Development Mathematics Materials of Law of Sine & Cosine, Area Formula : Focus on Expansion to n-Polygon

論文

正弦定理・余弦定理・面積公式に関する教材開発

－*n* 角形への拡張－

四之宮　佳彦　　熊倉　啓之
静岡大学教育学部　静岡大学教育学部

Development Mathematics Materials of Law of Sine & Cosine, Area Formula

- Focus on Expansion to *n*-Polygon -

Yoshihiko SHINOMIYA　Hiroyuki KUMAKURA

Abstract

A purpose of this study is to develop mathematics materials of "Law of Sine & Cosine, Area formula" that enable the learning emphasizing process of comprehension, expansion and systematization in mathematical world. First, we researched previous studies and found some materials of "Law of sine & cosine, Area formula". Second, we developed our materials of "Law of Sine & Cosine, Area formula" in the case of quadrangle, pentagon and n-polygon. Third, we clarified three educational values of our materials as follows;

1) First value is that our materials are true in the case of n-polygon both of convex and concave,
2) Second value is that our materials are understood by various faces,
3) Third value is that our materials are proved inductively.

キーワード：教材開発，正弦定理，余弦定理，面積公式，探究的な学習，統合・発展／体系化

1　はじめに

2018年6月に発表された報告書「Society 5.0 に向けた人材育成～社会が変わる，学びが変わる～」（Society 5.0 に向けた人材育成に係る大臣懇談会，2018）には，次のような記述がある．

> Society 5.0 を牽引するための鍵は、技術革新や価値創造の源となる飛躍知を<u>発見・創造</u>する人材と、それらの成果と社会課題をつなげ、プラットフォームをはじめとした新たなビジネスを創造する人材であると考えられる．（下線部筆者）

また，「これからやってくるAI定着後の社会では，クリティカルシンキングの次に何かを創り出すという，<u>創造性</u>こそが勝負です．」（大橋，2018）や「未来社会を生きる子どもたちに必要と考えられるのは，全員が，AIに代替されない<u>思考力，発想力，創造力</u>を身に付け，それぞれが才能を発揮できるようにすることである」（本間，2018）といった主張がある（下線部筆者）．

これらの記述から，これからの社会を生きていく上では，「発見する力」や「創造性」が重視されていることがわかる．

一方，2018年3月に告示された高等学学習指導要領では，理数科を新設して「理数探究」という探究的科目が新たに設置されることとなった．中央教育審議会答申（2016）には，この新教科・科目の基本原理が，次のように記述されている．

> 様々な事象に対して知的好奇心を持つとともに，教科・科目の枠にとらわれない多角的，複合的な視点で事象を捉え，「数学的な見方・考え」や「理科の見方・考え方」を豊かな発想で活用したり，組み合わせたりしながら，探究的な学習を行うことを通じて，新たな価値の創造に向けて粘り強く挑戦する力の基礎を培う．

ここで，注目すべきは「知的好奇心」であり「新たな価値の創造」であり「粘り強く挑戦する」という表現である．AI技術が急速な進歩を遂げる時代において，人間として身につけるべき資質・能力が問われる中で，「知的好奇心を持って，新たな価値の創造に向けて粘り強く挑戦する力」を育成することは，大いに意義のあることであるといえよう．

数学学習において，教師の問題解法の解説を聞いて理解し，解法を覚えるだけの学習では，「粘り強く挑戦する」力は育成されない．また，教師から与えられた問題－すなわち解が存在することがあらかじめ保証されている問題－を解決するだけでは，仮に問題解決に主体的に関わったとしても，「新たな価値の創造」には向かわない．そして，数学を学習することへの「知的好奇心」は生じにくいであろう．

知的好奇心を持って，新たな価値の創造に向けて粘り強く挑戦する力を育成するためには「探究的な学習」が不可欠であろう．この探究的な学習を推進するためには，教科書の問題を解決するだけではなく，教科書の問題を発展・統合したり，体系化した

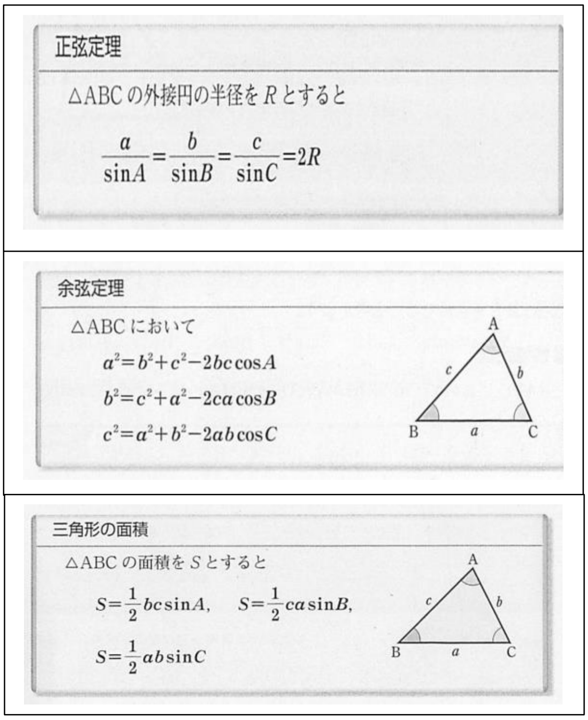
りする活動が重要であるといえよう．

一方で，「統合・発展／体系化」など基づく探究的な学習を行うためには，それに相応しい教材が必要である（熊倉，2018）．

そこで，本研究では，探究的な学習を促す「統合・発展／体系化」に焦点を当て，このような学習を可能とする高等学校の教材を開発することを目的とする．

筆者らは，これまでに「数学 A」の教科書で扱っている「チェバ・メネラウスの定理」の教材を開発し，その教材の特徴と教育的価値を指摘した（四之宮他，2019）．

本稿では，高等学校数学科の必修科目である数学 I の学習内容である「正弦定理・余弦定理」及び「面積公式」に焦点を当てる．これらの定理・公式は，教科書で次のように扱われている．



正弦定理

△ABC の外接円の半径を R とすると

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

余弦定理

△ABC において

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$
$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

