いた。それを緊急地震速報に活用しようと考えた人はすごい。
S5:揺れの大きさが震源からの距離と関係があるのではないか。地震後の津波警報にも比例の関係が利用されているのではないか。
S6:比例が利用されて便利になっているものが，他にもあるのではないか。身の回りの他の２つの数量関係からも表やグラフにすることで新しい発見があるかもしれない。

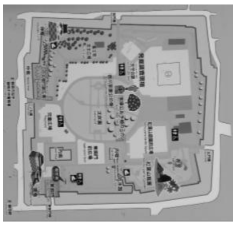
５．「聖火ランナーが駿府城公園に来る」の実践

（１）取り上げる教材

課題

家康くんたち４人は，地域の広報を担当する係をしています。聖火ランナーが駿府城公園の周りを走る様子を，写真に収めることにしました。はじめは東御門で１枚目の写真を撮り，その後，別の場所に移動して２枚目の写真を撮ろうと考えています。

２枚目以降の写真は，何分後にどのあたりで撮ることができるのでしょうか。ただし，駿府城公園１周の長さは 1600ｍとし，聖火ランナーと写真を撮る人は，次のグラフのように移動していると考えるものとします。



（駿府城公園の園内地図を引用）

この教材は，2020 年 6 月に東京オリンピック・パラリンピックの聖火ランナーが学校から見える駿府城公園にくることを基にしたものである。生徒を「地域の広報担当」の立場に立たせることで，ただ見学に行くのではなく，目的意識をもつことができるようにした。子どもたちは，オリンピックの聖火に関わるコンセプト映像を見ながら，聖火ランナーに込められた思いを感じとり，身近な場所で行われるイベントに興味を抱くと考えた。この実践を通して，実際に声援を送りに行きたいという思いをもつ子どもや，実際に聖火ランナーに応募するという子どもなど，学んだことを今後の行動に活かすことができる教材である。

この教材の特徴は次の４点である。

ア．対象の生徒たちにとって身近な生活の場が学習の場として取りあげられ，動きを捉えることや議論することに，興味・関心をもちやすい。

イ．逆向きの動きが，正・負の数で学んだことを想起させ，右下がりのグラフを自然と取り入れやすい。

ウ．２つのグラフの間（差）が，出会う場面を表現できることで，グラフと式の関連を意識しやすい。

エ．周回する動きをグラフにするとき，進んだ距離を累計とするか，１周ごとにふり直すのか，それとも基準からの距離で考えるかによって，グラフに多様性が生まれ，各々の意見を聞きたくなると考えられる。

（２）授業の概要

本単元は，中１の「比例・反比例」の単元を既習として計画した。つまり，比例の表，式，グラフ（負の数含む）は学習済みである。

① 単元（実施）計画（４時間扱い）

時間	学習内容
1	聖火ランナーが駿府城公園に来る！ ・身近にある具体的な場面を，理想化・単純化し，数学的に表現した問題を見いだす。
2	２枚目以降の写真は，どのあたりから撮ることができるのだろう。 ・方程式を用いて２枚目以降の写真が撮れるまでにかかる時間を求める。 ・グラフを基に２枚目以降の写真がどのあたりで撮ることができるか説明する。
3 4	グラフと式，グラフと表を関連付けて考察する。 ・グラフの間隔が何を表しているのか，式や表を根拠に説明する。 ・逆向きに進む動きを，グラフで表現することができる。

② 実施時期：令和元(2019)年 10 月

③ 対象生徒：国立大学附属中学校１年生

④ 授業の目標：

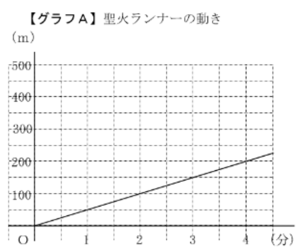
聖火ランナーの動きと写真を撮りに行く人の動きを，グラフを基に，式や表と関連付けて考察することを通して，正負の向きや比に着目したりして誰もが納得できる説明にしていくとともに，事象を数理的に捉えるよさに気づくことができる。

