行列による幾何の記述と時空の創発

静岡大学　博士論文

行列による幾何の記述と時空の創発

2019 年 12 月

大学院　自然科学系教育部　情報科学専攻

松浦　夏穂

要旨

超弦理論の非摂動論的定式化としての行列模型を完成させるためには，行列によって幾何がどのように記述されるのかを明らかにすることが必要である．そのためには，一般の多様体と有限のサイズの行列との対応をつけなければならない．本論文では，その第一歩として，回転楕円面と行列の対応について研究する．先行研究では,「コヒーレント状態法」と「Berezin-Toeplitz 量子化」が球面に適用された．本論文では，この 2 つの手法を回転楕円面に適用する．コヒーレント状態法では，非可換回転楕円面を表す行列から，回転楕円面が得られることを示す．Berezin-Toeplitz 量子化では，回転楕円面の座標に対応する行列が非可換回転楕円面を表す行列に一致することを示す．このようにして，回転楕円面に対してコヒーレント状態法と Berezin-Toeplitz 量子化が逆の関係であることを見出す．

博士学位論文目次

松浦　夏穂

「行列による幾何の記述と時空の創発」

目 次

第1章　序論

1.1　研究の背景

自然界には，4 つの基本的相互作用が存在している．この中で，強い相互作用・電磁相互作用・弱い相互作用の 3 つは，場の量子論によって記述されている．しかし，重力相互作用については，まだ量子論が完成していない．超弦理論は，量子重力を含む 4 つの相互作用を統一的に記述できる理論の候補として盛んに研究されている．

現在，超弦理論は摂動論的に定式化されている．また，D ブレーンの効果として非摂動効果を考えることが可能である．しかし，このような方法を用いた場合，いくつかの問題が生じる．1 つは，理論的に許される安定な真空が無数に存在することである．それぞれの真空は，異なる時空次元やゲージ群，物質場，宇宙項定数などを持つ．したがって，無数の真空の中からひとつを選び出す原理が必要となる．もう 1 つは，超弦理論の摂動論は宇宙のはじまりの特異点で破綻することである．重力の古典論である一般相対性理論は，宇宙のはじまりにおいて，時空の特異点にぶつかり理論が破綻する．しかし，これは重力の量子的効果で克服されていると信じられている．超弦理論は量子重力を含むが，重力の効果が強くなる宇宙のはじまりの特異点では，超弦理論の摂動論も破綻してしまう．このような問題は，超弦理論の非摂動論的定式化を構築しそれを用いることにより解決されると考えられる．さらには，素粒子論や宇宙論の新たな予言が得られると期待されている．

超弦理論の非摂動論的定式化の有力な候補の 1 つとして，行列模型がある [1–3]．行列模型の特徴として，時間や空間はあらかじめ与えられるものではなく創発するものであることが挙げられる [1]．すなわち，理論における行列の自由度から時間や空間の自由度が得られるのである．例えば，2.1 節でレビューする「IIB 行列模型」[2] では，10 次元の $U(N)$ 超対称性 Yang-Mills 理論を 0 次元に次元還元した作用を考える．この作用には行列の自由度は存在するが，はじめから時空の自由度を定義している訳ではない．しかし，この作用がもつ対称性を考えることで，行列の固有値が座標と解釈されるのである．これは，行列の座標解釈に基づく時空の創発である．他にも，行列が微分演算子すなわち運動量や角運動量として解釈されたり，座標と微分演算子両方に解釈される例も存在する．このように，行列模型は時空の創発という特徴をもつ．この時空の創発は，時空の量子揺らぎを考える量子重力理論として自然である．また，超弦理論は重力を含むため，平坦な時空だけでなく曲がった時空が記述されなければならない．よって，行列模型において曲がった時空も創発される必要がある．したがって，超弦理論の非摂動論的定式化としての行列模型を完成させるには，行列によって幾何がどのように記述されるのかを明らかにする必要がある．

[1] [1] 及び [3] における行列模型においては空間が創発し，[2] における行列模型においては時間と空間が創発する．

1.2 研究の目的

現在，様々な行列模型が提唱されている．2.1 節でレビューする「IIB 行列模型」では，行列は有限のサイズの $N \times N$ エルミート行列で，その固有値は平坦な 10 次元時空上の座標と解釈される．一方，2.2 節でレビューする行列の微分演算子解釈に基づく曲がった時空の創発 [4] では，行列のサイズが無限大となる．行列正則化の観点から，有限な行列を用いることは重要である．また，超弦理論は重力を含むので曲がった時空の創発も重要である [4–7]．このような背景から，超弦理論の非摂動論的な定式化としての行列模型を完成させるために，本研究では有限のサイズの行列による幾何の記述と曲がった時空の創発を明らかにすることを目指す．そのために本論文では，有限のサイズの行列から幾何を得る手法である**コヒーレント状態法** [8–13] と，与えられた幾何に対して有限のサイズの行列を構成する手法である **Berezin-Toeplitz 量子化** [14–18] に着目する．

コヒーレント状態法は，非可換空間を定義する有限のサイズのエルミート行列が与えられたとき，その行列が表す多様体の幾何を取り出す方法である．このエルミート行列から Dirac タイプ演算子が定義され，その演算子のゼロモードを与える座標の集合として，この行列が表す多様体が得られる．Berezin-Toeplitz 量子化は，はじめに多様体とその幾何を与え，Dirac 演算子を構築する．その演算子のカーネルの基底となる波動関数を用いて多様体上の滑らかな関数から有限のサイズの行列への線形マップを構成する手法である．この様にして得られた行列は，Toeplit 演算子と呼ばれる．

先行研究では，2 次元球面に対してこの 2 つの手法が適用された．コヒーレント状態法については，非可換球面 [19] を定義するエルミート行列として $SU(2)$ 生成子のスピン J 既約表現が用いられ，その行列が表す多様体として 2 次元球面が得られることが示された [8]．また，Berezin-Toeplitz 量子化では 2 次元球面とその幾何を与え，3 次元空間への埋め込み座標に対する Toeplit 演算子が得られた．さらに，2 つの手法から得られる波動関数が一致し，行列サイズが無限大の極限でコヒーレント状態法で用いたエルミート行列と Berezin-Toeplitz 量子化における多様体の埋め込み座標に対する Toeplit 演算子が一致することが示された [17]．

本論文では，一般の多様体に対する行列による幾何の記述を確立するための第一歩として，球面より対称性が低い回転楕円面に対する行列による幾何の記述を研究する [20]．簡単のため，球面を 3 軸方向にのみ引き伸ばした回転楕円面を考える．上の 2 つの手法を適用し，球面からのずれを表すパラメーターに対する摂動論を展開する．コヒーレント状態法では，エルミート行列がどのような多様体を表すかを明らかにする．Berezin-Toeplitz 量子化では，Dirac 演算子のカーネルの基底となる波動関数と，埋め込み座標に対する Toeplit 演算子を求める．そして，埋め込み座標に対する Toeplit 演算子はコヒーレント状態法で用いたエルミート行列と再び一致するか，2 つの手法から得られる波動関数が一致するかを調べる．

1.3 本論文の構成

以下に本論文の次章以降の構成を記す．

- 第 2 章では，行列模型における様々な時空の創発の例を解説する．2.1 節では IIB 行列模型についてレビューし，行列の座標解釈に基づく時空の創発について説明する．2.2 節では，微分演算子解釈に基づく曲がった時空の創発についてレビューする．2.3 節では，非可換幾何と行列の対応の例として，非可換平面と非可換球面を取り上げる．この章では，特に行列模型において行列が超弦理論や多様体上のどのような量に対応するかに注目する．

- 第 3 章では，本論文を読み進める上で必要となる数学をまとめる．3.1 節では，写像や位相空間を定義し，それらを用いて多様体を定義する．3.2 節では，多様体上のベクトルや 1-形式を導入し，多様体上での微積分について解説する．3.3 節では，計量テンソルが与えられた多様体における Riemann 幾何学について簡単にまとめる．3.4 節では，ファイバー束を定義し，ファイバー束の例であるベクトル束について解説する．また，後に重要な概念となる同伴束について説明する．3.5 節では，本論文の 4，5 章で必要なスピン捻じれ複体に対する Atiyah-Singer の指数定理を解説する．

- 第 4 章では，コヒーレント状態法と Berezin-Toeplitz 量子化について説明し，2 次元球面の場合についてレビューする．4.1 節では，コヒーレント状態法において，非可換球面を定義する行列から得られる多様体が 2 次元球面であることをみて，Dirac タイプ演算子のカーネルの基底となる波動関数を求める．4.2 節では，2 次元球面に対して Berezin-Toeplitz 量子化を行う．多様体の埋め込み座標に対する Toeplit 演算子を計算し，コヒーレント状態法で用いた行列に行列サイズが無限大の極限で一致することをみる．また，2 つの手法から得られる波動関数が一致することを確認する．

- 第 5 章では，コヒーレント状態法と Berezin-Toeplitz 量子化を回転楕円面に適用する．簡単のため，球面を 3 軸方向にのみ引き伸ばした回転楕円面を考え，球面からのずれを表すパラメーターに対する摂動論を展開する．5.1 節では，コヒーレント状態法において，非可換回転惰円面を与える行列から得られる多様体が回転楕円面であることを示し，波動関数を求める．5.2 節では，Berezin-Toeplitz 量子化における波動関数と，多様体の埋め込み座標に対する Toeplit 演算子を求める．そして，回転楕円面の場合についても，この Toeplit 演算子がコヒーレント状態法で用いた行列に行列サイズが無限大の極限で一致することを示す．さらに，2 つの手法から得られる波動関数が一致することも示す．

- 第 6 章では，結論を述べ，第 5 章で得た結果について議論する．また，行列による幾何の記述と時空の創発に対する後の展望を述べる．

- 付録 A では，球面についてのコヒーレント状態法における Dirac タイプ演算子の基底となる波動関数を記載する．また，付録 B では Toeplit 演算子の詳細な計算を示す．

第2章　行列模型における時空の創発

この章では，行列模型における様々な時空の創発の仕方を見る [21]．2.1 節では，超弦理論の非摂動論的定式化として提唱された IIB 行列模型における時空の創発をレビューする．ここでの時空の創発は，行列の座標解釈に基づいている．2.2 節では，行列による曲がった時空の創発をレビューする．ここでの時空の創発は，行列の微分演算子解釈に基づいている．2.3 節では，非可換幾何と行列の対応の具体例を取り上げる．ここでの行列は，座標とも微分演算子とも解釈される．

2.1　行列の座標解釈

行列の座標解釈における時空の創発を見るために，超弦理論の非摂動論的定式化として提唱された IIB 行列模型 [2] [2] について解説する．IIB 行列模型の作用は次の式で与えられる．

$$S_{IIB} = -\frac{1}{g^2}\mathrm{Tr}\Big(\frac{1}{4}[A_\mu, A_\nu][A^\mu, A^\nu] + \frac{1}{2}\bar{\psi}\Gamma^\mu[A_\mu, \psi]\Big)\ . \tag{2.1}$$

ここで，$\mu = 0, 1, \cdots, 9$ である．A_μ は 10 個の $N\times N$ のエルミート行列，Γ^μ は 10 次元のガンマ行列，ψ は 10 次元の Majorana-Weyl スピノルの添字をもつ $N\times N$ のエルミート行列，Tr は $N\times N$ 行列の添字についてトレースを取っている．この作用 (2.1) 式 は，10 次元の $\mathcal{N}=1$ 超対称 $U(N)$Yang-Mills 理論を 0 次元に次元還元した形をしている．したがって，時空はアプリオリには存在していないことに注意する．10 次元の $\mathcal{N}=1$ 超対称 $U(N)$Yang-Mills 理論の作用は，

$$S_{YM} = \frac{1}{g^2}\mathrm{Tr}\Big(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \mathrm{i}\frac{1}{2}\bar{\psi}\Gamma^\mu(\partial_\mu\psi - \mathrm{i}[A_\mu, \psi])\Big) \tag{2.2}$$

である．それぞれ次元還元

$$\begin{aligned} (A_\mu(x))_{ij} &\to (A_\mu)_{ij}, \\ (\psi_\alpha(x))_{ij} &\to (\psi_\alpha)_{ij}, \\ F_{\mu\nu}(x) &\to \mathrm{i}[A_\mu, A_\nu] \end{aligned} \tag{2.3}$$

を行うと，$\partial_\mu A_\nu = 0$，$\partial_\mu\psi = 0$ より，確かに (2.1) 式 に一致することが分かる．後の議論から分かるように，作用 (2.1) 式 において時空は創発する．

次に，IIB 行列模型の作用 (2.1) 式 がもつ対称性に注目する．まず，A_μ がベクトル，ψ が 10 次元の Majorana-Weyl スピノルとして変換すれば，この作用は 10 次元の Lorentz 対称性を持

[2]提唱者の頭文字（石橋，川合，北澤，土屋）をとって IKKT 模型とも呼ばれる．

つことが簡単に分かる．また，この作用は次のような変換のもとで不変である．

$$\begin{aligned}\delta^{(1)}A_\mu &= \mathrm{i}\bar{\epsilon}_1\Gamma_\mu\psi, \\ \delta^{(1)}\psi &= \frac{\mathrm{i}}{2}\Gamma^{\mu\nu}[A_\mu, A_\nu]\epsilon_1,\end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}\delta^{(2)}A_\mu &= 0, \\ \delta^{(2)}\psi &= \epsilon_2\mathbb{1}_N,\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}\delta_T A_\mu &= c_\mu\mathbb{1}_N, \\ \delta_T\psi &= 0,\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}\delta_G A_\mu &= \mathrm{i}[\lambda, A_\mu], \\ \delta_G\psi &= \mathrm{i}[\lambda, \psi].\end{aligned} \tag{2.7}$$

ここで，ϵ_1 と ϵ_2 は 10 次元の Majorana-Weyl スピノル，c_μ は変換パラメーターのベクトル，$\mathbb{1}_N$ と λ はそれぞれ $N\times N$ の単位行列とエルミート行列である．(2.7) 式は 10 次元の $U(N)$ ゲージ対称性を 0 次元に次元還元したものである．ここで，(2.4) 式，(2.5) 式，(2.6) 式の生成子をそれぞれ $Q^{(1)}$，$Q^{(2)}$，P_μ とし，これらを用いて $\tilde{Q}^{(1)}$，$\tilde{Q}^{(2)}$ を

$$\begin{aligned}\tilde{Q}^{(1)} &= Q^{(1)} + Q^{(2)}, \\ \tilde{Q}^{(2)} &= \mathrm{i}(Q^{(1)} - Q^{(2)})\end{aligned} \tag{2.8}$$