三角形の面積

△ABC の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A,\quad S=\frac{1}{2}ca\sin B,$$
$$S=\frac{1}{2}ab\sin C$$

図 1　数学 I　数研出版　pp. 121, 124, 126

これらの定理の教科書での扱い方は，いずれも，まず定理を紹介した上で，証明し，定理を使って線分の長さや角度，面積を求める問題を解く展開となっている．これだけでは，前述した「統合・発展／体系化」に基づく探究的な学習にはならない．もしこれらの定理・公式を四角形，五角形や n 角形の場合に拡張する教材が開発できれば，「統合・発展／体系化」に基づく探究的な学習が可能になる．

そこで，これらの定理・公式の n 角形への拡張について考察する．

2　正弦定理，余弦定理の拡張に関する先行研究

教材を開発するのに先立って，まず四角形，五角形，六角形に関する正弦定理，余弦定理の先行研究を調査した．以下は全て凸多角形に対しての結果であるが凸でなくとも同様の定理が成り立つ．

(1) 凸四角形の正弦定理，余弦定理に関する先行研究

凸四角形の正弦定理，余弦定理に関する先行研究として，次の定理が見いだされた（例えば，大谷，2019, online)．以下では，凸四角形$ABCD$に対し，

$$a = DA,\quad b = AB,\quad c = BC,\quad d=CD$$

である．

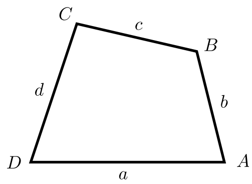


図 2　凸四角形$ABCD$

定理 1 (凸四角形に関する正弦定理)
等式
$$b\sin A - c\sin(A+B) - d\sin D = 0$$
が成り立つ．

この定理の証明は，辺DAがx軸と平行になるように四角形を回転させたときの，他の三辺の高さの増減をみることで得られる．更にこの三辺の左右の増減をみることで得られる等式

$$a - b\cos A + c\cos(A+B) - d\cos D = 0$$

と凸四角形に関する正弦定理を用いて以下が得られる．

定理 2 (凸四角形に関する余弦定理)

(a)　等式
$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos A - 2bc\cos B + 2ca\cos(A+B)$$
が成り立つ．

(b)　等式
$$a^2 + c^2 + 2ac\cos(A+B) = b^2 + d^2 - 2bd\cos(A+D)$$
が成り立つ．

(2) 凸五角形，凸六角形の正弦定理，余弦定理に関する先行研究

凸五角形，凸六角形の正弦定理，余弦定理に関する先行研究として，次の定理が見いだされた（Kenrshner，1971，online)．以下では，凸五角形 ABCDEに対し，

$$a = DA,\quad b = AB,\quad c = BC,\quad d=CD,\quad e=DE$$

である．

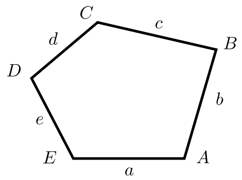


図 3　凸五角形$ABCDE$

<u>定理 3</u> (凸五角形に関する正弦定理)
　等式
$$b\sin A - c\sin(A+B) = e\sin E - d\sin(D+E)$$
が成り立つ．

<u>定理 4</u> (凸五角形に関する余弦定理)
　等式
$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2-2ab\cos A-2bc\cos B& \\ -2ac\cos(A+B)& \\ =d^2+e^2-2de\cos D& \end{aligned}$$
が成り立つ．

更に凸六角形に対しても同様の正弦定理，余弦定理が得られる(Kenrshner，1971，online)．以下では，凸六角形$ABCDEF$に対し，
$$a=FA,\quad b=AB,\quad c=BC,$$
$$d=CD,\quad e=DE,\quad f=EF$$
である．

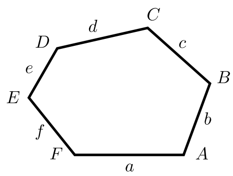


図 4　凸六角形$ABCDEF$

<u>定理 5</u> (凸六角形に関する正弦定理)
　等式
$$b\sin A - c\sin(A+B)$$
$$=f\ \sin F - e\ \cos(E+F)\ + d\ \cos(D+E+F)$$
が成り立つ．

<u>定理 6</u> (凸六角形に関する余弦定理)
　等式
$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2-2ab\cos A-2bc\cos B& \\ -2ac\cos(A+B)& \\ =d^2+e^2+f^2-2de\cos D-2ef\cos E& \\ +2df\cos(D+E)& \end{aligned}$$
が成り立つ．

これらの定理の証明は凸四角形の場合と同様である．特に，上の凸五角形に関する余弦定理は凸五角形を四角形$ABCE$と三角形CDEに分割し，それぞれに対して余弦定理を用いることで得られる．凸六角形に関する余弦定理は凸六角形を四角形$ABCF$と四角形$CDEF$に分割し，それぞれに対して余弦定理を用いることで得られる．Kenrshner には記されていないが，以下の形の余弦定理も得られる．

<u>定理 7</u> (凸五角形に関する余弦定理その 2)
　等式
$$\begin{aligned} a^2=b^2+c^2+d^2+e^2&-2bc\cos B \\ &+2bd\cos(B+C) \\ &-2be\cos(B+C+D)-2cd\cos D \\ &+2ce\cos(C+D)-2de\cos D \end{aligned}$$
が成り立つ．

３　凸n角形における正弦定理，余弦定理

凸n角形に対して正弦定理，余弦定理を与える．余弦定理には 2 種類ある．一方は正弦定理の類似である．こちらを第一余弦定理と呼ぶことにする．もう一方は，上で与えた余弦定理その 2 の類似である．こちらを第二余弦定理と呼ぶことにする．高等学校の教科書で扱われている余弦定理はこの第二余弦定理である．以下では，凸n角形$P_1P_2\cdots P_n$に対し，$P_0=P_n, P_{n+1}=P_1$とおき，
$$a_i=P_{i-1}P_i\quad (i=1,2,\ldots,n),$$
$$A_i=\angle P_{i-1}P_iP_{i+1}\quad (i=1,2,\ldots,n),$$
とする．