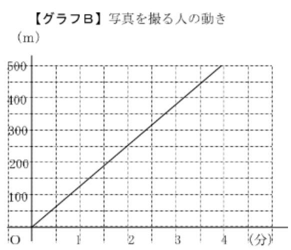
（３）授業展開と生徒の反応

第１時：聖火ランナーが駿府城公園に来る！

授業者は，2020 年東京オリンピック・パラリンピックにむけ聖火ランナーが全国を走り，６月に駿府城公園に来ることを紹介し，聖火ランナーの募集があったことや県内のコース等について知っている情報を挙げていった。

聖火ランナーについて興味がわいたところで，授業者は課題となる文章とグラフＡ，Ｂを配った。





子どもたちは，まずグラフの整数の値を読みとり，どの地点の写真を撮ることができるのかを予想していった。そして，次のように発言（S：子ども,T：教師）していった。

S：トータルで何枚くらい聖火ランナーの写真を撮ることができるのかな？
S：状況によるね。正面から撮りはじめて後ろ姿まで撮ったとしたら何枚撮ったと言えるのかな？
T：同じ場所から撮る写真は１枚と考えて，写真を撮ることができる範囲を考えてもよい。

S：撮る人がたくさんいれば，たくさん撮れる。
S：公園の中を通って先回りをすることはできるのかな？
T：今回は，カメラは２台で，ランナーと一緒に写る写真が撮りたいと考えている。駿府城公園の中に入ることはできず，まわりを移動すると考えましょう。
S：家康くんたちと聖火ランナーが一緒に写る写真は，聖火ランナーが何メートル手前まで来た時に撮影すればよいのだろう。
T：実際に距離を変えて写真を撮ってみよう。
S：５ｍ離れただけで，写真だとずいぶんと離れて見えるな。できるだけ近くなる場所を考えよう。
S：聖火ランナーは，最後はどこにいくのか？逆走はしてもよいのかな？
S：立ち止まって聖火ランナーを待ってもよいのかな？
T：聖火ランナーは何周かまわっているとします。それ以外は，自由（ユニーク）に考えてみてください。

子どもたちから「写真を撮る人が，聖火ランナーと同じ向きに移動しているのか，反対向きに移動しているのかによって，撮る場所が変わってくる」，さらに「公園内を移動してもいいのか」という意見が出た。そこで，考える条件として，公園内は移動しないこと，カメラは２台でランナーと一緒に写る写真を撮ること，立ち止まることはよいが移動の速さは一定とすることを全体で確認した。再度「２枚目以降の写真は，どのあたりで撮ることができるのだろうか」について，各自で追究する時間を十分に確保した。

第２時：２枚目以降の撮影場所の特定

子どもたちは，抱いた疑問を解消するために，個人追究を進めていった。授業者は，困り感のある子どもに寄り添い，具体的な場面（条件）を考えてみたり，数値を固定し計算したりしたことから考えるように促した。また，方眼紙（OHP シートに印刷した透明な方眼シート），電卓を使うことができるように用意した。

子どもたちは，透明な方眼シートに図を書き入れてみたり，重ねて数値を書き込んだりしながら，２枚目以降の写真を撮るまでにかかる時間，移動した距離を求めていった。

子どもたちの多くは２枚目の写真を速く（効率よく）とるために，聖火ランナーと逆向きに移動すると考えはじめた。

・合わせた距離は，175ｍずつ増えている。表から９分から 10 分の間であるとわかる。正確な距離は計算で求めるしかないだろう。

A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	125	250	375	500	625	750	875	1000	1125	1250

この間

B	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500

・聖火ランナーは１分 125ｍで進む。家康くんたちは１分 50ｍ。125ｍを 10 分で進むとしたら，1250ｍになる。そのとき，家康くんたちは 500ｍ進むので，通り過ぎた後になってしまう。なので，９分で試してみると 1125ｍと 450ｍで 1575ｍとなり，９分 30 秒以内に写真が撮れる。
・スタートしてからの時間をｘ分とすると，

$$125x + 50x = 1600$$
$$175x = 1600$$
$$x = 64/7$$
$$= 9 と 1/7$$

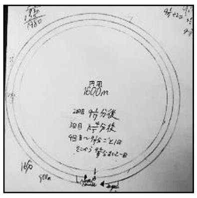
したがって家康くんたちの進んだ距離が，
50×64/7＝457.142857…（ｍ）のとき写真を撮ることができる。