で定義する．ここで，$\bar{\epsilon_1}\tilde{Q}^{(i)}$ と $\bar{\epsilon_2}\tilde{Q}^{(j)}$ の交換子について考える．ゲージ対称性 (2.7) 式と解釈される項及びフェルミオンの運動方程式

$$\Gamma^\mu[A_\mu, \psi] = 0 \tag{2.9}$$

に比例する項を除けば，次の関係式が成り立つことが分かる．

$$[\bar{\epsilon}_1\tilde{Q}^{(i)}, \bar{\epsilon}_2\tilde{Q}^{(j)}] = -2\delta^{ij}\bar{\epsilon}_1\Gamma^\mu\epsilon_2 P_\mu. \tag{2.10}$$

これは，P_μ が運動量であるとすると，10 次元の $\mathcal{N}=2$ 超対称性の代数となっている．ここで，フェルミオンについての運動方程式を用いているので，オンシェルの超対称性であることに注意する．このとき，(2.6) 式は並進対称性に対応し，A_μ の固有値が座標と解釈される．したがって，IIB 行列模型がもつ対称性を考えることで，行列の座標解釈に基づく時空の創発を見ることができた．ここで注目すべき点は，$\mathcal{N}=2$ 超対称性は 10 次元の最大の超対称性で，理論がユニタリで質量ゼロの場を含めば，必ず重力子を含むこととなる．つまり，IIB 行列模型がこのような対称性を持つということは，この模型に重力が含まれることを示唆している．

ここからは，IIB 行列模型の作用 (2.1) 式と平坦な 10 次元時空の弦理論に対する Green-Scwarz 作用との対応を見る．まず，IIB 型弦理論における世界面上の共変的な南部・後藤型の Green-Schwartz 作用から出発する．

$$S_{NG} = -T\int \mathrm{d}^2\sigma\Big(\sqrt{-\frac{1}{2}\Sigma^{\mu\nu}\Sigma_{\mu\nu}} + \mathrm{i}\varepsilon^{ab}\partial_a X^\mu(\bar{\theta}^1\Gamma_\mu\partial_b\theta^1 + \bar{\theta}^2\Gamma_\mu\partial_b\theta^2) + \varepsilon^{ab}\bar{\theta}^1\Gamma^\mu\partial_a\theta^1\bar{\theta}^2\Gamma_\mu\partial_b\theta^2\Big). \tag{2.11}$$

ここで，$\varepsilon^{12}=-\varepsilon^{21}=1$，$T$ は弦の張力，$\sigma^a(a=1,2)$ は世界面の座標，θ^1 と θ^2 は 10 次元の Majorana-Weyl スピノル，X^μ は 10 次元時空の座標である．また，$\Sigma^{\mu\nu}$ は

$$\Sigma^{\mu\nu}=\varepsilon^{ab}\Pi_a{}^\mu\Pi_b{}^\nu, \tag{2.12}$$
$$\Pi_a{}^\mu=\partial_aX^\mu-\mathrm{i}\bar{\theta}^1\Gamma^\mu\partial_a\theta^1+\mathrm{i}\bar{\theta}^2\Gamma^\mu\partial_a\theta^2 \tag{2.13}$$

で定義している．この作用では，$(X^\mu,\theta^1,\theta^2)$ で記述される超空間に埋め込まれた弦を表している．この Green-Schwartz 作用 (2.11) 式において，θ^1 と θ^2 を落とし，$\mu=0,1,\cdots,25$ とすれば以下のようにボゾニック弦に対する南部・後藤弦の作用が得られる．

$$\begin{aligned}S_{NG(boson)}&=-T\int\mathrm{d}^2\sigma\sqrt{-\frac{1}{2}\varepsilon^{ab}\varepsilon^{cd}\partial_aX^\mu\partial_bX^\nu\partial_cX_\mu\partial_dX_\nu}\\&=-T\int\mathrm{d}^2\sigma\sqrt{-(\dot{X}^\mu)^2(X'^\nu)^2+(\dot{X}^\mu X'_\mu)^2}.\end{aligned} \tag{2.14}$$

また，(2.11) 式は通常の Green-Schwartz 作用の経路積分において $\theta^2\to\mathrm{i}\theta^2$ の解析接続がなされているため θ_2 を含む項の符号が逆になっていることに注意する．

IIB 型弦理論における南部・後藤型の Green-Schwartz 作用 (2.11) 式の持つ対称性に注目する．この作用は，10 次元の $\mathcal{N}=2$ 超対称性

$$\begin{aligned}\delta_{SUSY}\theta^1&=\epsilon^1,\\\delta_{SUSY}\theta^2&=\epsilon^2,\\\delta_{SUSY}X^\mu&=\mathrm{i}\bar{\epsilon}^1\Gamma^\mu\theta^1-\mathrm{i}\bar{\epsilon}^2\Gamma^\mu\theta^2\end{aligned} \tag{2.15}$$

と，κ 対称性

$$\begin{aligned}\delta_\kappa\theta^1&=\alpha^1,\\\delta_\kappa\theta^2&=\alpha^2,\\\delta_\kappa X^\mu&=\mathrm{i}\bar{\theta}^1\Gamma^\mu\alpha^1-\mathrm{i}\bar{\theta}^2\Gamma^\mu\alpha^2\end{aligned} \tag{2.16}$$

を持つ．ここで，

$$\begin{aligned}\alpha^1&=(1+\tilde{\Gamma}\kappa^1),\\\alpha^2&=(1-\tilde{\Gamma}\kappa^2),\\\tilde{\Gamma}&=\frac{1}{2\sqrt{-\frac{1}{2}\Sigma^{\lambda\rho}\Sigma_{\lambda\rho}}}\Sigma_{\mu\nu}\Gamma^{\mu\nu}\end{aligned} \tag{2.17}$$

で，$\Gamma^{\mu\nu}=\frac{1}{2}[\Gamma^\mu,\Gamma^\nu]$，$\kappa^1$ と κ^2 はグラスマン奇の Majorana-Weyl フェルミオンのパラメーターである．κ 対称性はこの理論に特有の対称性である．θ^1 と θ^2 の自由度の半分は κ 対称性により消すことができる．ここでは，κ 対称性をゲージ固定するために

$$\theta^1=\theta^2=\psi \tag{2.18}$$

ととる．いま，θ^1 と θ^2 は同じカイラリティをもつため，10 次元の Lorentz 対称性は保たれていることに注意する．このゲージ固定から，(2.11) 式は

$$\begin{aligned}\tilde{S}_{NG}&=-T\int\mathrm{d}^2\sigma\Big(\sqrt{-\frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}}+2\mathrm{i}\varepsilon^{ab}\partial_aX^\mu\bar{\Psi}\Gamma_\mu\partial_b\Psi\Big),\\\sigma^{\mu\nu}&=\varepsilon^{ab}\partial_aX^\mu\partial_bX^\nu\end{aligned} \tag{2.19}$$

となる．(2.11) 式の第 3 項目は，ε^{ab} の反対称性からゼロになっていることに注意する．κ 対称性のゲージ固定後の Green-Schwartz 作用 (2.19) 式は，超対称性と κ 対称性を組み合わせることで，$\mathcal{N}=2$ 超対称性を保つようにできることに注意する．

さて，ここからは (2.19) 式は Schild 型の作用に書き換えることができることを示す．Schild 型の作用は，次式である．

$$S_{Schild}=\int \mathrm{d}^2\sigma \left[\sqrt{g}\alpha\left(\frac{1}{4}\{X^\mu,X^\nu\}^2-\frac{\mathrm{i}}{2}\bar{\Psi}\Gamma^\mu\{X_\mu,\Psi\}\right)+\beta\sqrt{g}\right]. \tag{2.20}$$

ここで，α 及び β は定数である．(2.19) 式を Schild 型に書き換えるために，Poisson 括弧を導入する．

$$\{X,Y\}=\frac{1}{\sqrt{g}}\varepsilon^{ab}\partial_a X\partial_b X. \tag{2.21}$$

ここで，$\sqrt{g}$ は弦の世界面上の正定値のスカラー密度であり，$\sqrt{g}\equiv\sqrt{\det(g_{ab})}$ としている．(2.20) 式いおいて，$\sqrt{g}$ についての運動方程式から，条件

$$\sqrt{g}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\sqrt{(\varepsilon^{ab}\partial_a X^\mu\partial_b X^\nu)^2} \tag{2.22}$$

を得る．この式を (2.20) 式に用いると，

$$\int \mathrm{d}^2\sigma\Big(\sqrt{\alpha\beta}\sqrt{(\varepsilon^{ab}\partial_a X^\mu\partial_b X^\nu)^2}-\frac{\mathrm{i}}{2}\alpha\varepsilon^{ab}\partial_a X_\mu\bar{\Psi}\Gamma^\mu\partial_b\Psi\Big) \tag{2.23}$$

のように書き換えることができる．この作用は，ψ の規格化を除いて $\tilde{S}_{NG}$ に一致している．(2.20) 式を古典作用とする経路積分は，形式的に

$$\mathcal{Z}=\int\mathcal{D}\sqrt{g}\mathcal{D}X\mathcal{D}\Psi e^{-S_{Schild}} \tag{2.24}$$

で定義できる．

次に，作用 (2.20) 式の対称性に注目する．もともと κ 対称性のゲージ固定後の Green-Schwartz 作用 (2.19) 式は，$\mathcal{N}=2$ 超対称性を保っていた．この対称性は (2.20) 式において，

$$\begin{aligned}\delta^{(1)}X^\mu&=\mathrm{i}\bar{\epsilon}\Gamma^\mu\Psi,\\ \delta^{(1)}\Psi&=-\frac{1}{2}\{X_\mu,X_\nu\}\Gamma^{\mu\nu}\epsilon,\end{aligned} \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned}\delta^{(2)}X^\mu&=0,\\ \delta^{(2)}\Psi&=\xi\end{aligned} \tag{2.26}$$

として実現される．ここで，ϵ と ξ は，

$$\begin{aligned}\epsilon&=\frac{\epsilon_1-\epsilon_2}{2},\\ \xi&=\frac{\epsilon_1+\epsilon_2}{2}\end{aligned} \tag{2.27}$$

と定義している．また，(2.20) 式は世界面上の一般座標変換対称性をもつ．

$$\delta_d X^\mu = \theta^a \partial_a X^\mu, \tag{2.28}$$

$$\delta_d \Psi = \theta^a \partial_a \Psi, \tag{2.29}$$

$$\delta_d \sqrt{g} = \partial_a(\theta^a \sqrt{g}). \tag{2.30}$$

ここでは，(2.24) 式における経路積分の測度もこの対称性を持つと仮定する．ここで，$\sqrt{g}$ を固定し，一般座標変換対称性を部分的にゲージ固定する．すなわち (2.30) 式より，一般座標変換のパラメーター θ^a に制限

$$\partial_a(\theta^a \sqrt{g}) = 0 \tag{2.31}$$

が付く．$\sqrt{g}$ を固定した一般座標変換は，area preserving diffeomorphism と呼ばれる．このとき，経路積分 (2.24) 式における $\mathcal{D}\sqrt{g}$ についての汎関数積分は，

$$B = \int \mathrm{d}^2\sigma \sqrt{g} \tag{2.32}$$

としたとき，B についての積分が残る．すなわち，$\sqrt{g}$ を固定した後も B についての積分を行う必要がある．これは，B が一般座標変換のもとで不変であることに由来する．(2.31) 式は θ^a について以下のように解くことができる．

$$\theta^a = \frac{1}{\sqrt{g}} \varepsilon^{ab} \partial_b \rho(\sigma). \tag{2.33}$$

ここで，$\rho(\sigma)$ は世界面上の座標 σ^a の任意関数である．これを用いると，(2.29) 式と (2.28) 式は

$$\delta_{apd} X^\mu = \{X^\mu, \rho\}, \tag{2.34}$$

$$\delta_{apd} \Psi = \{\Psi, \rho\} \tag{2.35}$$

のように表され，Poisson 括弧で与えられることが分かる．Poisson 括弧が満たす代数を w_∞ 代数という．

このとき，経路積分 (2.24) 式を正則化しよく定義されたものにすることを考える．まず，w_∞ 代数を $SU(n)$ 代数によって正則化する．世界面上の場 X^μ，Ψ，ρ はそれぞれ $n \times n$ エルミート行列になり，Poisson 括弧は $n \times n$ 行列の交換子に，世界面上の面積分は $n \times n$ 行列のトレースに代わる．対応をまとめると，

$$\begin{aligned} X^\mu &\to A^\mu, \\ \Psi &\to \psi, \\ \rho(\sigma) &\to \rho_{n\times n}, \\ \{\ ,\ \} &\to -\mathrm{i}\,[\ ,\ ], \\ \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}^2\sqrt{g} &\to \mathrm{Tr} \end{aligned} \tag{2.36}$$

である．このとき，Schild 型の作用 (2.20) 式は

$$S_{regular} = 2\pi\alpha \mathrm{Tr}\left(-\frac{1}{4}[A_\mu, A_\nu]^2 - \frac{1}{2}\bar{\psi}\Gamma^\mu[A_\mu, \psi]\right) + 2\pi\beta \mathrm{Tr} 1 \tag{2.37}$$

となる．ここで，世界面上の場 X^μ に対応する $n\times n$ エルミート行列を A_μ と書いており，ψ も $n\times n$ エルミート行列であることに注意する．また，経路積分 (2.24) 式は

$$\mathcal{Z}=\int\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{d}A\mathrm{d}\psi e^{-S_{regular}} \tag{2.38}$$

となる．ここで，$\sqrt{g}$ を固定したときに残った B についての積分は n についての和に代わっている．$\mathrm{d}A$ と $\mathrm{d}\psi$ は，

$$\begin{aligned}\mathrm{d}A&=\prod_\mu\left(\prod_i \mathrm{d}(A_\mu)_{ii}\right)\left(\prod_{i>j}\mathrm{dRe}(A_\mu)_{ij}\mathrm{dIm}(A_\mu)_{ij}\right),\\ \mathrm{d}\Psi&=\prod_\lambda\left(\prod_i \mathrm{d}(\Psi_\alpha)_{ii}\right)\left(\prod_{i>j}\mathrm{dRe}(\psi_\alpha)_{ij}\mathrm{dIm}(\psi_\alpha)_{ij}\right)\end{aligned} \tag{2.39}$$