注．以下の定理は次節において一般の多角形に拡張される．

<u>定理 8</u> (凸n角形に関する正弦定理，第一余弦定理)
　等式
$$\sum_{i=2}^{n}(-1)^i\, a_i\sin\left(\sum_{j=1}^{i-1}A_j\right)=0\quad (\text{正弦定理}),$$
$$\sum_{i=2}^{n}(-1)^i\, a_i\cos\left(\sum_{j=1}^{i-1}A_j\right)=a_1\ (\text{第一余弦定理})$$
が成り立つ．

<u>証明</u>

nに関する帰納法を用いて証明する．まず，$n=3$のとき，頂点P_2から対辺へ下ろした垂線の足をHとすると，
$$\begin{aligned} &a_2\sin A_1-a_3\sin(A_1+A_2) \\ &=a_2\sin A_1-a_3\sin A_3 \\ &=\mathrm{P_2H}-\mathrm{P_2H} \\ &=0 \end{aligned}$$
となる．また，
$$\begin{aligned} &a_2\cos A_1-a_3\cos(A_1+A_2) \\ &=a_2\cos A_1+a_3\cos A_3 \\ &=P_1H+P_3H \\ &=P_1P_3 \\ &=a_1 \end{aligned}$$

も得られる．

次に任意の凸$(n-1)$角形において上の二式が成り立つと仮定する．凸n角形$P_1P_2\cdots P_n$を線分P_1P_{n-1}によって凸$(n-1)$角形$P_1P_2\cdots P_{n-1}$と三角形$P_{n-1}P_nP_1$に分割する．ここで，$b=P_{n-1}P_1$，$B=\angle P_{n-1}P_1P_2$，$C=\angle P_nP_1P_{n-1}$とおくと，凸$(n-1)$角形$P_1P_2\cdots P_{n-1}$に対して，

$$\sum_{i=2}^{n-1}(-1)^i a_i \sin\left(B+\sum_{j=2}^{i-1}A_j\right)=0 \quad ・・・①,$$

$$\sum_{i=2}^{n-1}(-1)^i a_i \cos\left(B+\sum_{j=2}^{i-1}A_j\right)=b \quad ・・・②$$

が成り立つ．①式の両辺を$\cos C$倍して得られる等式に，②式の両辺を$\sin C$倍して得られる等式を辺々足すことで，

$$\sum_{i=2}^{n-1}(-1)^i a_i \sin\left(B+C+\sum_{j=2}^{i-1}A_j\right)=b\sin C$$

を得る．いま，$A_1=B+C$であり，三角形$P_{n-1}P_nP_1$において正弦定理を用いることで，

$$\begin{aligned}
b\sin C &= a_n \sin A_n\\
&= a_n \sin\left((n-2)\pi-\sum_{j=1}^{n-1}A_j\right)\\
&= -(-1)^n a_n \sin\left(\sum_{j=1}^{n-1}A_j\right)
\end{aligned}$$

が成り立つことから，等式

$$\sum_{i=2}^{n}(-1)^i a_i \sin\left(\sum_{j=1}^{i-1}A_j\right)=0$$

が示される．

次に①式の両辺を$-\sin C$倍して得られる等式に，②式の両辺を$\cos C$倍して得られる等式を辺々足すことで，

$$\sum_{i=2}^{n-1}(-1)^i a_i \cos\left(B+C+\sum_{j=2}^{i-1}A_j\right)=b\cos C$$

を得る．いま，$A_1=B+C$であり，三角形$P_{n-1}P_nP_1$において第一余弦定理を用いることで，

$$\begin{aligned}
a_1 &= b\cos C - a_n\cos(\pi-A_n)\\
&= b\cos C + a_n\cos A_n\\
&= b\cos C + a_n\cos\left((n-2)\pi-\sum_{j=1}^{n-1}A_j\right)\\
&= b\cos C + (-1)^n a_n\cos\left(\sum_{j=1}^{n-1}A_j\right)
\end{aligned}$$

が成り立つから，

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=2}^{n}(-1)^i a_i \cos\left(\sum_{j=1}^{i-1}A_j\right)\\
&=\sum_{i=2}^{n-1}(-1)^i a_i \cos\left(\sum_{j=1}^{i-1}A_j\right)+(-1)^n a_n\cos\left(\sum_{j=1}^{n-1}A_j\right)\\
&= b\cos C+(-1)^n a_n\cos\left(\sum_{j=1}^{n-1}A_j\right)\\
&= a_1
\end{aligned}$$

となる．　(証明終了)

上の定理から，以下の凸n角形に関する第二余弦定理が得られる．

> **定理 9 (凸$\boldsymbol{n}$角形に関する第二余弦定理)**
>
> 等式
>
> $$a_1^2=\sum_{i=2}^{n}a_i^2+2\sum_{2\le i<j\le n}(-1)^{j+i}a_ia_j\cos\left(\sum_{k=i}^{j-1}A_k\right)$$
>
> が成り立つ．

証明

第一余弦定理の両辺を二乗すると，

$$\begin{aligned}
a_1^2 &= \left\{\sum_{i=2}^{n}(-1)^i a_i\cos\left(\sum_{k=1}^{i-1}A_k\right)\right\}^2\\
&=\sum_{i=2}^{n}a_i^2\cos^2\left(\sum_{k=1}^{i-1}A_k\right)\\
&\quad +2\sum_{2\le i<j\le n}(-1)^{j+i}a_ia_j\cos\left(\sum_{k=1}^{i-1}A_k\right)\cos\left(\sum_{k=1}^{j-1}A_k\right)
\end{aligned}$$

となる．次に正弦定理の両辺を二乗すると，

$$\begin{aligned}
0 &= \left\{\sum_{i=2}^{n}(-1)^i a_i\sin\left(\sum_{k=1}^{i-1}A_k\right)\right\}^2\\
&=\sum_{i=2}^{n}a_i^2\sin^2\left(\sum_{k=1}^{i-1}A_k\right)\\
&\quad +2\sum_{2\le i<j\le n}(-1)^{j+i}a_ia_j\sin\left(\sum_{k=1}^{i-1}A_k\right)\sin\left(\sum_{k=1}^{j-1}A_k\right)
\end{aligned}$$