授業者は，子どもたちにわかったこと，さらに調べたいことを記入するように伝え，授業を終えた。子どもたちの振り返りシートには，次のような内容が記入された。

・２人の間が 1600ｍになる地点を計算で求め，だいたい９分後に撮ることができるとわかった。
・グラフの聖火ランナーと家康くんたちの差はどんどん広がっていく。
・家康くんたちの進んだ距離は向きに関係なく同じである。なので，聖火ランナーとの間隔は均等に変化していく。２枚目以降も同じ速さで移動していると考えると，かかる時間は２倍，３倍と考えられる。
・聖火ランナーが 1 周回ってきた時，基準（スタート地点）に戻ったと考えることができれば，写真を撮る人と追い抜くところをグラフに表すことができる。しかし，1600ｍ地点まで行くと０ｍにもどる。それで「比例」と言えるのか。
・グラフで逆方向に進む様子は，グラフを反転させて右下がりにすればよい。中学校に入ってから負の数には正の数と反対向きの性質があると学習したが，比例のグラフでは正の向きが右上がり，負の向きが右下がりになると考えられる。

＜さらなる疑問＞
・ダイヤグラムのように考えられると思ったが，うまくいかない。周回する運動の場合，1600ｍの地点が０ｍの地点にもどることになり，グラフの上と下に点ができてしまう。

・できるだけたくさん写真を撮るためにはどうすればよいのだろうか。
・駿府城公園の形を正方形ではなく，円にして考えても同じように考えることができるのではないか。



第 3,4 時：グラフと式，グラフと表を関連付けた考察

聖火ランナーと逆向きに移動する時（図６の A の向き）や同じ向きに移動する時（図６の B の向き），その他の移動の方法を比較してみて，気づいたことを伝え合おう」となげかけ，４人組で意見をまとめる時間をとった。グループでの話し合いは一つにまとめるものではなく，疑問に感じていることを話しやすい環境になるように声かけをしていった。また，他のグループにはない発想や考え方で説明している生徒には，全体に広げるよう促していった。

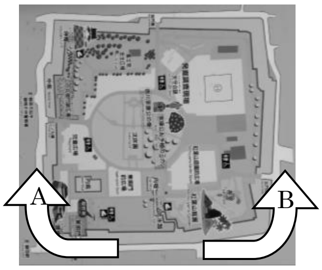


図６　撮影者の移動の向き

全体では「最短の時間で２枚目の写真を撮る」ことについて疑問をなげかける発言からはじまり，グループで話合ってきたことをもとに，聖火ランナーと写真を撮る人の動きが逆向きになることや９分，10 分のときの移動した距離を表にして，その間で写真を撮ることができるなどの説明をしていった。

授業者は，グループ活動の中で把握した内容から意図的に２つの動きを１つの座標平面上に表している子どもの意見（図７）を全体に取りあげた。

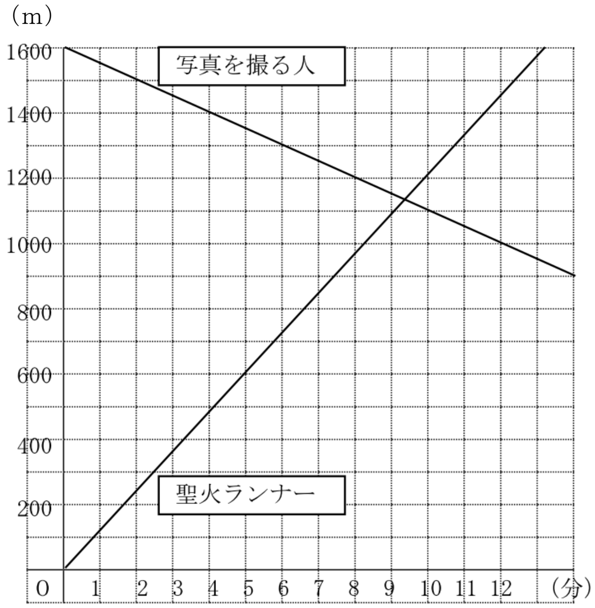


図７　２つの動きを１つの座標平面上に表現

グラフの交点が写真を撮ることのできる場所であるということに子どもたちは驚き，納得していた。他学級の実践では，原点から右上がりのグラフと右下がりのグラフが広がるようなくの字が描かれ（図８）が一周分（1600m）になる地点を見つけ出した。