と定義される．

ここで，正則化後の作用 (2.37) 式がどのような対称性をもつかを考える．$\sqrt{g}$ を固定後の Schild 型の作用がもつ area preserving diffeomorphism のもとでの対称性 (2.34) 式，(2.35) 式は，(2.36) 式の対応のもとで，

$$\delta A_\mu=\mathrm{i}[\rho,A_\mu], \tag{2.40}$$

$$\delta\psi=\mathrm{i}[\rho,\psi] \tag{2.41}$$

のようになることが期待される．このとき，ρ は任意の $n\times n$ エルミート行列であることに注意する．これは，n を N とすれば IIB 行列模型における $U(N)$ ゲージ対称性 (2.7) 式に一致する．また，Schild 型の作用がもつ $\mathcal{N}=2$ 超対称性 (2.25) 式と (2.26) 式も (2.36) 式の対応のもとでそれぞれ，

$$\begin{aligned}\delta^{(1)}A_\mu&=\mathrm{i}\bar{\epsilon}\Gamma_\mu\psi,\\ \delta^{(1)}\psi&=\frac{\mathrm{i}}{2}[A_\mu,A_\nu]\Gamma^{\mu\nu}\epsilon,\end{aligned} \tag{2.42}$$

$$\begin{aligned}\delta^{(2)}A_\mu&=0,\\ \delta^{(2)}\psi&=\xi,\end{aligned} \tag{2.43}$$

のようになることが期待される．これらの式も n を N とすれば IIB 行列模型における対称性 (2.4) 式と (2.5) 式に対応する．実際，正則化後の作用 (2.37) 式はこれらの対称性をもつ．さらに，10 次元の Lorentz 対称性と IIB 行列模型における (2.6) 式に対応する対称性をもつ．このように，Schild 型作用を正則化して得られる行列模型 (2.37) 式が持つ対称性は，IIB 行列模型 (2.1) 式が持つ対称性に一致することが分かる．すなわち，IIB 行列模型がもつ超対称性 (2.10) 式は，超弦理論の超対称性 (2.15) 式を起源にもつことが分かった．超弦理論の標的空間への埋め込み座標 X^μ が行列に対応する．これは，行列の座標解釈に基づく時空の創発の描像と合致している．

以上の議論から，Schild 型作用の経路積分は行列模型によって正則化されることが分かった．もともと Schild 型作用は 1 本の弦の作用であり，その量子化は弦の第 1 量子化に対応する．一方，行列がブロック対角のとき，行列模型の作用はブロック対角な行列の各ブロックからの寄

与の和でかかれる．各々のブロックを Schild 型作用に対応させると弦の多体系を表せることが分かる．つまり，各々のブロックは世界面のトポロジーがさまざまである弦を表し，非対角ブロックは弦の間の相互作用を表していると自然に解釈される．したがって，行列模型による正則化は弦の第 2 量子化を与えることが分かる．各ブロックのトレースは，弦の重心座標であると解釈されることと，弦の多体系を表していることから，時空全体が創発していることが分かる．さらに，弦が重力子を含んでいることから，創発した時空は量子ゆらぎを含んだ量子論的な時空であるといえる．

最後に，Schild 型作用の行列模型 (2.37) 式と IIB 行列模型 (2.1) 式の関係をみてみる．まず，先ほどの議論からそれぞれの模型がもつ対称性は一致していることが分かる．さらに，作用 (2.37) 式において Tr1 に比例する項があり，経路積分 (2.38) 式において行列サイズ n についての和がある．これらは，IIB 行列模型にはないものである．積分速度 (2.39) 式は同じである．IIB 行列模型において，行列サイズを N として，A_μ と ψ 全体の $N \times N$ 行列の中で $n \times n$ 対角ブロックを考える．この対角部分以外を積分すれば，$n \times n$ 行列についての有効作用として，元の作用の形に加えてリーディングな補正に βTr1 の項が得られる．この β は化学ポテンシャルと解釈される．すなわち，Schild 型作用の行列模型 (2.37) 式で定義される行列模型は IIB 行列模型の有効理論と考えられる．

2.2 行列の微分演算子解釈

行列模型は超弦理論の非摂動論的定式化の有力な候補の 1 つである．超弦理論は重力を含むので，行列模型において曲がった時空も創発されなければならない．このような例として，d 次元リーマン多様体上の共変微分を行列として解釈できることを示す [4]．以下の議論では，多様体とファイバー束を用いるが，それらについての基本事項は 3 章を参照されたい．

行列によって曲がった時空が記述できないか考える．$\mathcal{M}$ を d 次元 Riemann 多様体（$d \leq 10$）とし，多脚場 ${e^a}_\mu$ が与えられているとする．IIB 行列模型 (2.1) 式のボゾン部分に注目する．$A_\mu(\mu = 1, \cdots, 10)$ の足を局所 Lorentz の足とみなし，$A_a(a = 1, \cdots, 10)$ と書いてみる．これを最も素朴に $\mathcal{M}$ 上の関数空間に作用する線形演算子とみなし，A_a を共変微分

$$A_a = \nabla_a = {e_a}^\mu \nabla_\mu \tag{2.44}$$

と同定してみる．しかし，この行列を共変微分と解釈するには 2 つの問題点がある．まずは，A_a は多様体上で一般には大域的に定義されないということである．すなわち，微分演算子 ∇_a は重なりを持つ局所パッチ（開被覆）を移る際に局所 Lorentz 変換を受けるので，単純に 10 個の演算子で定義することができない．もう 1 つは，共変微分の積は

$$\nabla_a \nabla_b = {e_a}^\mu (\partial_\mu \nabla_b + {\Omega^c}_{b\mu} \nabla_c) \tag{2.45}$$

で表せる．右辺の第 2 項目に注目すると，添字 c について和がとられていることから，行列 A_a，A_b の積にそれ以外の行列の成分が寄与することになる．すなわち，A_a と A_b の単純な積とみなすことができない．

これらの問題を解決するために次のようなファイバー束を考える．まず，多様体 $\mathcal{M}$ 上の接ベクトル束を考え，この接ベクトル束に同伴する正規直交枠束を考える．すなわち，接空間の正規直交基底全体のなす集合をファイバーとする $\mathcal{M}$ 上のファイバー束である．また，この正規直交枠束は $\mathcal{M}$ の接ベクトル束に同伴する $Spin(d)$ 主束ということもできる．

$\mathcal{M}$ の局所パッチを $\{U_i\}$ とする．以下の議論では，接ベクトル空間の足の添え字として $\mu,\nu,\lambda,\cdots$ を使い，局所 Lorentz の足の添え字として $a,b,c,\cdots$ を使う．また，$x^{\mu}_{[i]}(\mu=1,\cdots,d)$ を U_i における局所座標，$e^a{}_\mu(x_{[i]})$ を U_i 上の多脚場とする．これから，$\mathcal{M}$ の計量が得られる．$U_i\cap U_j\neq\emptyset$ のとき，多脚場は以下の変換関数により変換される．

$$e^a{}_\mu(x_{[j]})=R(t_{ji}(x_{[i]}))_{ab}\frac{\partial x^\nu_{[i]}}{\partial x^\mu_{[j]}}e^b{}_\nu(x_{[i]}). \tag{2.46}$$

ここで，$t_{ji}(x_{[i]})\in Spin(d)$ は $\mathcal{M}$ における変換関数で，R_{ab} は $Spin(d)$ のベクトル表現の表現行列である．R は直交行列であることに注意する．

$\mathcal{M}$ の接ベクトル束に同伴する正規直交枠束を $\boldsymbol{P}$ とする．$\boldsymbol{P}$ は局所的には局所パッチとファイバーの直積 $U_i\otimes Spin(d)$ であり，座標は $(x_{[i]},g_{[i]})$ で与えられる．ただし，$g_{[i]}\in Spin(d)$ である．これらは大域的には定義されないので，$U_i\cap U_j\neq\emptyset$ において，

$$(x_{[i]},g_{[i]})\sim(x_{[j]},t_{ij}g_{[j]}) \tag{2.47}$$

に従って変換される．

群多様体 $Spin(d)$ の座標系を $y^{\dot\mu}(\dot\mu=1,\cdots,\frac{d(d-1)}{2})$ で導入する．局所 Lorentz の添え字は $\dot a,\dot b,\dot c,\cdots$ を用いることにする．右不変な 1-形式 $e^{\dot a}{}_{\dot\mu}$ は，

$$\mathrm{d}g(y)g^{-1}(y)=-\mathrm{i}e^{\dot a}{}_{\dot\mu}t^{\dot a}\mathrm{d}y^{\dot\mu} \tag{2.48}$$

で定義される．ここで，$t^{\dot a}(\dot a=1,\cdots,\frac{d(d-1)}{2})$ は $Spin(d)$ の生成子で，交換関係

$$[t^{\dot a},t^{\dot b}]=\mathrm{i}f_{\dot a\dot b\dot c}t^{\dot c} \tag{2.49}$$

を満たす．$f_{\dot a\dot b\dot c}$ は $Spin(d)$ の構造定数である．また，$t^{\dot a}$ は正規直交関係

$$\mathrm{tr}(t^{\dot a}t^{\dot b})=\delta^{\dot a\dot b} \tag{2.50}$$

を満たす．

ここで，以下の議論で用いる添え字をまとめておく．まず，正規直交枠束 $\boldsymbol{P}$ の接空間全体添え字に M，N，Ξ，$\cdots$ を使い，局所 Lorentz 全体の添え字に A，B，C，$\cdots$ を使う．すなわち，底空間とファイバーそれぞれの添え字から $M=(\mu,\dot\mu)$，$A=(a,\dot a)$ である．また，$\boldsymbol{P}$ の座標は $z^M=(x^\mu,y^{\dot\mu})$ で表す．

$\boldsymbol{P}$ は，平行化可能である．すなわち，$\boldsymbol{P}$ の各点で互いに線形独立な $d+\frac{d(d-1)}{2}$ 個の双対ベクトル (1-形式) の成分を以下のように大域的に定義することができる．$d+\frac{d(d-1)}{2}$ は $\boldsymbol{P}$ の次元であることに注意する．

$$E^a{}_\mu=R(g^{-1})_{ab}e^b{}_\mu(x), \tag{2.51}$$

$$E^{\dot a}{}_\mu=-Ad(g^{-1})_{\dot a\dot b}b^{\dot b}{}_\mu, \tag{2.52}$$

$$E^a{}_{\dot\mu}=0, \tag{2.53}$$

$$E^{\dot a}{}_{\dot\mu}=Ad(g^{-1})_{\dot a\dot b}e^{\dot b}{}_{\dot\mu}(y). \tag{2.54}$$

$Spin(d)$ の随伴表現の表現行列 $Ad_{\dot a\dot b}(g)$ について言及しておく．$Ad_{\dot a\dot b}(g)$ は

$$gt^{\dot b}g^{-1}=Ad(g)_{\dot a\dot b}t^{\dot a} \tag{2.55}$$

で定義される．ここで，$t^{\dot{a}}$ は $Spin(d)$ の生成子である．この式の辺々に $t^{\dot{c}}$ を右からかけてトレースをとると，

$$\mathrm{tr}(gt^{\dot{b}}g^{-1}t^{\dot{c}}) = Ad(g)_{\dot{a}\dot{b}}\mathrm{tr}(t^{\dot{a}}t^{\dot{c}}) \tag{2.56}$$

となる．ここで，$t^{\dot{a}}$ は正規直交関係 (2.50) 式を満たしているので，$Ad(g)_{\dot{a}\dot{b}}$ は

$$Ad(g)_{\dot{a}\dot{b}} = \mathrm{tr}(gt^{\dot{b}}g^{-1}t^{\dot{a}}) \tag{2.57}$$

で表せることが分かる．また，$Ad(g)_{\dot{a}\dot{b}}$ は以下のように直交行列であることが分かる．

$$\begin{aligned} {}^{t}Ad(g)_{\dot{a}\dot{b}}Ad(g)_{\dot{b}\dot{c}} &= \mathrm{tr}(gt^{\dot{a}}g^{-1}t^{\dot{b}})\mathrm{tr}(gt^{\dot{c}}g^{-1}t^{\dot{b}}) \\ &= \mathrm{tr}(t^{\dot{a}}t^{\dot{c}}) \\ &= \delta^{\dot{a}\dot{c}}. \end{aligned} \tag{2.58}$$

次に ${b^{\dot{a}}}_{\mu}$ について言及する．${b^{\dot{a}}}_{\mu}$ は $\mathcal{M}$ 上のスピン接続 ${\Omega^{ab}}_{\mu}$ によって

$$\mathrm{i}{b^{\dot{a}}}_{\mu}(t^{\dot{a}})_{ab} = {\Omega^{ab}}_{\mu} \tag{2.59}$$

で定義される．ここで，$(t^{\dot{a}})_{ab}$ は $Spin(d)$ の生成子のベクトル表現の表現行列である．${\dot{b}^{\dot{a}}}_{\mu}(t^{\dot{a}})_{ab}$ は，以下のようにファイバー束上の局所接続の成分とみることもできる．

$$b_{[i]} = b_{[i]\mu}^{\dot{a}}t^{\dot{a}}\mathrm{d}x^{\mu}_{[i]}. \tag{2.60}$$

$b_{[i]}$ は，$U_i \cap U_j \neq \emptyset$ である局所パッチ間において以下の変換を受ける．

$$b_{[j]} = \mathrm{i}\mathrm{d}t_{ji}t_{ji}^{-1} + t_{ji}b_{[i]}t_{ji}^{-1}. \tag{2.61}$$

ここでは，双対ベクトル $E^A = E^A_M\mathrm{d}z^M$ が P 上で大域的に定義されていることを確認する．E^A は $A = a$，$\dot{a}$ であり，その成分は (2.51) 式から (2.54) 式で与えている．$U_i \cap U_j \neq \emptyset$ 上で定義されているベクトルは，U_i から U_j に移る際に変換を受ける．しかし，ベクトルが大域的に定義されていれば局所パッチによらない形で表すことができる．以下では，実際の計算から確かめる．