となる．二式を辺々足すと，

$$\begin{aligned}
a_1^2 &= \sum_{i=2}^{n}a_i^2\cos^2\left(\sum_{k=1}^{i-1}A_k\right)+\sum_{i=2}^{n}a_i^2\sin^2\left(\sum_{k=1}^{i-1}A_k\right)\\
&\quad +2\sum_{2\le i<j\le n}(-1)^{j+i}a_ia_j\cos\left(\sum_{k=1}^{i-1}A_k\right)\cos\left(\sum_{k=1}^{j-1}A_k\right)\\
&\quad +2\sum_{2\le i<j\le n}(-1)^{j+i}a_ia_j\sin\left(\sum_{k=1}^{i-1}A_k\right)\sin\left(\sum_{k=1}^{j-1}A_k\right)\\
&=\sum_{i=2}^{n}a_i^2\\
&\quad +2\sum_{2\le i<j\le n}(-1)^{j+i}a_ia_j\cos\left(\sum_{k=1}^{i-1}A_k-\sum_{k=1}^{j-1}A_k\right)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=2}^{n} a_i^2 + 2 \sum_{2 \le i < j \le n} (-1)^{j+i} a_i a_j \cos\left(\sum_{k=i}^{j-1} A_k\right)$$

となり主張が得られる． (証明終了)

4 n角形における正弦定理，余弦定理の証明（ベクトルを用いる方法）

本節では第 3 節で与えた正弦定理，余弦定理をベクトルを用いて再証明する．この方法を用いる場合，対象とする多角形は凸である必要はない．以下，n角形$P_1P_2\cdots P_n$に対し，$P_0 = P_n, P_{n+1} = P_1$とおき，各$i = 1,2,\ldots,n$に対し，

$$a_i = P_{i-1}P_i,$$
$$A_i = \angle P_{i-1}P_iP_{i+1},$$
$$B_i = \pi - A_i,$$
$$\mathbf{v}_i = \overrightarrow{P_{i-1}P_i}$$

とする．このとき，以下の補題 1 が成り立つ．

補題 1

以下では，O は零ベクトルである．

(1) $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{v}_n = O$

(2) もし$1 \le i < j \le n$ならば，ベクトル$\mathbf{v}_i$と$\mathbf{v}_j$の成す角は

$$\sum_{k=i}^{j-1} B_k$$

である．

(3) 等式

$$\cos\left(\sum_{k=i}^{j-1} B_k\right) = (-1)^{j+i} \cos\left(\sum_{k=i}^{j-1} A_k\right),$$

$$\sin\left(\sum_{k=i}^{j-1} B_k\right) = (-1)^{j+i+1} \sin\left(\sum_{k=i}^{j-1} A_k\right)$$

が成り立つ．

証明

(1) 定義より，

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{v}_n = \overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2P_3} + \cdots \overrightarrow{P_nP_{n+1}} = \overrightarrow{P_1P_{n+1}} = O$$

となる．

(2) n角形$P_1P_2\cdots P_n$の頂点は$P_1, P_2, \cdots, P_n$の順に反時計回りに並んでいるとしてよい．自然数i, jが$1 \le i < j \le n$を満たすとする．このとき，ベクトル$\mathbf{v}_i$をB_iだけ回転させて得られるベクトルは$\mathbf{v}_{i+1}$と同じ方向のベクトルである．同様にベクトル$\mathbf{v}_{i+1}$をB_{i+1}だけ回転させて得られるベクトルは$\mathbf{v}_{i+2}$と同じ方向のベクトルである．したがって，ベクトル$\mathbf{v}_i$を$B_i + B_{i+1}$だけ回転させて得られるベクトルは$\mathbf{v}_{i+2}$と同じ方向のベクトルである．以下繰り返して，ベクトル$\mathbf{v}_i$を$B_i + B_{i+1} + \cdots + B_{j-1}$だけ回転させて得られるベクトルは$\mathbf{v}_j$と同じ方向のベクトルである．したがって，ベクトル$\mathbf{v}_i$と$\mathbf{v}_j$の成す角は

$$\sum_{k=i}^{j-1} B_k$$

である．

(3) 定義から，

$$\cos\left(\sum_{k=i}^{j-1} B_k\right) = \cos\left(\sum_{k=i}^{j-1} (\pi - A_k)\right) = \cos\left(\pi(j-i) - \sum_{k=i}^{j-1} A_k\right) = (-1)^{j+i} \cos\left(\sum_{k=i}^{j-1} A_k\right),$$

$$\sin\left(\sum_{k=i}^{j-1} B_k\right) = \sin\left(\sum_{k=i}^{j-1} (\pi - A_k)\right) = \sin\left(\pi(j-i) - \sum_{k=i}^{j-1} A_k\right) = (-1)^{j+i+1} \sin\left(\sum_{k=i}^{j-1} A_k\right),$$

が成り立つ． (証明終了)

定理 10 (n角形に関する正弦定理，第一余弦定理)

等式

$$\sum_{i=2}^{n} (-1)^i a_i \sin\left(\sum_{k=1}^{i-1} A_k\right) = 0 \quad \text{(正弦定理)},$$

$$\sum_{i=2}^{n} (-1)^i a_i \cos\left(\sum_{k=1}^{i-1} A_k\right) = a_1 \quad \text{(第一余弦定理)}$$

が成り立つ．

証明

まず，第一余弦定理を示す．補題 1 より，

$$0 = \mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{v}_n) = |\mathbf{v}_1|^2 + \sum_{i=2}^{n} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_i = a_1^2 + \sum_{i=2}^{n} a_1 a_i \cos\left(\sum_{k=1}^{i-1} B_k\right) = a_1^2 + \sum_{i=2}^{n} (-1)^{i+1} a_1 a_i \cos\left(\sum_{k=1}^{i-1} A_k\right)$$

$$= a_1 \left\{ a_1 - \sum_{i=2}^{n} (-1)^i \; a_i \cos\left(\sum_{k=1}^{i-1} A_k \right) \right\}$$