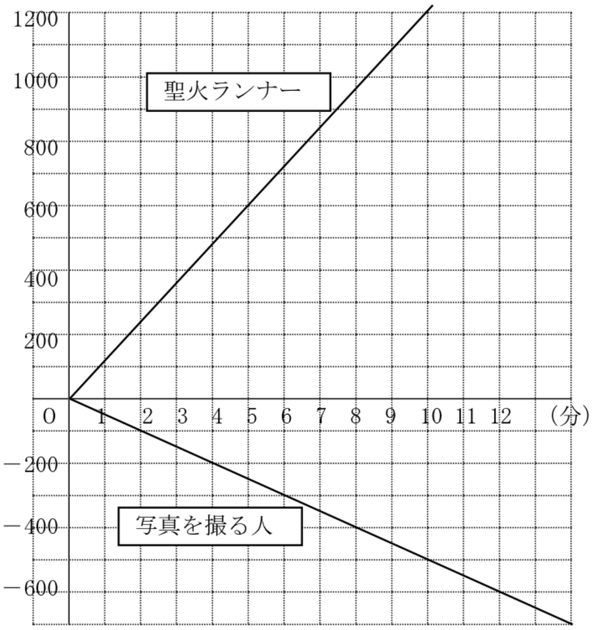


図８　２つの動きを比例定数が正と負のグラフに表現

２枚目をどのあたりで撮ることができるかについて理解した子どもたちは，２枚目以降をできるだけたくさん撮るためにはどのように移動すればよいかを考えていった。写真を撮る家康くんたちは４人いるので２手に分かれて移動する方法が考えられた。しかし，聖火ランナーと同じ向きに移動するということは聖火ランナーが一周回って追いつかれたときに撮ることになるので効率が悪い。子どもたちは，逆回りに回るグループを時間差で移動させる方法を考えていった。

授業の中で，写真を撮るためには一度立ち止まり，静止する時間が必要であると考えていた子どもが，提示されたグラフを見て，横へ一直線にしてまた動き出すように書き変えた。これは，一次関数の内容ではあるが，比例を応用させた考え方で説明しており，さらには比例（のグラフ）とは何なのかを全体で問い直すことができた。

そして，２枚目以降の３枚目，４枚目，……の写真を撮るまでにかかる時間は，はじめの写真を除いた枚数に比例することを見いだしていった。授業者は，子どもたちに伴って変わる数量を考えるうえで大切にすべきことを記入するように伝え，本題材を終えた（写真１，２）。