(i)$A = a$ のとき

$$\begin{aligned} E^a_{[i]} &= E_{[i]\mu}^{\;a}\mathrm{d}x^{\mu}_{[i]} + E_{[i]\dot{\mu}}^{\;a}\mathrm{d}y^{\dot{\mu}}_{[i]} \\ &= R({g_{[i]}}^{-1})_{ab}{e^b}_{\mu}(x_{[i]})\mathrm{d}x^{\mu}_{[i]} \\ &= R\left((t_{ij}(x_{[j]})g_{[j]})^{-1}\right)_{ab}R(t_{ij}(x_{[j]})_{bc})\frac{\partial x^{\nu}_{[j]}}{\partial x^{\mu}_{[i]}}{e^c}_{\nu}(x_{[j]})\mathrm{d}x^{\nu}_{[i]} \\ &= R({g_{[j]}}^{-1})_{ad}R(t_{ij}^{-1}(x_{[j]})_{db}R(t_{ij}(x_{[j]}))_{bc}{e^c}_{\nu}(x_{[j]})\mathrm{d}x^{\nu}_{[j]} \\ &= R({g_{[j]}}^{-1})_{ab}{e^b}_{\mu}(x_{[j]})\mathrm{d}x^{\mu}_{[j]} = E^a_{[j]}. \end{aligned} \tag{2.62}$$

したがって，確かに局所パッチによらないことが分かる．

(ii)$A = \dot{a}$ のとき

$$\begin{aligned} E^{\dot{a}}_{[i]} &= E_{[i]\mu}^{\;\dot{a}}\mathrm{d}x^{\mu}_{[i]} + E_{[i]\dot{\mu}}^{\;\dot{a}}\mathrm{d}y^{\dot{\mu}}_{[i]} \\ &= -Ad({g^{-1}}_{[i]})_{\dot{a}\dot{b}}{b^{\dot{b}}}_{\mu}\mathrm{d}x^{\mu}_{[i]} + Ad({g_{[i]}}^{-1})_{\dot{a}\dot{b}}{e^{\dot{b}}}_{\dot{\mu}}(y_{[i]})\mathrm{d}y^{\dot{\mu}}_{[i]}. \end{aligned} \tag{2.63}$$

この両辺に左から $t^{\dot{a}}$ をかけた量について考える．

$$\begin{aligned}
t^{\dot{a}}E^{\dot{a}}_{[i]} &= -Ad({g_{[i]}}^{-1})_{\dot{a}\dot{b}}t^{\dot{a}}b^{\dot{b}}_{[i]} + Ad({g^{-1}}_{[i]})_{\dot{a}\dot{b}}t^{\dot{a}}{e^{\dot{b}}}_{\dot{\mu}}(y_{[i]})\mathrm{d}y^{\dot{\mu}}_{[i]} \\
&= -{g_{[i]}}^{-1}t^{\dot{b}}g_{[i]}b^{\dot{b}}_{[i]} + {g_{[i]}}^{-1}t^{\dot{b}}g_{[i]}{e^{\dot{b}}}_{\dot{\mu}}(y_{[i]})\mathrm{d}y^{\dot{\mu}}_{[i]} \\
&= -{g_{[i]}}^{-1}b_{[i]}g_{[i]} + \mathrm{i}{g_{[i]}}^{-1}\mathrm{d}{g_{[i]}}^{-1}(y_{[i]}) \\
&= -(t_{ij}g_{[i]})^{-1}(\mathrm{id}t_{ij}t_{ij}^{-1} + t_{ij}b_{[j]}t_{ij}^{-1})(t_{ij}g_{[i]}) - \mathrm{id}(t_{ij}g_{[j]})^{-1}t_{ij}g_{[j]}.
\end{aligned} \tag{2.64}$$

ここで，第 2 項目における外微分は x と y 両方について考えなければならない．なぜなら，多様体上の変換関数 t_{ij} は多様体上の座標 x に依存しており，ファイバーの元 g はファイバー上の座標 y に依存しているからである．したがって，

$$\begin{aligned}
t^{\dot{a}}E^{\dot{a}}_{[i]} &= -(t_{ij}g_{[j]})^{-1}(\mathrm{id}t_{ij}g_{[j]}) - {g^{-1}}_{[j]}b_{[j]}g_{[j]} \\
&\qquad - \mathrm{d}{g^{-1}}_{[j]}g_{[j]} - \mathrm{i}{g^{-1}}_{[j]}\mathrm{d}t_{ij}^{-1}t_{ij}g_{[j]} \\
&= -{g^{-1}}_{[j]}b_{[j]}g_{[j]} + \mathrm{i}{g^{-1}}_{[j]}\mathrm{d}g_{[j]} \\
&= t^{\dot{a}}E^{\dot{a}}_{[j]}
\end{aligned} \tag{2.65}$$

となり，こちらの成分も局所パッチによらないことが分かる．

以上のように，P 上には双対ベクトル E^A は大域的に定義されている．P 上の平行移動を，共変ベクトル場 $v = v^AE^A$ が平行移動でその成分 v^A を不変に保つように定義する．${E^A}_M$ を多脚場として採用すれば，P 上のスピン接続及び曲率はゼロである．多脚場仮説より

$$\partial_M {E^A}_N - {\Gamma^\Xi}_{NM}{E^A}_\Xi = 0 \tag{2.66}$$

が満たされる．ここで，${\Gamma^\Xi}_{MN}$ は P 上のアフィン接続であり，局所 Lorentz の成分は

$${\Gamma^A}_{BC} = {E_A}^M{E_B}^N{E_C}^\Xi{\Gamma^M}_{N\Xi} = {E_B}^N\partial_M{E^A}_N{E_C}^M \tag{2.67}$$

のように与えられる．ここで，${E_A}^M$ は ${E^A}_M$ の逆行列である．このとき，アフィン接続の反対称成分である捩率 (トーション) は一般にはゼロでないことに注意する．P 上の捩率は，

$${T^\Xi}_{MN} = {\Gamma^\Xi}_{MN} - {\Gamma^\Xi}_{NM} \tag{2.68}$$

で定義される．ただし，$\mathcal{M}$ 上の捩率はゼロであることを仮定する．すなわち，

$$\partial_\mu {e^a}_\nu - \partial_\nu e^a\ \nu + {\Omega^{ab}}_\mu {e^b}_\nu - {\Omega^{ab}}_\nu {e^b}_\mu = 0 \tag{2.69}$$

が成り立つ．また，${E^A}_M$ の逆行列 ${E_A}^M$ は，

$${E_a}^\mu = R(g^{-1})_{ab}{e_b}^\mu(x), \tag{2.70}$$

$${E_{\dot{a}}}^\mu = 0, \tag{2.71}$$

$${E_a}^{\dot{\mu}} = R(g^{-1})_{ab}{e_b}^\mu(x){b^{\dot{a}}}_\mu(x){e_{\dot{a}}}^{\dot{\mu}}(y), \tag{2.72}$$

$${E_{\dot{a}}}^{\dot{\mu}} = Ad(g^{-1})_{\dot{a}\dot{b}}{e_{\dot{b}}}^{\dot{\mu}}(y) \tag{2.73}$$

のように定義できる．これらも大域的に定義されていることに注意する．

$E_A^{\ M}$ 用いた微分演算子 $\mathcal{L}_A = E_A^{\ M}\frac{\partial}{\partial Z^M}$ について考える．この微分演算子にはスピン接続 Ω_M が入らないので，前で述べた 2 つの問題を克服できる．したがって，微分演算子 $\mathcal{L}_A$ を行列と思うことができる．

この微分演算子は反変ベクトル場であり，P 上で大域的に定義されている．P 上の共変微分の底空間 $\mathcal{M}$ の成分 $\mathcal{L}_a(a=1,\cdots,d)$ は以下のような成分で与えられる．

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_a &= R(g^{-1})_{ab}e_b^{\ \mu}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + b^{\dot{a}}{}_\mu(x)e_{\dot{a}}^{\ \dot{\mu}}(y)\frac{\partial}{\partial y^{\dot{\mu}}}\right) \\ &= R(g^{-1})_{ab}e_b^{\ \mu}(x)\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \Omega^{ab}{}_\mu\mathcal{O}_{ab}\right).\end{aligned} \tag{2.74}$$

ここで，$\Omega^{ab} = \mathrm{i}(t^{\dot{a}})_{ab}e_{\dot{a}}^{\ \dot{\mu}}\frac{\partial}{\partial y^{\dot{\mu}}}$ は $Spin(d)$ における左移動の生成子である．このようにして，P を考えることで，$\mathcal{M}$ 上の共変微分 $\mathcal{L}_a$ が大域的に定義できるようになる [3]． $\mathcal{L}_a$ は行列と解釈されるが，この行列は多様体 $\mathcal{M}$ の幾何的な情報を持っている．これは，以下のようなことからもわかる．$\mathcal{L}_A$ は，

$$\begin{aligned}&[\mathcal{L}_a, \mathcal{L}_b] = -T^{\dot{c}}_{ab}\mathcal{L}_{\dot{c}}, \\ &[\mathcal{L}_a, \mathcal{L}_{\dot{b}}] = \mathrm{i}(t^{\dot{b}})_{ca}\mathcal{L}_c\end{aligned} \tag{2.75}$$

のような代数を満たす．ここで，$T^{\dot{c}}_{ab}$ は P 上の捩率の成分である．IIB 行列模型 (2.1) 式でフェルミオンをゼロに置いた運動方程式は

$$\big[\mathcal{L}_b, [\mathcal{L}_b, \mathcal{L}_a]\big] = 0 \tag{2.76}$$

となる．(2.75) 式を用いると，この運動方程式が

$$\nabla_e R_{efgh} = 0,\ R_{ab} = 0 \tag{2.77}$$

と等価であることが示される．第 1 式は，Bianchi 恒等式

$$\nabla_{[a}R^{bc}{}_{de]} = 0 \tag{2.78}$$

を使うと，第 2 式より導かれる．ここで，[ ] は完全反対称化することを表す．このように，行列模型の運動方程式から真空中の Einstein 方程式が導かれる [4]．したがって，行列と解釈される $\mathcal{L}_a$ は $\mathcal{M}$ の幾何的情報を持っている．このように，任意の d 次元 Riemann 多様体が行列で表される．これは，行列の微分演算子解釈に基づく時空の創発の例である．

2.3 非可換幾何と行列模型

本節では，非可換幾何と行列の対応の例を示す．ここでの議論における行列は，座標とも運動量 (角運動量) とも解釈することができる．まずは，簡単な非可換空間の例である 2 次元の非可換平面を取り上げる．次に，2 次元の非可換球面 (fuzzy sphere) を取り上げる．ここでの行列による非可換球面の表現は，4.1 節のコヒーレント状態法でも用いる．

[3] より正確には，(2.74) 式の右辺の $R(g^{-1})_{ab}$ を除いたものが，ファイバーが $Spin(d)$ の正則表現で，M 上の接ベクトル束の同伴束であるベクトル束における共変微分になっている．

2 次元の非可換平面上の座標を無限次元の行列を用いて $\hat{x}^1$，$\hat{x}^2$ とする．ここで，これらの座標には θ を実定数として

$$[\hat{x}^1, \hat{x}^2] = \mathrm{i}\theta \tag{2.79}$$

が成り立つ．$\theta \to 0$ は可換極限に相当する．これらの座標に共役な運動量を

$$\begin{aligned} \hat{p}^1 &= \theta^{-1}\hat{x}^2, \\ \hat{p}^2 &= -\theta^{-1}\hat{x}^1 \end{aligned} \tag{2.80}$$

で定義すると，交換関係

$$[\hat{p}^1, \hat{p}^2] = -\mathrm{i}\theta^{-1} \tag{2.81}$$

が成り立つ．このような定義から，座標と運動量は交換関係

$$[\hat{x}^i, \hat{p}^j] = \mathrm{i}\delta^{ij} \tag{2.82}$$

を満たす．ただし，i，$j = 1$，2 である．これは，$\hbar = 1$ の正準交換関係のように見える．これは，2 次元における 1 粒子の量子力学に対応しているように見えるが，座標と運動量が独立ではないためヒルベルト空間は 1 次元であることに注意する．

このヒルベルト空間に作用する演算子 $\hat{f}$ について考えてみる．この演算子は，座標 $\hat{x}^i$ を用いて

$$\hat{f} = \int \frac{\mathrm{d}^2k}{(2\pi)^2} f(k) e^{\mathrm{i}k\cdot\hat{x}} \tag{2.83}$$

のように展開される．ここで，$f(k) = f(k_1, k_2)$ 及び $k \cdot \hat{x} = k^1\hat{x}^1 + k^2\hat{x}^2$ である．この演算子 $\hat{f}$ は，可換な 2 次元平面上の関数 $f(x) = f(x_1, x_2)$ を対応させることができる．

$$\hat{f} = \int \frac{\mathrm{d}^2k}{(2\pi)^2} \int \mathrm{d}^2x f(x) e^{-\mathrm{i}k\cdot x} e^{\mathrm{i}k\cdot\hat{x}} \quad . \tag{2.84}$$

ここで，2 次元平面上の関数は

$$f(x) = \int \frac{\mathrm{d}^2k}{(2\pi)^2} f(k) e^{\mathrm{i}k\cdot x} \tag{2.85}$$

で定義している．次に，運動量 (2.80) 式と演算子 (2.83) 式の交換関係について考える．これは，以下のように計算される．

$$[\hat{p}^i, \hat{f}] = \int \frac{\mathrm{d}^2k}{(2\pi)^2} \mathrm{d}x(-\mathrm{i}\partial_{x_i} f(x)) e^{-\mathrm{i}k\cdot x} e^{\mathrm{i}k\cdot\hat{x}} \tag{2.86}$$

したがって，運動量と交換子をとることが，可換平面上の関数空間で $-\mathrm{i}\partial_{x^i}$ を作用させることに対応していることが分かる．すなわち，

$$[\hat{p}_i, \quad] \leftrightarrow -\mathrm{i}\partial_{x_i} \tag{2.87}$$

である．

次に，2 次元の非可換球面について考える．2 次元の非可換球面上の座標 X_i を $SU(2)$ のリー代数のスピン J 表現の生成子 L_i を用いて

$$X^i = RL^i \tag{2.88}$$

のように表す．ただし，L_i は $(2J+1)\times(2J+1)$ 行列であり，非可換平面を表す無限次元行列 $\hat{x}^i$ とは行列サイズが異なることに注意する．この定義により，非可換球面上の座標は以下の関係式

$$(X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2 = R^2 J(J+1)\mathbb{1}_{2J+1} \tag{2.89}$$

を満たす．非可換球面の半径は

$$R\sqrt{J(J+1)} \tag{2.90}$$

であることが分かる．この半径は，行列サイズが無限大の極限すなわち $J\to\infty$ のとき $R\sim\mathcal{O}(1/J)$ なら有限に保たれることに注意する．これらの座標の間には交換関係

$$[X^i, X^j] = \mathrm{i}R\varepsilon^{ijk}X^k \tag{2.91}$$

が成り立つ．これより行列サイズが無限大の極限 $(J\to\infty)$ は，$R\sim\mathcal{O}(1/J)$ であれば，可換極限に相当することが分かる．