が得られる．したがって，

$$\sum_{i=2}^{n} (-1)^i \, a_i \cos\left(\sum_{k=1}^{i-1} A_k \right) = a_1$$

が成り立つ．次に正弦定理を示す．ベクトル$\mathbf{v}_1$と直交する単位ベクトルを$\mathbf{v}_1^*$とする．必要ならば$-\mathbf{v}_1^*$を$\mathbf{v}_1^*$と置き換えることで，全ての $i\ (i = 1,2, \ldots, n)$ に対し，$\mathbf{v}_i$と$\mathbf{v}_1^*$の成す角は

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{i-1} B_k$$

であるとしてよい．したがって，補題 1 より，

$$\begin{aligned}
0 &= \mathbf{v}_1^* \cdot (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{v}_n) \\
&= \sum_{i=2}^{n} \; \mathbf{v}_1^* \cdot \mathbf{v}_i \\
&= \sum_{i=2}^{n} \; a_i \cos\left(\frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{i-1} B_k \right) \\
&= -\sum_{i=2}^{n} \; a_i \sin\left(\sum_{k=1}^{i-1} B_k \right) \\
&= -\sum_{i=2}^{n} \; (-1)^i \, a_i \sin\left(\sum_{k=1}^{i-1} A_k \right)
\end{aligned}$$

となるから，

$$\sum_{i=2}^{n} (-1)^i \, a_i \sin\left(\sum_{k=1}^{i-1} A_k \right) = 0$$

を得る． (証明終了)

定理 11 (n角形に関する第二余弦定理)

等式

$$a_1^2 = \sum_{i=2}^{n} a_i^2 + 2 \sum_{2 \le i < j \le n} (-1)^{j+i} a_i a_j \cos\left(\sum_{k=i}^{j-1} A_k \right)$$

が成り立つ．

証明

等式

$$-\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{v}_n$$

の両辺の絶対値の二乗を考えれば，

$$\begin{aligned}
a_1^2 &= |\mathbf{v}_1|^2 \\
&= |\mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{v}_n|^2 \\
&= \sum_{i=2}^{n} |\mathbf{v}_i|^2 + 2 \sum_{2 \le i < j \le n} \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j \\
&= \sum_{i=2}^{n} a_i^2 + 2 \sum_{2 \le i < j \le n} a_i a_j \cos\left(\sum_{k=i}^{j-1} B_k \right) \\
&= \sum_{i=2}^{n} a_i^2 + 2 \sum_{2 \le i < j \le n} (-1)^{j+i} a_i a_j \cos\left(\sum_{k=i}^{j-1} A_k \right)
\end{aligned}$$

となり主張が得られる． (証明終了)

5　n角形に関する面積公式

ここでは，n角形に関する面積公式を与える．凸四角形，凸五角形の面積公式に関する先行研究として，例えば，大谷(2019，online)が見いだされた．以下，前節と同様にn角形$P_1P_2 \cdots P_n$に対し，$P_0 = P_n, P_{n+1} = P_1$とおき，各$l = 1,2, \ldots, n$に対し，

$$\begin{aligned}
a_l &= P_{l-1}P_l, \\
A_l &= \angle P_{l-1}P_lP_{l+1}, \\
B_l &= \pi - A_l, \\
\mathbf{v}_l &= \overrightarrow{P_{l-1}P_l}
\end{aligned}$$

とする．また多角形$P_1P_2 \cdots P_n$の面積をSとする．このとき，以下が成り立つ．

定理 12 (n角形に関する面積公式)

等式

$$S = \frac{1}{2} \sum_{1 \le i < j < n} (-1)^{j-i+1} a_i a_j \sin\left(\sum_{k=i}^{j-1} A_k \right)$$

が成り立つ．

以下ではこの定理を証明する．まずは，座標平面上の多角形に対する以下の補題 2(面積公式)を証明する．

補題 2 (面積公式)

n角形$P_1P_2 \cdots P_n$の頂点は$P_1, P_2, \cdots, P_n$の順に反時計回りに並んでいると仮定する．各 $l (l = 1,2, \ldots, n)$ に対し，点P_lの座標を(x_l, y_l)とおく．このとき，n角形$P_1P_2 \cdots P_n$の面積をSとすると，

$$S = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n} (x_l - x_{l+1})\,(y_l + y_{l+1})$$

が成り立つ．ただし，$x_{n+1} = x_1$，$y_{n+1} = y_1$である．

証明

座標平面上の多角形Dに対し，その面積を$S(D)$で，補題 2 の右辺と同様にして定まる和を$T(D)$で表す．

補題 2 を(i)，(ii)，(iii)，(iv)の四つの段階に分けて証明する．

(i)　原点$O(0,0)$と点$A(a,b),B(c,d)$をこの順に反時計回りに回る三角形OABの面積が

$$\frac{1}{2}(ad-bc)$$

で表されることを示す．まず，$OA=\sqrt{a^2+b^2}$であり，点Bから直線OA: $y=\frac{b}{a}x$への距離は,

$$\frac{|ad-bc|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

である．いま，点Bは直線OAより上にあるから，$ad-bc>0$であるしたがって三角形OABの面積は$\frac{1}{2}(ad-bc)$である．

(ii)　三点$P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2),P_3(x_3,y_3)$をこの順に反時計回りに回る三角形$D=P_1P_2P_3$に対して，$S(D)=T(D)$を示す．いま，$D$の面積は原点$O(0,0)$と点$(x_2-x_1,y_2-y_1)$,点$(x_3-x_1,y_3-y_1)$を結ぶ三角形の面積と等しいから，(i)より，

$$\begin{aligned}
T(D)&=\frac{1}{2}\{(x_1-x_2)(y_1+y_2)+(x_2-x_3)(y_2+y_3)\\
&\qquad+(x_3-x_1)(y_3+y_1)\}\\
&=\frac{1}{2}\{-(x_2-x_1)(y_1+y_2)\\
&\qquad+(x_2-x_1+x_1-x_3)(y_2+y_3)\\
&\qquad+(x_3-x_1)(y_3+y_1)\}\\
&=\frac{1}{2}\{(x_2-x_1)(-y_1-y_2+y_2+y_3)\\
&\qquad+(x_3-x_1)(-y_2-y_3+y_3+y_1)\}\\
&=\frac{1}{2}\{(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(y_2-y_1)(x_3-x_1)\}\\
&=S(D)
\end{aligned}$$