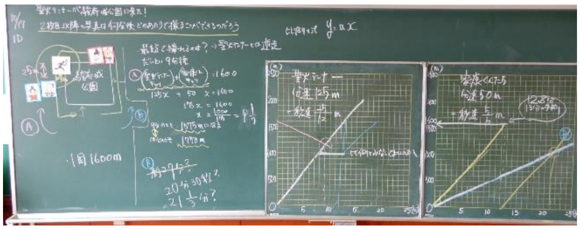


写真１　第３時終了時の板書

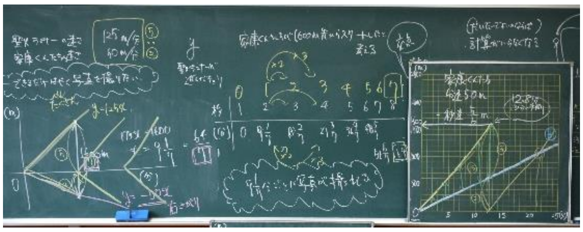


写真２　第４時終了時の板書

授業を終えて，本題材全体の生徒の振り返りでは，以下のような記述が見られた。

- はじめは手で数えながら一回一回点を打って整理して考えていた。それを表にすることで求めていたが，立ち止まったりする動きをどこまで比例と見なすのかという問題にぶつかってしまった。
- 「効率よく撮る」をテーマにして考えたが，向きを変えて考えることは難しかった。そんな中，グラフはそれぞれの原点を捉え直すことによって交わるところがわかりやすいと感じた。
- ０（原点）があることによって，比例とみなす価値が見えてきた。周回するグラフを筒状に表現する人の意見を聞いて，自分の思考が一層鮮やかになった気がした。
- グラフにすることでいろいろなことがわかりやすくなった。距離感やどれくらいのスピードで近づいているのかが数字よりパッと見るだけでわかる。
- ２枚目以降の写真も９と1/7分ごとに撮ることができる。すなわち写真の枚数も時間に比例していることがわかった。
- 今回の比例の単元で学んだことは，グラフの表し方の多様性だった。自分のイメージでは，距離が０mからどこまでも伸びていく右上がりが基本だと考えていたが，１周を目盛りのように考えれば，1600mに達したらまた０mに戻って比例になると考えられる。
- 比例のグラフは何を基準にするかによって変わると感じた。例えば，聖火ランナーを基準とすれば家康くんたちは比例と言えなくなるし，家康くんたちを基準にすればランナーが比例ではなくなる。けれど，時間軸で２つの比例のグラフを合わせることができる。さらに，２つの比例のグラフの間の距離を基準にすると，新しい比例のグラフが書けるのではないか。

（４）考察

授業全体を通して，「問題発見・解決の過程」という視点から検討して，次の点を指摘することができる。

①　教材について

身近な場所で行われるイベントに対して，数値を基に，学級全員が意見を出し，２つの動きを捉えようとしていた。しかし，子どもたちの思考に寄り添い，どこまで自由な発想を取り入れていくのかについては，課題が残る。

例えば，ある学級では駿府城公園内を縦断して写真を撮るという考えが全体に広がった。実際の場面では，そのように動くことは当然考えられ，子どもたちは，目の前にある駿府城公園の状況を基にして題材の解決の方法をより一層現実に近い形で考えようとしていた。これは，最初に提示した題材が対象の生徒にとって真正なものであったことが分かる。結果的には，提示した速さで縦断すると，聖火ランナーが通り過ぎてから写真を撮りたい場所に到着するため，縦断しても意味がないと結論づけた。

また，聖火ランナーが駿府城公園の内堀りを周回して走るか，実際にはわからない状況で，どこまで実際に近づけて場面設定をしていくのかは，とても難しい問題である。現地に行って走ってみたり，すれ違う写真を撮ってみたり試してみることで，速さは適切なのか，設定に無理がないかなど，事前に教材について検討することは，授業づくりにおいて大切にしていきたい。

②　グラフと式，表の関連について

個人での追究の場面で大半の生徒が，２枚目に留まり，方程式の値を細かく求めていたり，表でそれぞれの進んだ距離を表していたりしていた。全体で，グラフの交点が写真を撮る地点であるという意見を取り上げることで，多くの子どもたちがグラフの必要性や連続性について考えることができた。また，２つの比例が重なり合うとき，図７のように，進む向きが逆になることを自然と右下がりのグラフとして表そうとしたことは，負の数の学びを想起させ，結びつけることができた。このことから，本実践は中１で学ぶ比例の利用，そして，中２で学ぶ一関数の素地指導としてふさわしいものであると言える。

６．２つの実践からの示唆

２つの実践から，中学校数学科の関数領域における日常生活や社会の事象を解決する指導のあり方として，次の示唆を得た。

（１）教材の真正性について

「緊急地震速報」と「聖火ランナーが駿府城公園に来る」の２つの教材に共通することは，世の中で実際に起こって（起こる）ことである。しかし，子どもたちにとっては日常生活で常に出会うわけでは

ないため，文脈は子どもたちから遠い。そこで，「緊急地震速報」では学校内で地震が起こった場合を設定し，「聖火ランナーが駿府城公園に来る」では地域の広報担当者の立場になって写真を撮影する場面を設定した。このように，対象となる子どもたちの実態に応じて「身近で偽りのない文脈や活動」にすることが大切である。