$2J+1$ 次元のヒルベルト空間の基底として，以下のような標準的な基底をとる．

$$|J,m\rangle \ \ (m = -J, -J+1, \cdots, J). \tag{2.92}$$

$SU(2)$ の生成子のこの基底への作用は

$$\begin{aligned} L^{\pm}|J,m\rangle &= \sqrt{(J\mp m)(J\pm m+1)}\,|J,m\pm 1\rangle \\ L^3|J,m\rangle &= m\,|J,m\rangle \end{aligned} \tag{2.93}$$

である．このヒルベルト空間に作用する演算子 $\hat{f}$ について考える．この演算子は，基底 (2.92) 式を用いて

$$\hat{f} = \sum_{m,m'} f_{m,m'}\,|J,m\rangle\langle J,m'| \tag{2.94}$$

のように展開される．ここで，さらに便利な基底として非可換球面調和関数

$$\hat{Y}_{jM} = \sqrt{2J+1}\sum_{m,m'}(-1)^{-J+m'}C^{jM}_{Jm\ J-m'}\,|J,m\rangle\langle J,m'| \tag{2.95}$$

を用いる．ここで，$0\le j\le 2J$，$-j\le M\le j$，$C^{jM}_{Jm\ J-m'}$ は Clebsh-Gordan 係数である．また，エルミート共役は

$$(\hat{Y}_{jM})^{\dagger} = (-1)^M \hat{Y}_{j-M} \tag{2.96}$$

で与えられ，正規直交関係

$$\frac{1}{2J+1}\mathrm{Tr}\left((\hat{Y}_{jM})^{\dagger}(\hat{Y}_{j'M'})\right) = \delta_{jj'}\delta_{MM'} \tag{2.97}$$

を満たしている．非可換球面調和関数の積は

$$\hat{Y}_{j_2 M_2}\hat{Y}_{j_3 M_3} = \sum_{j_1 M_1} \hat{C}^{j_1 M_1}_{j_2 M_2 j_3 M_3}\hat{Y}_{j_1 M_1}, \tag{2.98}$$

$$\hat{C}^{j_1 M_1}_{j_2 M_2 j_3 M_3} \equiv \frac{1}{2J+1}\mathrm{Tr}\left((\hat{Y}_{j_1 M_1})^\dagger \hat{Y}_{j_2 M_2}\hat{Y}_{j_3 M_3}\right) \tag{2.99}$$

で与えられる．$SU(2)$ の生成子と非可換球面調和関数 (2.95) 式の交換子について考える．これは，

$$\begin{aligned}[L^\pm, \hat{Y}_{jM}] &= \sqrt{(J \mp m)(J \pm m + 1)}\hat{Y}_{jM\pm 1},\\ [L^3, \hat{Y}_{jM}] &= M\hat{Y}_{jM}\end{aligned} \tag{2.100}$$

のように与えられる．

ここで，可換空間における角運動量演算子 $\mathcal{L}_i$ と球面調和関数 Y_{jM} を思い出そう．$\Omega = (\theta, \phi)$ を球面上の座標とする．球面調和関数の複素共役は

$$(Y_{jM}(\Omega))^* = (-1)^M Y_{j-M}(\Omega) \tag{2.101}$$

で与えられ，正規直交関係

$$\frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}\omega (Y_{jM}(\Omega))^* (Y_{j'M'}(\Omega)) = \delta_{jj'}\delta_{MM'} \tag{2.102}$$

を満たしている．球面調和関数の積は

$$Y_{j_2 M_2}(\Omega) Y_{j_3 M_3}(\Omega) = \sum_{j_1 M_1}\sqrt{\frac{(2j_2+1)(2j_3+1)}{2j_1+1}} C^{j_1 0}_{j_2 0 j_3 0} C^{j_1 M_1}_{j_2 M_2 j_3 M_3} Y_{j_1 M_1}(\Omega) \tag{2.103}$$

$$\sqrt{\frac{(2j_2+1)(2j_3+1)}{2j_1+1}} C^{j_1 0}_{j_2 0 j_3 0} C^{j_1 M_1}_{j_2 M_2 j_3 M_3} = \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}\Omega (Y_{j_1 M_1}(\Omega))^* Y_{j_2 M_2}(\Omega) Y_{j_3 M_3}(\Omega) \tag{2.104}$$

で与えられる．角運動量演算子

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\pm &= e^{\pm \mathrm{i}\phi}\left(\pm\frac{\partial}{\partial\theta} + \mathrm{i}\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right),\\ \mathcal{L}_3 &= -\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\phi}\end{aligned} \tag{2.105}$$

の球面調和関数 $Y_{jM}(\Omega)$ への作用は，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\pm Y_{jM}(\Omega) &= \sqrt{(J \mp m)(J \pm m + 1)} Y_{jM\pm 1}(\Omega),\\ \mathcal{L}_3 Y_{jM}(\Omega) &= M Y_{jM}(\Omega)\end{aligned} \tag{2.106}$$

である．

以上から，非可換球面調和関数 $\hat{Y}_{jM}$ は可換極限で球面調和関数 Y_{jM} に対応することが分かる．また，$SU(2)$ の生成子と交換子をとることは可換空間において角運動量演算子を作用させることに対応している．先ほどの非可換平面の例では運動量が現れていたことに注意する．ま

た，行列に対して $\frac{1}{2J+1}\mathrm{Tr}$ をとることは，可換空間上での積分 $\frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}\Omega$ に対応している．まとめると，

$$\hat{Y}_{jM} \leftrightarrow Y_{jM}(\Omega), \tag{2.107}$$

$$[\hat{L}_i,\ \ ] \leftrightarrow \mathcal{L}_i, \tag{2.108}$$

$$\frac{1}{2J+1}\mathrm{tr} \leftrightarrow \int \frac{\mathrm{d}\Omega}{4\pi} \tag{2.109}$$

である．ただし，$J \to \infty$ の可換極限で，j_1，j_2，$j_3 \ll J$ のときに成り立つ

$$\hat{C}^{j_1 M_1}_{j_2 M_2 j_3 M_3} \to C^{j_1 M_1}_{j_2 M_2 j_3 M_3}\sqrt{\frac{(2j_2+1)(2j_3+1)}{2j_1+1}}C^{j_1 0}_{j_2 0 j_3 0}(-1)^{-j_1-j_2+j_3} \tag{2.110}$$

を用いている．任意の演算子は (2.95) 式を用いて

$$\hat{f} = \sum_{j=0}^{2J}\sum_{M=-j}^{j} f_{jM}\hat{Y}_{jM} \tag{2.111}$$

のように展開される．これより，以下で定義される可換球面上の関数

$$f(\Omega) = \sum_{j=0}^{2J}\sum_{M=-j}^{j} f_{jM}Y_{jM}(\Omega) \tag{2.112}$$

が非可換平面の例と同様に，ヒルベルト空間上の演算子と対応することが分かる．

第3章　多様体と微分幾何

この章では，後の章で必要となる多様体の基礎と微分幾何について解説する [22–25]．特に，ファイバー束と接続の概念は Berezin-Toeplitz 量子化だけでなく行列による幾何の記述を考える上で大変重要となる．3.1 節では，必要となる写像と位相空間を導入し多様体を定義する．3.2 節では，多様体上の微分形式を導入しその積分を定義する．3.3 節では，物理学にも馴染みの深い Riemann 幾何学を数学的な視点から説明する．3.4 節では，ファイバー束の概念を説明し，ファイバー束上の接続について $U(1)$ ゲージ理論の例を取り入れながら説明する．3.5 節では，2 次元の捻じれ複体に対する Atiyah-Singer の指数定理について解説する．

3.1　多様体の定義

本節では，写像や位相空間などを定義し，これらを用いて多様体を定義する．本論文における多様体とは，ここで定義する微分多様体を指す．

写像

はじめに，基本的な写像について説明する．写像とは，集合の任意の元がある規則に従って別の集合の元に対応することである．X と Y を集合とし，2 つの集合の元をそれぞれ $x, x' \in X$ 及び $y \in Y$ とする．このとき，写像 $f : X \to Y$ は以下の条件を満たすとき単射・全射・全単射という．

単射: $x \neq x'$ ならば $f(x) \neq f(x')$ であるとき

全射 (上への写像): 任意の y に対して，$f(x) = y$ となる x が少なくとも 1 つ存在するとき

全単射: 単射かつ全射であるとき

単射は，集合 X の任意の元が全て異なる Y の元へ対応する，1 対 1 写像であることを意味している．全射は，任意の Y の元に対応する集合 X の元が少なくとも 1 つは存在することを示している．

集合 X と Y に積や和などの代数的演算が与えられているとする．写像 $f : X \to Y$ がこれらの演算を保つとき，f は**準同型写像**という．準同型写像が全単射であるとき，f を**同型写像**という．このとき，X と Y は同型であるといい，$X \sim Y$ で表す．

ベクトル空間と線形写像

体 $K(= \mathbb{R}, \mathbb{C})$ 上の**ベクトル空間** V(または線形空間) とは，V の元ベクトルに対して和とスカラー倍という 2 つの演算が定義されている集合のことである．$\{\boldsymbol{v}_i\}(i = 1, \cdots, k)$ を k 個のベクトルからなる集合とする．等式

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_k\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0} \tag{3.1}$$

が自明でない解 $(x_i \neq 0)$ を持つとき，$\{\boldsymbol{v}_i\}$ は 1 次従属であるといいい，自明な解 $(x_i = 0)$ しか持たないとき，1 次独立であるという．ベクトル空間 V 上の任意の元 $\boldsymbol{v} \in V$ を，1 次独立なベクトルの集合 $\{\boldsymbol{b}_i\}$ の 1 次結合で一意的に

$$\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{b}_1 + v_2\boldsymbol{b}_2 + \cdots + v_n\boldsymbol{b}_n \tag{3.2}$$

と表せるとき，$\{\boldsymbol{b}_i\}$ をベクトル空間 V の基底であるという．基底が n 個の元からなるとき，ベクトル空間 V の次元は n で，$\dim V = n$ で表す．K 上の n 次元ベクトル空間を $V(n, K)$ で表す．

2 つのベクトル空間 V と W の間の写像 $f : V \to W$ が以下の条件を満たすとき**線形写像**という．

$$f(a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2) = a_1 f(\boldsymbol{v}_1) + a_2 f(\boldsymbol{v}_2). \tag{3.3}$$

ただし，a_1，$a_2 \in K$ 及び $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2 \in V$ である．線形写像 f の像とは $f(V) \in W$ のことで $\mathrm{Im} f$ で表す．また，線形写像 f の核とは $\{\boldsymbol{v} \in V | f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}\}$ のことで $\mathrm{Ker} f$ で表す．線形写像 f において，W が体 K そのものであるとき，f を線形関数という．

さらに，双対ベクトル空間について説明する．まず，$f : V \to K$ を n 次元ベクトル空間上の線形関数とする．この空間の基底を $\{\boldsymbol{b}_i\}$ とし，V の任意の元を $\boldsymbol{v} = v^1\boldsymbol{b}_1 + v^2\boldsymbol{b}_2 + \cdots + v^n\boldsymbol{b}_n$ で表す．f の線形性から，$f(\boldsymbol{v}) = v^1 f(\boldsymbol{b}_1) + v^2 f(\boldsymbol{b}_2) + \cdots + v^n f(\boldsymbol{b}_n)$ である．これは，すべての i に対する $f(\boldsymbol{b}_i)$ の値から，任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対する作用が分かることを意味している．また，2 つの線形関数の 1 次結合は再び線形関数となることから，ベクトル空間 V 上の線形関数全体は再びベクトル空間となる．

$$(a_1 f_1 + a_2 f_2)(\boldsymbol{v}) = a_1 f_1(\boldsymbol{v}) + a_2 f_2(\boldsymbol{v}). \tag{3.4}$$

このような線形空間を $V(n, K)$ の**双対ベクトル空間**といい，$V^*(a, K)$ または V^* で表す．$\dim V$ が有限なら $\dim V = \dim V^*$ である．

V^* の基底 $\{b^{*i}\}$ は線形関数であるので，ベクトル $\boldsymbol{b}_j$ への作用を決めると完全に決まる．そこで，

$$b^{*i}(\boldsymbol{b}_j) = \delta^i_j \tag{3.5}$$

を満たす双対基底 $\{b^{*i}\}$ を定める．この双対基底を用いると任意の関数 (双対ベクトル) は，

$$f = f_i b^{*i} \tag{3.6}$$

と展開される．このようにして，関数 (双対ベクトル) のベクトルへの作用は，行ベクトルと列ベクトルの間の**内積** $f(\boldsymbol{v}) = f_i b^{*i}(v^j\boldsymbol{b}_j) = f_i v^i$ としてかける．内積は $\langle\ ,\ \rangle : V^* \times V \to K$ を用いて表すこともある．内積を用いると，ベクトルは双対ベクトルへの作用する線形関数とみることができる．

また，2 つのベクトルの間の内積は以下のように定義することができる．$V(n, K)$ を基底 $\{\boldsymbol{b}_i\}$ をもつベクトル空間，$g : V \to V^*$ をベクトル空間の同型写像とする．ここで g は一般線形変換群 $\mathrm{GL}(n, K)$ の任意の元である．任意のベクトル $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ の間の内積は，

$$g(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) \equiv \langle g\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle \tag{3.7}$$

と定義することができる．$\boldsymbol{v}$ のノルムを内積 $g(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$ の平方根で定義するために，行列 (g_{ij}) は正定値であることを要請する．また，$g(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = g(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1)$ となるために，g は対称行列 $g_{ij} = g_{ji}$ でなければならない．

これらを用いて誘導写像と引き戻しについて説明する．$f : V \to W$ をベクトル空間 V と W の間の線形写像，$g : W \to K$ を W 上の線形関数とする．このとき，合成写像 $g \circ f$ は V 上の線形関数である．これを h とおく．つまり，$h(\boldsymbol{v}) \equiv g(f(\boldsymbol{v}))$ である．これは g が与えられると，写像 f が写像 h を誘導したことになる．したがって，**誘導写像** $f^* : g \mapsto h = f^*(g)$ を得ることになる．写像 h を，f^* による g の**引き戻し**という．