が成り立つ．

(iii)　座標平面上の多角形D,Eがいくつかの辺を共有し，内部は交わらないと仮定する．多角形D,Eを合わせてできる多角形を$D+E$とすると，

$$T(D+E)=T(D)+T(E)$$

が成り立つことを示す．そこで，多角形D,Eに対して，その頂点の座標を反時計回りにそれぞれ(a_l,b_l) $(l=1,2,\dots,p)$，(c_l,d_l) $(l=1,2,\dots,q)$とおく．更に,

$$s_l=(a_l-a_{l+1})(b_l+b_{l+1})\quad(l=1,2,\dots,p),$$
$$t_l=(c_l-c_{l+1})(d_l+d_{l+1})\quad(l=1,2,\dots,q)$$

とする．ただし，$a_{n+1}=a_1$, $b_{n+1}=b_1$, $c_{n+1}=c_1$, $d_{n+1}=d_1$である．このとき，

$$T(D)=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{p}s_l,\quad T(E)=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{q}t_l$$

である．もし，Dの頂点(a_l,b_l)と(a_{l+1},b_{l+1})を結ぶ辺がEの辺でもあるならば，この辺はEの二つのある頂点(c_m,d_m)と(c_{m+1},d_{m+1})を結ぶ辺としても表せる．このとき，

$$(a_l,b_l)=(c_{m+1},d_{m+1}),$$
$$(a_{l+1},b_{l+1})=(c_m,d_m)$$

となるから(図 5)，$s_l=-t_m$である．

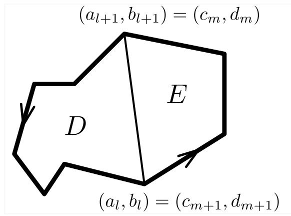


図 5 一辺を共有する多角形D,E

これがD,Eの共有する全ての辺に対して成り立つから,

$$T(D+E)=T(D)+T(E)$$

が成り立つ．

(iv)　一般の多角形に対し補題 2 の等式を証明する．多角形Dを内部では交わらない三角形$D_1,D_2,\dots,D_r$に分割すれば(図 6)，(ii)，(iii)より，

$$\begin{aligned}
T(D)&=T(D_1)+T(D_2)+\cdots+T(D_r)\\
&=S(D_1)+S(D_2)+\cdots+S(D_r)\\
&=S(D)
\end{aligned}$$

が成り立つ．

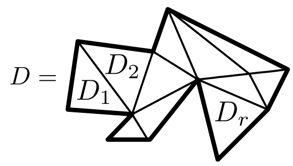


図 6 多角形Dの三角形$D_1,D_2,\dots,D_r$への分割

(証明終了)

<u>補題 3</u>

n角形$P_1P_2\cdots P_n$の頂点は$P_1,P_2,\cdots,P_n$の順に反時計回りに並んでいると仮定する．点P_nを原点Oとし，ベクトル$\mathbf{v}_1$とベクトル$(1,0)$の成す角がθ $(0\le\theta<2\pi)$であるとする．また，$B_0=0$とおく．このとき，各l $(l=1,2,\dots,n)$ に対し，点P_lの座標を(x_l,y_l)とおくと,

$$x_l=\sum_{j=1}^{l}a_j\cos\left(\theta+\sum_{k=0}^{j-1}B_k\right),$$
$$y_l=\sum_{j=1}^{l}a_j\sin\left(\theta+\sum_{k=0}^{j-1}B_k\right)$$

が成り立つ．

<u>証明</u>

補題 1 の(2)より，ベクトル$\mathbf{v}_l$とベクトル$(1,0)$の成す角は

$$\theta + \sum_{k=0}^{l-1} B_k$$

である．ここで，Oを原点とする．いま，$\mathbf{v}_l$の長さはa_lであり，

$$\overrightarrow{OP_l} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{v}_l$$

であることから主張を得る．　　　　　　　(証明終了)

<u>n角形に関する面積公式の証明</u>

　n角形に関する面積公式を示そう．補題 3 と同じ仮定が成り立つとしてよい．このとき，補題 2，補題 3 から，

$$S = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} (x_l - x_{l+1})\,(y_l + y_{l+1})$$

かつ任意のl $(l = 1,2,\ldots,n)$に対して，

$$x_l - x_{l+1} = -a_{l+1}\cos\left(\theta + \sum_{k=0}^{l} B_k\right),$$

$$y_l + y_{l+1} = 2\sum_{i=1}^{l} a_i \sin\left(\theta + \sum_{k=0}^{i-1} B_k\right) + a_{l+1}\sin\left(\theta + \sum_{k=0}^{l} B_k\right)$$

となる．ただし，$a_{\mathrm{n}+1} = a_1$である．したがって，

$$\begin{aligned}
&(x_l - x_{l+1})\,(y_l + y_{l+1}) \\
&= -2a_{l+1}\sum_{i=1}^{l} a_i \sin\left(\theta + \sum_{k=0}^{i-1} B_k\right)\cos\left(\theta + \sum_{k=0}^{l} B_k\right) \\
&\quad - a_{l+1}^2 \sin\left(\theta + \sum_{k=0}^{l} B_k\right)\cos\left(\theta + \sum_{k=0}^{l} B_k\right) \\
&= -a_{l+1}\sum_{i=1}^{l} a_i \left\{\sin\left(2\theta + \sum_{k=0}^{i-1} B_k + \sum_{k=0}^{l} B_k\right) + \sin\left(\sum_{k=0}^{i-1} B_k - \sum_{k=0}^{l} B_k\right)\right\} \\
&\quad - \frac{1}{2}a_{l+1}^2 \sin\left(2\theta + 2\sum_{k=0}^{l} B_k\right) \\
&= -a_{l+1}\sum_{i=1}^{l} a_i \left\{\sin\left(2\theta + \sum_{k=0}^{l} B_k + \sum_{k=0}^{i-1} B_k\right) + \sin\left(-\sum_{k=i}^{l} B_k\right)\right\} \\
&\quad - \frac{1}{2}a_{l+1}^2 \sin\left(2\theta + 2\sum_{k=0}^{l} B_k\right) \\
&= a_{l+1}\sum_{i=1}^{l} a_i \left\{-\sin\left(2\theta + \sum_{k=0}^{l} B_k + \sum_{k=0}^{i-1} B_k\right) + \sin\left(\sum_{k=i}^{l} B_k\right)\right\} \\
&\quad - \frac{1}{2}a_{l+1}^2 \sin\left(2\theta + 2\sum_{k=0}^{l} B_k\right)
\end{aligned}$$