（２）比例としての問題解決について

「緊急地震速報」では，実際の地震の波形のデータを表やグラフにしたりすることで，比例に気づいた。このことを基に，震源の場所を見つける活動では方程式を使って地震発生時刻を求める活動などを行ったが，方程式を解釈することで「２つの地震波が届くまでの時間の差は，震源からの距離に比例しているのではないか」と仮説を立て，検証していった。これに対して，「聖火ランナーが駿府城公園に来る」の実践では，負の数への数の拡張における学びを関数の領域で活かし，右下がりのグラフを自然と取り入れやすくしたことにより，グラフを基に活発な議論が行われていた。

子どもたちが現実的に考えていこうとする思考と，数学的にいろいろな条件を整えて考えていこうとする思考をどこで共有し，モデル化させていくのかについてさらに構想を練る必要がある。その上で，伴って変わる数量について，比例と見なせるかどうかを子どもたちが判断し，数学的な見方・考え方を働かせながら問題解決することを大切にしていきたい。

（３）グラフと式，表の関連について

グラフ，式（方程式），表を用いて問題を解決するには，それぞれに根拠を明確にした説明が必要となる。そのため，それぞれの説明を関連づけていくには，授業者が視点を与えたり，振り返りをさせたりして，子どもたち自身がグラフ，式，表を俯瞰的・メタ認知的に見ることを自覚できるようにしていくようにしたい。

７．今後の課題

今後の課題として，次の３点を挙げることができる。

（１）子どもたちの学びの自覚化

子どもたち自身が，日常生活や社会の事象を数学化するよさをどの程度感じることができたのだろうか。これは，１つの題材で達成されることではないと考える。授業や題材を終えたときに，授業者のねらう学びをどれだけ子どもたちが自覚できているのか，子どもたち自身にふり返りの時間をとり，それをもとに検証することを強化していく。

（２）題材と題材，領域と領域のつながり

本題材の中で見られた子どもたちの姿が，別の題材においても見られるようにするためには，授業者が別の題材において本題材とのつながりをどのように意識して授業構想できるかが重要であると考える。

また，一つの事象を関数の領域の問題のみで捉えるのではなく，数や図形の概念を捉え直すきっかけとなるような授業構想を継続していく。

（３）学年のつながり

３年間を見通して，日常生活や社会の事象を数学化するよさを味わう実践を継続して行う。そして，同じ事象を学年の積み上げによって，数学の世界に引き込み，数や文字，図形について疑問を抱き，子どもたち自ら性質や定理を導き出す授業を構想していきたい。

＜引用・参考文献＞

有馬朗人他(2019).新版　理科の世界１，大日本図書,222-233.

中央教育審議会(2016).幼稚園，小学校，中学校，高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善及び必要な方策等について（答申），p.141，別添資料」,p.30.

片桐重男(2004).数学的な考え方の具体化と指導，明治図書 83-88.

榀元新一郎(2009).中学校新数学科「数学的な表現力」を育成する授業モデル，明治図書.

文部科学省(2018).中学校学習指導要領解説数学編，日本文教出版,23-24,84-87.

仲田紀夫(2003).新版・中学数学の科学的勉強法，評論社.

岡本光司・静岡大学教育学部附属静岡中学校数学科(1998).生徒が「数学する」数学の授業，明治図書,70-82.

佐伯昭彦・川上貴・金児正史(2019). 算数・数学教科書の応用問題を数学的モデリングの教材に作り替えるための枠組みに関する一考察，科学教育研究,43(3),220-232.

静岡大学教育学部附属静岡中学校・村山功(2019).対話が深める子どもの学びー「教科ならではの文化」を味わう授業ー,明治図書,68-85.

髙木啓(2000).教授学研究における構成主義の位置と課題，教育方法学研究 26 ,47-54.

竹下知行・坂本健司・熊倉啓之(2011).数学的な思考力・表現力を鍛える授業 24，明治図書.

東京都中学校数学教育研究会研究部関数委員会(2012).中学校数学科　関数指導を極める，明治図書, 54-63.

上山明博(2013).関東大震災を予知した二人の男，産業新聞出版.

Weiss, M., Herbst, P., & Chen, C. (2009). Teachers' perspectives on "authentic mathematics" and the two-column proof form. *Educational Studies in Mathematics*, 70(3), 275-293.