双対ベクトルはベクトルをスカラーに写す線形関数である．一方，ベクトルは双対ベクトルをスカラーに写す線形関数である．これらは，いくつかのベクトルと双対ベクトルをスカラーに写す多重線形関数であるテンソルに一般化することができる．q 個の双対ベクトルと r 個のベクトルを $\mathbb{R}$ へ写す多重線形写像

$$T : \bigotimes^{q} V^* \bigotimes^{r} V \to \mathbb{R} \tag{3.8}$$

を (q, r) 型テンソル T という．$(1, 0)$ 型テンソルは双対ベクトルを実数に写すのでベクトルである．これを，反変ベクトルともいう．また，$(0, 1)$ 型テンソルはベクトルを実数に写すので双対ベクトルである．これを，共変ベクトルともいう．すべての (q, r) 型テンソルの集合は，(q, r) 型テンソル空間 $\mathcal{T}_r^q$ と呼ばれる．このテンソル空間上では，テンソル積と縮約の 2 つの演算が定義できる．

位相空間と同相写像

位相空間の定義は，以下の通りである．

定義 1. X を任意の集合とする．X のある部分集合族 $\mathcal{T} = \{U_i | i \in I\}$ が次の 3 つの条件を満たすとき，対 $(X, \mathcal{T})$ を**位相空間** (topological space) という．

(i) $\emptyset \in \mathcal{T}$ かつ $X \in \mathcal{T}$

(ii) J を I の任意の（無限かもしれない）部分集合とする．部分集合族 $\{U_j | j \in J\}$ について，$U_j \in \mathcal{T}$ なら $\bigcup_{j \in J} U_j \in \mathcal{T}$

(iii) K を I の任意の有限部分集合とする．部分集合族 $\{U_k | k \in K\}$ について，$U_k \in \mathcal{T}$ なら $\bigcap_{k \in K} U_k \in \mathcal{T}$

対 $(X, \mathcal{T})$ を省略して位相空間 X と呼ぶこともある．X の部分集合 U が $\mathcal{T}$ に属するとき，U_i を X の開集合と呼ぶ．位相空間 X の簡単な具体例として，$\mathbb{R}$ が挙げられる．$\mathcal{T}$ は X に位相を定めるという．

次に，連続写像の定義を与える．

定義 2. X，Y を位相空間とする．写像 $f : X {\to} Y$ が**連続写像**であるとは，Y における任意の開集合の逆像が X の開集合であるときをいう．

$(X, \mathcal{T})$ を位相空間とする．X の部分集合族 $\{A_i\}$ が X の被覆であるとは，

$$\bigcup_{i \in I} A_i = X \tag{3.9}$$

を満たすときをいう．すべての A_i が位相 $\mathcal{T}$ の開集合であるとき，この被覆を**開被覆**と呼ぶ．

以上を用いて，同相写像は以下のように定義することができる．

定義 3. X_1，X_2 を位相空間とする．写像 $f : X_1 \to X_2$ が**同相写像**であるとは，f が連続で全単射かつ逆写像 $f^{-1} : X_2 \to X_1$ が連続写像であるときをいう．X_1 と X_2 の間に同相写像が存在するとき，X_1 は X_2 に同相であるという．

多様体

これらを用いて多様体を定義する．一般に多様体とは局所的に $\mathbb{R}^m$ に同相な位相空間のことである．大域的には $\mathbb{R}^m$ に同相でなくても良い．局所的に $\mathbb{R}^m$ と同相であることから，多様体の各点に局所座標という m 個の数からなる集合を対応させることができる．多様体が大域的に $\mathbb{R}^m$ に同相でないときは，複数の局所座標を導入する必要がある．この場合，2 つ以上の局所座標で表される点が存在し，ある座標から別の座標への変換が滑らかである必要がある．この変換が滑らかであることは，多様体上での微積分を行う上で必要となる．多様体の定義は，以下のように与えられる．

定義 4. M が以下の 4 つの条件を満たすとき，$\boldsymbol{m}$ **次元微分多様体**であるという．

(i) M は位相空間である．

(ii) M には対の族 $\{(U_i, \varphi_i)\}$ が与えられている．

(iii) $\{U_i\}$ は M 開被覆であり，φ_i は U_i から $\mathbb{R}^n$ の開部分集合 U_i' の上への同相写像である．

(iv) $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ を満たす U_i と U_j が与えられたとき，$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ は $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ から $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ への無限階微分可能な写像である．

部分集合 U_i を局所パッチまたは座標近傍，φ_i を座標関数または座標，対 (U_i, φ_i) をチャート，族 $\{(U_i, \varphi_i)\}$ をアトラスという．φ_i は m 個の関数 $\{x^1(p), x^2(p), \cdots, x^m(p)\}$ で表され，これらを座標と呼ぶこともある．条件 (ii) と (iii) から，M は局所的に Euclid 空間である．すなわち，M は U_i において，座標が $\{x^\mu\} = \{x^1, x^2, \cdots, x^m\}$ である $\mathbb{R}^m$ の開集合と同相である．

3.2 多様体上の微積分

前節では多様体を定義した．本節では，微分可能写像や 1-形式を定義し，多様体上の微積分を定義する．多様体は局所的に $\mathbb{R}^n$ と同相であることから，$\mathbb{R}^n$ 上の微積分を利用できる．

微分可能写像

$f : M \to N$ を m 次元多様体 M から n 次元多様体 N への写像とする．M 上の点を p とすると，$f : p \mapsto f(p)$ であり，$p \in U$ 及び $f(p) \in V$ となるチャートをそれぞれ (U, φ) と (V, ψ) ととる．このとき f は

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \tag{3.10}$$

のような座標表示をとる．それぞれ座標を $\varphi(p) = \{x^\mu\}$，$\psi(p) = \{y^\alpha\}$ とかくと，$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ は m 変数ベクトル値関数 $y = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x)$ である．これを単に $y = f(x)$ と書くこともある．$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x)$ が任意の x^μ に対して無限回微分可能 C^∞ であるとき，f は $x = \varphi(p)$ で微分可能であるという．微分可能写像 f はまた，滑らかであるという．写像 f の微分可能性は座標やチャートの取り方によらないことに注意する．このとき，微分同相写像は以下のように定義される．

定義 5. もし $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ に逆写像が存在し，$y = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x)$ と $x = \varphi \circ f^{-1} \circ \psi^{-1}(y)$ が C^∞ であるとき，写像 f は微分同相写像であるという．また，このとき M と N は互いに微分同相であるといい，$\dim M = \dim N$ である．

特に，微分同相写像 $f : M \to M$ 全体の集合は群をなし，$\mathrm{Diff}(M)$ とかく．互いに微分同相である 2 つの多様体は同じ多様体とみなす．微分同相写像は明らかに同相写像であるが，この逆について考える．微分同相ではないが同相である写像をもつことは，1 つの位相空間に異なる微分構造を入れることと同じである．実際にそのようなものを与えるのは難しく，高次元多様体 $\dim M \geq 4$ でなければ存在しないことが知られている．

ベクトルと微分 1-形式

ここでは，多様体上の関数，曲線，ベクトル，1-形式 (1-form) について説明する．m 次元多様体 M 上の**関数** f とは，M から $\mathbb{R}$ への滑らかな写像のことである．チャート (U_i, φ_i) 上で f の座標表示は m 変数の実数値関数 $f \circ \varphi_i^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ で与えられる．M 上の滑らかな関数全体の集合を $\mathcal{F}(M)$ と表す．

m 次元多様体 M 上の**開曲線** c とは，開区間から M への写像 $c : (a, b) \to M$ のことである．ここでは後の議論のため，(a, b) は $a < 0 < b$ を満たす開区間とし，曲線 c は自分自身と交わりを持たないとする．チャート (U_i, φ_i) 上で曲線 $c(t)$ の座標表示は $x = \varphi_i \circ c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ で与えられる．同様に多様体上の閉曲線は写像 $S^1 \to M$ で与えられる．

m 次元多様体 M 上のベクトルは，M 上の曲線に対する接ベクトルとして定義される．まず，M 上の曲線を $c(t) : (a, b) \to M$，M 上の関数を $f : M \to \mathbb{R}$ とする．ただし，(a, b) は $t = 0$ を含む開区間とする．M 上の点 $c(0)$ における**接ベクトル**を，$t = 0$ における曲線 $c(t)$ に沿った関数 $f(c(t))$ の方向微分として定義する．$t = 0$ での関数 $f(c(t))$ の方向微分は，

$$\left.\frac{\mathrm{d}f(c(t))}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \tag{3.11}$$

である．チャート (U_i, φ_i) 上で f の座標表示 $f \circ \varphi^{-1}(x)$ を行うと，次式のようにも表せる．

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x^\mu}\frac{\mathrm{d}x^\mu(c(t))}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}. \tag{3.12}$$

ここで，簡単のために $\partial(f \circ \varphi^{-1}(x))/\partial x^\mu$ を $\partial f/\partial x^\mu$ と書いている．微分作用素 X を以下のように導入する．

$$X = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad , \; X^\mu = \left.\frac{\mathrm{d}x^\mu(c(t))}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}. \tag{3.13}$$

(3.11) 式は，関数 f に微分作用素 X を作用させて得られる式と思える．すなわち，

$$X[f] \equiv X^\mu \left(\frac{\partial f}{\partial x^\mu}\right) = \left.\frac{\mathrm{d}f(c(t))}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \tag{3.14}$$

である．このように，M 上の点 $p = c(0)$ における曲線 $c(t)$ によって与えられた方向に沿っての接ベクトルは $X = X^\mu(\partial/\partial x^\mu)$ によって定められる．

M 上の点 p における接ベクトル全体は，p における M の接空間と呼ばれ，T_pM と表す．接空間はベクトル空間になっている．(3.14) 式より，$\frac{\partial}{\partial x^\mu}(1 \leq \mu \leq m)$ は T_pM の基底ベクトルで，$\dim T_pM = \dim M$ である．T_pM の元 V は，接ベクトルまたは単にベクトル，反変ベクトルと呼ばれる．ベクトル V が $V = V^\mu b_\mu$ ($b_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$) と表されるとき，この基底 $\{b_\mu\}$ を座標基底と呼び，V^μ を V の b_μ に関する成分と呼ぶ．(3.14) 式より，ベクトルは座標を決めなくても存在する，すなわち決め方が座標によらない．このことから，ベクトルの成分の座標変換におけ

る変換性を読み取ることができる．M 上の点 $p \in U_i \cap U_j$ の座標表示をそれぞれ $x = \varphi_i(p)$ と $y = \varphi_j(p)$ とする．このとき，ベクトル $V \in T_pM$ は

$$V = V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \widetilde{V}^\mu \frac{\partial}{\partial y^\mu} \tag{3.15}$$

のように表せる．したがって，ベクトルの成分の座標変換における変換性は

$$\widetilde{V}^\mu = V^\nu \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu} \tag{3.16}$$

となる．ベクトルの成分はベクトルが座標によらず不変となるように変換していることに注意する．

次に，m 次元多様体 M 上の 1-形式について考える．2.1 節におけるベクトル空間についての議論を思い出す．T_pM はベクトル空間なので，T_pM の双対ベクトル空間が存在する．この双対ベクトル空間とは，T_pM から $\mathbb{R}$ への線形関数からなるベクトル空間のことである．このような双対ベクトル空間を p における余接空間と呼び，T_p^*M と表す．T_p^*M の元 $\omega : T_p^*M \to \mathbb{R}$ は，M 上の**微分 1-形式**である．又は，1 次微分形式と呼ぶ．微分形式の定義はこのあとで行う．これを単に 1-形式，双対ベクトル，余接ベクトル，共変ベクトルとも呼ぶ．この双対ベクトル空間 T_p^*M を，点 p における 1-形式全体からなるベクトル空間という意味で $\omega_p^1(M)$ と表すこともある．

1-形式の例として，関数 $f \in \mathcal{T}(M)$ の微分 $\mathrm{d}f \in T_p^*M$ について考える．$\mathrm{d}f$ のベクトル $V \in T_pM$ への作用は

$$\langle \mathrm{d}f, V \rangle \equiv V[f] \tag{3.17}$$

で定義される．ここで，$V[f]$ はベクトル V の関数 f への作用であり (3.14) 式で定義されていることに注意する．

$\mathrm{d}f$ は座標 $x = \varphi(p)$ により

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \mathrm{d}x^\mu \tag{3.18}$$

と表される．$\mathrm{d}x^\mu$ は T_p^*M の基底であり，双対基底と呼ばれる．双対基底と座標基底は

$$\left\langle \mathrm{d}x^\nu, \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right\rangle = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} = \delta^\nu_\mu \tag{3.19}$$

の関係を満たす．任意の 1-形式は双対基底を用いて

$$\omega = \omega_\mu \mathrm{d}x^\mu \tag{3.20}$$

と表される．ω_μ は 1-形式 ω の成分と呼ばれる．ベクトル $V = V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ と 1-形式 $\omega = \omega_\mu \mathrm{d}x^\mu$ の内積 $\langle \ , \ \rangle : T_p^*M \otimes T_pM \to \mathbb{R}$ は

$$\langle \omega, V \rangle = \omega_\nu V^\mu \left\langle \mathrm{d}x^\nu, \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right\rangle = \omega_\nu V^\mu \delta^\nu_\mu = \omega_\mu V^\mu \tag{3.21}$$

で定義される．(3.17) 式より，1-形式はベクトルと同様に座標を決めなくても存在することが分かる．このことから，1-形式の成分の座標変換の変換性を読み取ることができる．M 上の点

$p \in U_i \cap U_j$ の座標表示をそれぞれ $x = \varphi_i(p)$ と $y = \varphi_j(p)$ とする．このとき，1-形式 $\omega \in T_p^* M$ は

$$\omega = \omega_\mu \mathrm{d}x^\mu = \widetilde{\omega}_\mu \mathrm{d}y^\mu \tag{3.22}$$

のように表せる．したがって，1-形式の成分の座標変換における変換性は (3.19) 式より

$$\mathrm{d}x^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\mu} \mathrm{d}y^\mu \tag{3.23}$$

となることが分かるので，

$$\widetilde{\omega}_\mu = \omega_\nu \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\mu} \tag{3.24}$$

となる．

m 次元多様体 M 上の (q, r) 型テンソルは，q 個の $T_p^* M$ の元と r 個の $T_p M$ の元から $\mathbb{R}$ への多重線形写像である．M 上の点 p における (q, r) 型テンソル全体の集合を $\mathcal{T}^q_{r,p}$ と表す．この元 $T \in \mathcal{T}^q_{r,p}$ は，座標基底と双対基底を用いて

$$T = T^{\mu_1 \cdots \mu_q}{}_{\nu_1 \cdots \nu_r} \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\mu_q}} \mathrm{d}x^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}x^{\nu_r} \tag{3.25}$$