となる．よって，

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} a_{l+1}\sum_{i=1}^{l} a_i \left\{-\sin\left(2\theta + \sum_{k=0}^{l} B_k + \sum_{k=0}^{i-1} B_k\right) + \sin\left(\sum_{k=i}^{l} B_k\right)\right\} \\
&\quad - \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} \frac{1}{2}a_{l+1}^2 \sin\left(2\theta + 2\sum_{k=0}^{l} B_k\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{l} a_i\, a_{l+1}\left\{-\sin\left(2\theta + \sum_{k=0}^{l} B_k + \sum_{k=0}^{i-1} B_k\right) + \sin\left(\sum_{k=i}^{l} B_k\right)\right\} \\
&\quad - \frac{1}{4}\sum_{l=1}^{n} a_{l+1}^2 \sin\left(2\theta + 2\sum_{k=0}^{l} B_k\right)
\end{aligned}$$

である．この等式の両辺をθについて0 から 2πまで積分する．任意の実数αに対して，

$$\int_0^{2\pi} \sin(2\theta + \alpha)\,d\theta = 0$$

が成り立つことに注意すると，

$$\begin{aligned}
2\pi S &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{l} a_i\, a_{l+1}\sin\left(\sum_{k=i}^{l} B_k\right) d\theta \\
&= 2\pi\cdot\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{l} a_i\, a_{l+1}\sin\left(\sum_{k=i}^{l} B_k\right)
\end{aligned}$$

となるから，　$j = l + 1$とおくと，

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{l} a_i\, a_{l+1}\sin\left(\sum_{k=i}^{l} B_k\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n+1}\sum_{i=1}^{j-1} a_i\, a_j \sin\left(\sum_{k=i}^{j-1} B_k\right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n+1}\sum_{i=1}^{j-1} a_i\, a_j \sin\left(\sum_{k=i}^{j-1}(\pi - A_k)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n+1}\sum_{i=1}^{j-1} a_i\, a_j \sin\left(\pi(j-i) - \sum_{k=i}^{j-1} A_k\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n+1}\sum_{i=1}^{j-1}(-1)^{j-i+1} a_i\, a_j \sin\left(\sum_{k=i}^{j-1} A_k\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n-1}\sum_{i=1}^{j-1}(-1)^{j-i+1} a_i\, a_j \sin\left(\sum_{k=i}^{j-1} A_k\right)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{n-i+1} a_i\, a_n \sin\left(\sum_{k=i}^{n-1} A_k\right)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i} a_i\, a_{n+1} \sin\left(\sum_{k=i}^{n} A_k\right)$$

となる．この和の第二項は正弦定理を用いて，

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{n-i+1} a_i\, a_n \sin\left(\sum_{k=i}^{n-1} A_k\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{n-i+1} a_i a_n\ \sin\left(\pi(n-2) - A_n - \sum_{k=1}^{i-1} A_k\right)$$

$$=\frac{1}{2} a_n \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i} a_i\ \sin\left(A_n + \sum_{k=1}^{i-1} A_k\right)$$

$$= 0$$

となる．第三項は，

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i} a_i\, a_{n+1} \sin\left(\sum_{k=i}^{n} A_k\right)$$

$$=\frac{1}{2}(-1)^{n-1} a_1 a_{n+1} \sin\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n}(-1)^{n-i} a_i a_{n+1}\ \sin\left(\pi(n-2) - \sum_{k=1}^{i-1} A_k\right)$$

$$=\frac{1}{2}(-1)^{n-1} a_1 a_{n+1} \sin\bigl(\pi(n-2)\bigr)$$

$$-\frac{1}{2} a_{n+1} \sum_{i=2}^{n}(-1)^{i} a_i\ \sin\left(\sum_{k=1}^{i-1} A_k\right)$$

$$= 0$$

となる．したがって，

$$S = \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n-1}\sum_{i=1}^{j-1}(-1)^{j-i+1} a_i\, a_j \sin\left(\sum_{k=i}^{j-1} A_k\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{1\le i<j<n}(-1)^{j-i+1} a_i\, a_j \sin\left(\sum_{k=i}^{j-1} A_k\right)$$

が成り立つ．　(証明終了)

６　本教材の特徴と教育的価値

開発した教材の特徴と教育的価値として，次の 3 点を挙げることができる．

(1)　定理・公式を *n* 角形まで一般化できること

本稿では，n 角形の場合を統合的に考察して，一般化した定理 8～12 を得ることができた．これらの定理において，n＝3，4，5 の場合を代入すると，次の通り，三角形，四角形，五角形の正弦定理，第二余弦定理，面積公式となる．

＜正弦定理＞

$$a_2 \sin A_1 - a_3 \sin(A_1 + A_2) = 0$$

$$a_2 \sin A_1 - a_3 \sin(A_1 + A_2) + a_4 \sin(A_1 + A_2 + A_3) = 0$$

$$a_2 \sin A_1 - a_3 \sin(A_1 + A_2) + a_4 \sin(A_1 + A_2 + A_3) \\ -a_5 \sin(A_1 + A_2 + A_3 + A_4) = 0$$