と表される．これは，$\bigotimes^q T_p^* M \bigotimes^r T_p M$ から $\mathbb{R}$ への線形関数である．テンソル T の，ベクトル $V_i = V_i^{\mu_i} \frac{\partial}{\partial x^{\mu_i}} (1 \leq i \leq r)$ と 1-形式 $\omega_i = \omega_{i\mu_i} \mathrm{d}x^{\mu_i} (1 \leq i \leq q)$ への作用は，

$$T(\omega_1, \cdots, \omega_q; V_1, \cdots, V_r) = T^{\mu_1 \cdots \mu_q}{}_{\nu_1 \cdots \nu_r} \omega_{1\mu_1} \cdots \omega_{q\mu_q} V_1^{\nu_1} \cdots V_r^{\nu_r} \tag{3.26}$$

となる．

M 上の各点でベクトル V が滑らかであるとは，ベクトルを成分表示したときに，その各成分が C^∞ 級微分可能であることを意味する．M 上の各点でベクトル V が滑らかに定められているとき，それを M 上の**ベクトル場**と呼ぶ．つまり，M 上の任意の関数 $f \in \mathcal{F}(M)$ に対して $V[f] \in \mathcal{F}(M)$ であれば V はベクトル場である．M 上の点 p におけるベクトル場全体の集合は接空間 $T_p M$ と表すと説明したが，M のベクトル場全体の集合を $\mathfrak{X}(M)$ と表す．同様に M 上の各点で (p, q) 型テンソル T が滑らかに定められているとき，それを (p, q) 型テンソル場と呼ぶ．M 上の (p, q) 型テンソル場全体の集合を $\mathcal{T}^q_r(M)$ と表す．$\mathcal{T}^0_1(M)$ は M 上の双対ベクトル場全体の集合である．すなわち $T^* M$ とも表せる．後で説明するように，双対ベクトル場を微分形式と考えれば，$\Omega^1(M)$ と表すこともできる．$\mathcal{T}^1_0(M)$ は M 上のベクトル場全体の集合で，TM とも表せる．

誘導写像と部分多様体

次章以降の議論において，$\mathbb{R}^3$ に埋め込まれた 2 次元球面 S^2 を考える．そのために，ここでは誘導写像について説明し，部分多様体を定義する．M と N を多様体とする．滑らかな写像 $f : M \to N$ は微分写像と呼ばれる写像 f_* を誘導する．

$$f_* : T_p M \to T_{f(p)} N. \tag{3.27}$$

この写像は，ベクトルからベクトルへの写像であることに注意する．前で説明した曲線に沿った方向微分としての接ベクトルの定義から f_* の具体的な形が導かれる．$g \in \mathcal{F}(N)$ なら，$g \circ f \in \mathcal{F}(M)$

となる．M 上のベクトル $V \in T_pM$ はこの関数 $g \circ f$ に作用すると実数 $V[g \circ f]$ を与える．そこで，N 上のベクトルである $f_*V \in T_{f(p)}N$ を

$$(f_*V)[g] \equiv V[g \circ f] \tag{3.28}$$

で定義する．M と N のチャート $(U_i, \varphi_i), (V_i, \psi_i)$ と座標 $x = \varphi(p)$，$y = \psi(f(p))$ を用いれば，

$$(f_*V)[g \circ \psi^{-1}(y)] \equiv V[g \circ f \circ \varphi^{-1}(x)] \tag{3.29}$$

と表せる．

誘導写像を用いて，ここでは多様体の部分多様体を定義する．

定義 6. M と N を多様体とし，$\dim M \leq \dim N$ とする．M から N への滑らかな写像を $f : M \to N$ とする．

(i) 写像 f は，その誘導写像 $f_* : T_pM \to T_{f(p)}N$ が単射である，すなわち $\mathrm{rank} f_* = \dim M$ のとき，M から N への**はめ込み**であるという．

(ii) 写像 f がはめ込みかつその像 $f(M)$ が M に微分同相であるとき，f を**埋め込み**であるという．像 $f(M)$ を N の**部分多様体**と呼ぶ．

Lie 括弧積

多様体上の 2 つのベクトル場についての **Lie 括弧積**を以下で定義する．以下では，$\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$ という記法を用いる．

定義 7. $X = X^\mu \partial/\partial x^\mu$ と $Y = Y^\mu \partial/\partial x^\mu$ を多様体 M 上のベクトル場とする．任意の $f \in \mathcal{F}(M)$ に対して，**Lie 括弧積**を

$$[X, Y]f = X\big[Y[f]\big] - Y\big[X[f]\big] \tag{3.30}$$

で定義する．

このとき，$[X, Y]f$ はベクトル場の関数への作用から

$$\begin{aligned} [X, Y]f &= X\big[Y[f]\big] - Y\big[X[f]\big] \\ &= \left(X^\mu \partial_\mu Y^\nu - Y^\mu \partial_\mu X^\nu\right) \frac{\partial f}{\partial x^\nu} \end{aligned} \tag{3.31}$$

と計算できる．したがって，$[X, Y]$ は

$$[X, Y] = \left(X^\mu \partial_\mu Y^\nu - Y^\mu \partial_\mu X^\nu\right) b_\nu \tag{3.32}$$

で与えられるベクトル場である．Lie 括弧は以下 3 つの性質を満たす．

(a) 双線形性：$[X, c_1Y_1 + c_2Y_2] = c_1[X, Y_1] + c_2[x, Y_2]$
$[c_1X_1 + c_2X_2, Y] = c_1[X_1, Y] + c_2[x_2, Y]$

(b) 歪対称生：$[X, Y] = -[Y, X]$

(c) Jacobi 恒等式：$\big[[X, Y], Z\big] + \big[[Z, X], Y\big] + \big[[Y, Z], X\big] = 0$

微分形式とその微積分

前の議論で，多様体上の 1 次微分形式である 1-形式について説明したが，ここではこれを一般化した r 次微分形式を定義する．はじめに，多様体 M 上の点 p における $(0,r)$ 型テンソル $\omega \in \mathcal{T}^0_{r,p}(M)$ について考える．このテンソルに作用する対称作用素を P とする．

$$P\omega(V_1,\cdots,V_r) \equiv \omega(V_{P(1)},\cdots,V_{P(r)}). \tag{3.33}$$

ここで，$V_i \in T_pM$，P は r 次対称群 S_r の元である．座標基底を $\{b_\mu\} = \{\frac{\partial}{\partial x^\mu}\}$ に選ぶと，ω の成分は

$$\omega(e_{\mu_1},\cdots,e_{\mu_r}) = \omega_{\mu_1\cdots\mu_r} \tag{3.34}$$

であり，$P\omega$ の成分は

$$P\omega(e_{\mu_1},\cdots,e_{\mu_r}) = P\omega_{\mu_{P(1)}\cdots\mu_{P(r)}} \tag{3.35}$$

である．

$\omega \in \mathcal{T}^0_{r,p}(M)$ に対する反対称積 $\mathcal{A}$ は

$$\mathcal{A}\omega = \frac{1}{r!}\sum_{P\in S_r}\mathrm{sgn}(P)P\omega \tag{3.36}$$

である．

これをもとに，r 次微分形式を以下のように定義できる．

定義 8. $(0,r)$ 型の完全反対称テンソルを r 次**微分形式**，または r-形式という．

r 個の 1-形式の外積をその完全反対称積で定義する．

$$\mathrm{d}x^{\mu_1}\wedge\mathrm{d}x^{\mu_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{\mu_r} = \sum_{P\in S_r}\mathrm{sgn}(P)\mathrm{d}x^{\mu_{P(1)}}\otimes\mathrm{d}x^{\mu_{P(2)}}\otimes\cdots\otimes\mathrm{d}x^{\mu_{P(r)}} \tag{3.37}$$

である．この式は $r=2$ のとき，

$$\mathrm{d}x^\mu\wedge\mathrm{d}x^\nu = \mathrm{d}x^\mu\otimes\mathrm{d}x^\nu - \mathrm{d}x^\nu\otimes\mathrm{d}x^\mu \tag{3.38}$$

である．後に定義する接続は 2-形式である．多様体 M 上の点 $p\in M$ における r-形式全体がなす空間を $\Omega^r_p(M)$ で表す．(3.37) 式の r-形式の集合は $\Omega^r_p(M)$ の基底をなす．また，多様体 M 上の r-形式の全体の集合を $\Omega^r(M)$ と表す．例えば，$\Omega^0(M)$ は M 上の関数空間 (関数全体がなす環)$\mathcal{F}(M)$ であり，$\Omega^1(M)$ は 1-形式がなす空間，すなわち T^*M である．

次に，外微分を以下のように定義する．

定義 9. 外微分 d_r は写像 $\Omega^r(M)\to\Omega^{r+1}(M)$ で，その r-形式

$$\omega = \frac{1}{r!}\omega_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_r}\mathrm{d}x^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{\mu_r} \tag{3.39}$$

への作用は，

$$\mathrm{d}_r\omega = \frac{1}{r!}\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\omega_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_r}\right)\mathrm{d}x^\mu\wedge\mathrm{d}x^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{\mu_r} \tag{3.40}$$

で定義される．

最後に，多様体上の微分形式の積分について説明する．いま，多様体として m 次元向き付け可能多様体 M を考える．ここでは，向き付け可能多様体の定義は省略する．後の議論の対象となる球面や，平面，トーラスなどは向き付け可能多様体である．このような多様体上にはいかなる点でもゼロとならない m-形式 ω が存在する．この m-形式は体積要素と呼ばれ，関数 $f \in \mathcal{F}(M)$ を M 上で積分する際に測度としての役割を果たす．このような ω は，以下のように構成できる．チャート (U_i, φ_i) の座標を $x = \varphi(p)$ とする．$h(p)$ をこのチャート上の正定値関数とし，m-形式 ω を

$$\omega = h(p)\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^m \tag{3.41}$$

のようにとる．このとき，M が向き付け可能多様体ならば，任意のチャート上のいたるところで $h(p)$ が正となるように ω を拡張することができる．こうして，体積要素である ω が構成される．

M 上の体積要素を ω，関数を $f : M \to \mathbb{R}$ とする．チャート (U_i, φ_i) の座標を x とする．局所パッチ (座標近傍)U_i における m-形式 $f\omega$ の積分を

$$\int_{U_i} f\omega \equiv \int_{\varphi(U_i)} f(\varphi_i^{-1}(x))h(\varphi_i^{-1}(x))\mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^m \tag{3.42}$$

で定義する．ここで，右辺は m 変数関数の重積分であることに注意する．U_i 上の関数の積分が定義されれば，以下のように 1 の分割を用いて多様体 M 全体での積分が定義される．

定義 10. M の開被覆 $\{U_i\}$ で M の各点が有限個の U_i で覆われているものを選ぶ．もし，微分可能な関数の族 $\varepsilon_i(p)$ が

(i) $0 \leq \varepsilon_i(p) \leq 1$,

(ii) $p \notin U_i$ ならば $\varepsilon_i(p) = 0$,

(iii) 任意の点 $p \in M$ に対して $\varepsilon_1(p) + \varepsilon_2(p) + \cdots = 1$,

を満たすとき，族 $\{\varepsilon_i(p)\}$ は被覆 $\{U_i\}$ に属する 1 の分割と呼ばれる．

M の開被覆 $\{U_i\}$ で M の各点が有限個の U_i で覆われているものを選ぶとしたが，このことがいつも可能な多様体はパラコンパクトであるという．本論文で扱う多様体は，パラコンパクトであることを仮定する．上の条件 (iii) から，

$$f(p) = \sum_i f(p)\varepsilon_i(p) = \sum_i f_i(p) \tag{3.43}$$

が得られる．ここで，$f_i(p) \equiv f(p)\varepsilon_i(p)$ は (ii) より，U_i の外側ではゼロである．故に $p \in M$ が与えられれば M のパラコンパクト性の仮定から (3.43) 式は i についての和が有限であることが保証される．こうして，各 $f_i(p)$ に対して (3.42) 式から f_i の U_i 上の積分を定義することができる．f の多様体 M 全体での積分は，

$$\int_M f\omega \equiv \sum_i \int_{U_i} f_i\omega \tag{3.44}$$

で与えられる．

3.3 Riemann 幾何学

前節では多様体を定義したが，多様体は計量テンソルが与えられるとさらに詳しい構造を持ち得る．本節では，Riemann 多様体における計量テンソルについて説明し，計量テンソルが与えられている場合の多様体の幾何学について説明する．特に次章以降にスピノル束を考えるために，多脚場とスピン接続を導入する．

計量テンソル

まず，多様体の Riemann 計量の定義を与える．

定義 11. M を微分多様体とする．M 上の点 p における接空間におけるベクトルを U，$V \in T_pM$ とする，このとき，M 上の **Riemann 計量** g とは，各点 $p \in M$ で次の 2 つの公理を満たす $(0,2)$ 型テンソルである．

(i) $g_p(U,V) = g_p(V,U)$.