＜第二余弦定理＞

$$a_1{}^2 = a_2{}^2 + a_3{}^2 \\ -2a_2a_3 \cos A_2$$

$$a_1{}^2 = a_2{}^2 + a_3{}^2 + a_4{}^2 \\ -2a_2a_3 \cos A_2 - 2a_3a_4 \cos A_3 \\ +2a_2a_4 \cos(A_2 + A_3)$$

$$a_1{}^2 = a_2{}^2 + a_3{}^2 + a_4{}^2 + a_5{}^2 \\ -2a_2a_3 \cos A_2 - 2a_3a_4 \cos A_3 - 2a_4a_5 \cos A_4 \\ +2a_2a_4 \cos(A_2 + A_3) + 2a_3a_5 \cos(A_3 + A_5) \\ -2a_2a_5 \cos(A_2 + A_3 + A_5)$$

＜面積公式＞

$$S = \frac{1}{2} a_1 a_2 \sin A_1$$

$$S = \frac{1}{2} a_1 a_2 \sin A_1 + \frac{1}{2} a_2 a_3 \sin A_2 \\ -\frac{1}{2} a_1 a_3 \sin(A_1 + A_2)$$

$$S = \frac{1}{2} a_1 a_2 \sin A_1 + \frac{1}{2} a_2 a_3 \sin A_2 + \frac{1}{2} a_3 a_4 \sin A_3 \\ -\frac{1}{2} a_1 a_3 \sin(A_1 + A_2) - \frac{1}{2} a_2 a_4 \sin(A_2 + A_3) \\ +\frac{1}{2} a_1 a_4 \sin(A_1 + A_2 + A_3)$$

上記の三角形，四角形，五角形の場合の定理を観察することで，n 角形の場合の定理を容易に推測することが可能である．

さらには，この教材は凸多角形に限定せず，凹多角形の場合にも証明することができ，教材の深みを増す

ことができた．凹多角形の証明自身は，複雑な式変形があり，高校生にとって決して易しくはないが，基本的には高校で学習する内容で理解することができ，ある一定以上の学力があれば，扱うことは可能である．

以上の点から，本教材は，統合的・発展的に考察するのに適しているといえるであろう．

(2)　定理を多面的に捉えること

(1) で示した三角形，四角形，五角形の場合の定理について，特に正弦定理を観察すると，一見して，教科書に記載されている正弦定理や，先行研究の定理1，定理 3 とは異なる形をしている．しかし，

三角形の場合　$A_1+A_2=\pi-A_3$

四角形の場合　$A_1+A_2+A_3=2\pi-A_4$

五角形の場合　$A_1+A_2+A_3+A_4=3\pi-A_5$

$A_1+A_2+A_3=3\pi-(A_4+A_5)$

と置き換えることで，教科書や先行研究と同じ形の定理が得られることがわかる．逆に見れば，教科書や先行研究の定理の形を一般化したものが，本稿で得られた定理の形であると捉えることができる．このような見方は，定理の形を多面的に捉える上で大切な見方であり，本教材は，定理を多面的に捉えるのに適しているということができる．

(3)　様々な証明方法があること

n 角形の場合の証明について，本教材のうち，特に正弦定理・第一余弦定理・面積公式の証明は，いずれも数学的帰納法により証明している．一方，第二余弦定理の証明は，本稿では正弦定理と第一余弦定理をもとに行っているが，凸 *n* 角形に限定すれば，これも数学的帰納法により直接に証明できる．さらには，面積公式の証明では，座標を導入し，数学Ⅱ「図形と方程式」で扱う「点と直線の距離」の公式を用いているが，これも凸 *n* 角形に限定すれば，この公式を使わない数学的帰納法による証明が可能である．以上のように数学的帰納法により証明できるということは，すなわち，三角形の場合をもとに四角形の場合を，四角形の場合をもとに五角形の場合を，同じように証明していくことができるということであり，四角形，五角形，…と発展的に考察を進めていく上で，高校生にとっても取り組みやすい教材であるといえる．

また，正弦定理・第一余弦定理・第二余弦定理については，ベクトルによる別証明を与えたが，この方法は数学的帰納法を使わないより簡単な方法であり，ベクトルが既習であれば，この証明方法を扱う価値はあると考える．

本教材は，課題学習や理数探究の探究テーマ等で扱うことが想定されるが，生徒の実態やそれまでの学習経験に応じて，考察対象を四角形，五角形まで扱うか，凸 *n* 角形まで扱うか，凹 *n* 角形まで扱うか，また，それぞれの場面でどのような証明方法を扱うかを決めればよいであろう．このように多様な活用方法が考えられるという点で，本教材の教育的価値があると考える．

7　今後の課題

今後の課題として，以下の 2 点を挙げる．

(1)　本教材を用いた授業を，高校生を対象に実践し，その有効性を検証する．

(2)　「統合・発展／体系化」に関する他の教材を開発する．

引用・参考文献

本間勇人(2018).「AI に負けない自分で考える子どもを育てる 21 世紀型教育」秀和システム．

熊倉啓之(2018).高等学校数科における探究活動を促す論証教材の開発.静岡大学教育実践総合センター紀要,No.28,pp.89-96.

大橋清貴(2018).「AI に負けない自分で考える子どもを育てる 21 世紀型教育」秀和システム．

大谷昌範(2019).多角形の正弦定理，余弦定理および面積公式」.数研出版　数研通信,95 号, pp.26-29.

R. B. Kershner(1971). The Law of Sines and Law of Cosines for Polygons. *Mathematics Magazine*, Volume 44, pp.150-153.

四之宮佳彦・熊倉啓之(2019).チェバ・メネラウスの定理に関する教材開発－*n* 角形への拡張. 静岡大学教育実践総合センター紀要,No.29,pp.90-99.

Society 5.0 に向けた人材育成に係る大臣懇談会(2018).Society 5.0 に向けた人材育成～社会が変わる，学びが変わる～.

中央教育審議会(2016). 幼稚園、小学校、中学校、高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善及び必要な方策等について(答申).

山本慎他(2012).平成 23 年検定済「最新数学Ⅰ」数研出版，pp.121,124,126.