(ii) $g_p(U,U) \geq 0$ ，ただし等式は $U=0$ のときのみ成り立つ．

ここで，点 p における計量テンソルを g_p と表している．この g_p は正定値な対称双一次形式である．この様な Riemann 計量を持つ多様体を Riemann 多様体という．

点 p における接空間のベクトル U，$V \in T_pM$ の内積を計量テンソルによって $g_p(U,V)$ で定義する．このとき g_p は写像 $T_pM \otimes T_pM \to \mathbb{R}$ であることに注意する．

(U_i, φ_i) を M におけるチャート，$x=\phi(p)$ を座標とする．$g \in \mathcal{T}^2_0(M)$ であるので，g_p は双対基底を用いて

$$g_p = g_{\mu\nu}(p)\mathrm{d}x^\mu \otimes \mathrm{d}x^\nu \tag{3.45}$$

と展開される．計量テンソルの成分の対称性は座標基底への作用として以下のように見ることができる．

$$g_{\mu\nu}(p) = g_p\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) = g_{\nu\mu}(p). \tag{3.46}$$

$g_{\mu\nu}$ において，混乱のない限り p を省略して表す．(μ,ν) 成分が $g_{\mu\nu}$ であるような行列を $(g_\mu\nu)$ で表す．この行列は対称行列であるのは明らかで，最大階数を持つので逆行列が存在する．この逆行列を $g^{\mu\nu}(p)$ で表す．すなわち $g_{\mu\nu}g^{\nu\rho} = \delta^\rho_\mu$ である．

無限小距離の 2 乗は，無限小変位 $\mathrm{d}x^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \in T_pM$ に g を作用させることにより，

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= g\left(\mathrm{d}x^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \mathrm{d}x^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) \\ &= \mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu g\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) \\ &= g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu \end{aligned} \tag{3.47}$$

のように定義される．計量テンソルとは $g = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \otimes \mathrm{d}x^\nu$ のことであるが，$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu$ も計量と呼ぶことにする．Riemann 多様体において，$(g_{\mu\nu})$ は対称行列で，その固有値はすべて正の実数である．この行列を対角化することで，Euclid 計量 $\delta = \mathrm{diag}(1,\cdots)$ が得られる．

また，定義 13 の公理 (ii) において，任意の $U \in T_pM$ に対して $g_p(U,V)=0$ なら $V=0$ を満たす g を擬計量テンソルといい，擬計量テンソルを持つ多様体を擬 Riemann 多様体という．このとき行列 $(g_{\mu\nu})$ は負の固有値を持ち得る．負の固有値を 1 つだけ持つとき，Lorentz 計量と呼ばれる．この行列を対角化することにより，Minkowski 計量 $\eta = \mathrm{diag}(-1,1,\cdots)$ が得られる．

アフィン接続と共変微分

多様体上で接続を定義することで，ベクトルの平行移動及び共変微分を定義することができる．ここで初めに定義するアフィン接続は，一般相対性理論でよく用いられる Levi-Civita 接続よりも一般的な定義であることに注意する．Levi-Civita 接続は後で説明する．以下のようにアフィン接続の定義を与える．

定義 12. M を多様体とする．M 上の関数を $f = \mathcal{F}(M)$，ベクトル場を X，Y，$Z \in \mathfrak{X}(M)$ とする．**アフィン接続** ∇ とは，写像 $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$，$(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$ で，次の 4 つの条件を満たすものである．すなわち，2 つのベクトル場から 1 つのベクトル場を与える写像である．

$$\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z, \tag{3.48a}$$
$$\nabla_{(X+Y)} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z, \tag{3.48b}$$
$$\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y, \tag{3.48c}$$
$$\nabla_X(fY) = X[f]Y + f\nabla_X Y. \tag{3.48d}$$

m 次元多様体 M 上で，チャート (U_i, φ_i) とその座標 $x = \varphi_i(p)$ をとる．T_pM の座標基底を $\{b_\mu\} = \{\frac{\partial}{\partial x^\mu}\}$ とする．このとき，m^3 個の**接続係数**と呼ばれる関数を

$$\nabla_\mu b_\nu \equiv \nabla_{b_\mu} b_\nu = b_\lambda \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} \tag{3.49}$$

で定義する．定義より，添え字 μ と ν の入れ替えは必ずしも対称でないことに注意する．

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} \tag{3.50}$$

となる特別な接続は Levi-Civita 接続と呼ばれる．

アフィン接続 ∇ の基底ベクトルへの作用から，∇ の任意のベクトルへの作用が計算できる．M 上の 2 つのベクトル場を $V = V^\mu b_\mu$，$W = W^\mu b_\mu$ とする．このときアフィン接続の作用は定義 12 の (3.48c) 式，(3.48d) 式，(3.49) 式より，

$$\begin{aligned} \nabla_V W &= V^\mu \nabla_{b_\mu}(W^\nu b_\nu) \\ &= V^\mu (b_\mu[W^\nu] b_\nu + W^\nu \nabla_{b_\mu} e_\nu) \\ &= V^\mu \left(\frac{\partial W^\lambda}{\partial x^\mu} + W^\nu \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} \right) e_\lambda \end{aligned} \tag{3.51}$$

となる．ここで，(3.51) 式の両辺はベクトル場である．左辺に注目すると，その λ 番目の成分は $V^\mu \nabla_\mu W^\lambda$ である．ここで，(3.51) 式の辺々の λ 番目の成分は V^μ を除くと

$$\nabla_\mu W^\lambda \equiv \frac{\partial W^\lambda}{\partial x^\mu} + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} W^\nu \tag{3.52}$$

であると定義する．ここで，$\nabla_\mu W^\lambda$ はベクトル場 $\nabla_\mu W$ の λ 番目の成分であり，成分 W^λ の共変微分ではないことに注意する．

多様体 M 上に曲線が与えられると，曲線に沿ってベクトルの平行移動を定義することができる．M 上のチャート (U_i,φ_i) と座標 $x=\varphi(p)$ をとる．このチャートで被覆されている開曲線を $c(t):(a,b)\to M$ とし，$c(t)$ に沿って定義されているベクトル場を X とする．

$$X|_{c(t)} = X^\mu(c(t))b_\mu|_{c(t)}\,. \tag{3.53}$$

ここで座標基底 $\{e_\mu\}=\{\partial/\partial x^\mu\}$ を用いている．X が任意の $t\in(a,b)$ に対して

$$\nabla_V X = 0 \tag{3.54}$$

を満たすとき，X は $c(t)$ に沿って**平行移動された**という．ただし

$$V=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\mathrm{d}x^\mu(c(t))}{\mathrm{d}t}\right)b_\mu\bigg|_{c(t)} \tag{3.55}$$

は $c(t)$ における接ベクトルであることに注意する．(3.54) 式は，成分でかくと

$$\frac{\mathrm{d}X^\mu}{\mathrm{d}t}+\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\nu(c(t))}{\mathrm{d}t}X^\lambda=0 \tag{3.56}$$

となる．(3.54) 式において X が V 自身であるとき，すなわち

$$\nabla_V V = 0 \tag{3.57}$$

のとき，曲線 $c(t)$ を測地線，(3.57) 式を測地線方程式という．これを成分でかくと

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}t^2}+\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}t}=0 \tag{3.58}$$

となる．

次に多様体上の共変微分を定義する．∇_X は微分としての意味をもつので，多様体 M 上の関数 $f\in\mathcal{F}(M)$ の共変微分を通常の方向微分

$$\nabla_X f = X[f] \tag{3.59}$$

によって定義する．このとき，式は Leibnitz 規則のようになる．

$$\nabla_X(fY)=(\nabla_X f)Y+f\nabla_X Y. \tag{3.60}$$

これを任意のテンソル積にも成り立つことを要請する．T_1，T_2 を任意の型のテンソル場とすると，

$$\nabla_X(T_1\otimes T_2)=(\nabla_X T_1)\otimes T_2+T_1\otimes(\nabla_X T_2) \tag{3.61}$$

を要請する．これらの要請の下で，1-形式 $\omega\in\Omega^1(M)$ の共変微分を計算する．その為に，ω とベクトル場 Y の内積 $\langle\omega,Y\rangle\in\mathcal{F}(M)$ への ∇_X の作用を考えると，

$$\nabla_X[\langle\omega,Y\rangle]=\langle\nabla_X\omega,Y\rangle+\langle\omega,\nabla_X Y\rangle \tag{3.62}$$

を得るはずである．この両辺を ν 成分について書き直すと

$$(\nabla_X \omega)_\nu = X^\mu \partial_\mu \omega_\nu - X^\mu \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} \omega_\lambda \tag{3.63}$$

を得る．特に，$X = b_\mu$ のとき

$$(\nabla_\mu \omega)_\nu = \partial_\mu \omega_\nu - \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} \omega_\lambda \tag{3.64}$$

を得る．さらに，$\omega = \mathrm{d}x^\nu$ とすると

$$\nabla_\mu \mathrm{d}x^\nu = -\Gamma^\nu{}_{\mu\nu} \mathrm{d}x^\lambda \tag{3.65}$$

を得る．このように関数の共変微分は (3.59) 式，∇_μ の座標基底への作用は (3.49) 式，双対基底への作用は (3.65) 式と決まったので，一般のテンソルの成分への作用は

$$\begin{aligned}\nabla_\mu T^{\nu_1 \cdots \nu_p}{}_{\lambda_1 \cdots \lambda_q} &= \partial_\mu T^{\nu_1 \cdots \nu_p}{}_{\lambda_1 \cdots \lambda_q} \\ &\quad + \Gamma^{\nu_1}_{\mu\rho} T^{\rho \cdots \nu_p}{}_{\lambda_1 \cdots \lambda_q} + \cdots + \Gamma^{\nu_p}_{\mu\rho} T^{\nu_1 \cdots \rho}{}_{\lambda_1 \cdots \lambda_q} \\ &\quad - \Gamma^\rho{}_{\mu\lambda_1} T^{\nu_1 \cdots \nu_p}{}_{\rho \cdots \lambda_q} - \cdots - \Gamma^\rho{}_{\mu\lambda_q} T^{\nu_1 \cdots \nu_p}{}_{\lambda_1 \cdots \rho}\end{aligned} \tag{3.66}$$

となる．

Riemann 曲率と捩率

多様体 M 上の曲がり具合を表す量として，捩率テンソル $T : \mathfrak{X}(M) \otimes \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ と Riemann 曲率テンソ $R : \mathfrak{X}(M) \otimes \mathfrak{X}(M) \otimes \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ をそれぞれ，

$$T(X, Y) \equiv \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], \tag{3.67}$$

$$R(X, Y, Z) \equiv \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \tag{3.68}$$

で定義する．R を Z に対する作用素とみて，$R(X, Y)Z$ と表すこともある．ここで，$[X, Y]$ は 2 つのベクトル場についての Lie 括弧積である．

T と R がテンソルの性質である多重線形性を持つことを以下のように確かめる．まず，R については以下のような結果を得る．

$$\begin{aligned}R(fX, gY)hZ &= \nabla_{fX} \nabla_{gY} hZ - \nabla_{gY} \nabla_{fX} hZ - \nabla_{[fX, gY]} hZ \\ &= f\nabla_X (gY[h]Z + gh\nabla_Y Z) - g\nabla_Y (fX[h]Z + fh\nabla_X Z) \\ &\qquad - \nabla_{(fg[X,Y] - gY[f]X + fX[g]Y)} hZ \\ &= fgh(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z \nabla_{[X,Y]} Z) \\ &= fghR(X, Y)Z.\end{aligned} \tag{3.69}$$

したがって，R は X，Y，Z について線形で，

$$R(X, Y)Z = X^\mu Y^\nu Z^\lambda R(b_\mu, b_\nu) b_\lambda \tag{3.70}$$

を満たすことが分かる．ここで，(3.48c) 式，(3.48d) 式，Lie 括弧積の性質を用いた．また，詳細な計算は省くが以下も成り立つ．

$$R(fX_1, gY_1)hZ_1 + R(fX_2, gY_2)hZ_2 = fghR(X_1 + X_2, Y_1 + Y_2)(Z_1 + Z_2) \tag{3.71}$$

以上の性質から，R は多重線形性を持つことが分かる．R は 3 つのベクトル場を 1 つのベクトル場に写すので $(1,3)$ 型テンソル場である．次に，T については以下のような結果を得る．

$$
\begin{aligned}
T(fX, gY) &= \nabla_{fX} gY - \nabla_{gY} fX - [fX, gY] \\
&= f\nabla_X gY - g\nabla_Y fX - g[fX, Y] - fX[g]Y \\
&= fg(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]) \\
&= fgT(X, Y).
\end{aligned} \tag{3.72}
$$

また，

$$
T(X, Y) = X^\mu Y^\nu T(b_\mu, b_\nu) \tag{3.73}
$$

を示すことも容易である．したがって，T は R と同様に多重線形性を持つ．T は 2 つのベクトル場を 1 つのベクトル場に写すので $(1,2)$ 型テンソル場である．

T と R はテンソルであるので，それらの基底ベクトルへの作用が決まれば，任意のベクトルへの作用を計算できる．座標基底 $\{b_\mu\}$ と双対基底 $\{\mathrm{d}x^\mu\}$ におけるこれらの成分は以下のように与えられる．

$$
\begin{aligned}
T^\lambda{}_{\mu\nu} &= \langle \mathrm{d}x^\lambda, T(b_\mu, b_\nu)\rangle \\
&= \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu},
\end{aligned} \tag{3.74}
$$

及び

$$
\begin{aligned}
R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu} &= \langle \mathrm{d}x^\kappa, R(b_\mu, b_\nu)b_\lambda\rangle \\
&= \partial_\mu \Gamma^\kappa{}_{\nu\lambda} - \partial_\nu \Gamma^\kappa{}_{\mu\lambda} + \Gamma^\eta{}_{\nu\lambda}\Gamma^\kappa{}_{\mu\eta} - \Gamma^\eta{}_{\mu\lambda}\Gamma^\kappa{}_{\nu\mu}.
\end{aligned} \tag{3.75}
$$

最後に，多様体の平行化可能性について説明する．m 次元多様体 M が至るところで 1 次独立な m 個のベクトル場を許容するとき，M は平行化可能であると呼ばれる．平行化可能多様体上では，これらの m 個のベクトル場を M 上の各点で接空間の基底とすることができる．このとき，点 p におけるベクトル $V_p \in T_pM$ と，点 q におけるベクトル $V_q \in T_qM$ が平行であるとは，この基底に対する V_p と V_q の成分が全て等しいことであると定義できる．ベクトル場は多様体上の全体で定義されるので，この平行性は p と q を結ぶ道の取り方に依らない．したがって，このとき Riemann 曲率テンソルはゼロとなる．ただし，捩率テンソルは一般にはゼロとは限らない．実際に，2.2 節の例では Riemann 曲率テンソルはゼロであるが，捩率テンソルはゼロにはなっていない．

多脚場とスピン接続

ここでは，計量テンソルが与えられた多様体上のスピノルについて考える．スピノルは，Lorentz 変換の既約表現のひとつであり，平らな Euclid 空間や Minkowski 時空においては大域的に定義される．そこで，多様体上の接空間である局所 Lorentz 系においてスピノルを定義し，接空間と多様体を結びつける多脚場を導入する．

まず，m 次元多様体 M 上の被覆 (U_i, φ_i) における点 p での座標を $x = \varphi(p)$ とする．座標 x の添え字を μ，ν，$\cdots$ を用いて表す．また，接空間における正規直交基底 $\{\theta^a = \theta^a{}_\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\}(a = 1, \cdots, m)$ を導入する．すなわち，θ_a は

$$g_p(\theta_a, \theta_b) = g_{\mu\nu}\theta_a{}^\mu \theta_b{}^\nu = \delta_{ab} \tag{3.76}$$

を満たす．$\theta_a{}^\mu$ は，局所 Lorentz 変換に対しては共変ベクトルとして変換し，一般座標変換に対しては反変ベクトルとして変換する．Euclid 空間における計量テンソル

$$\delta_{ab} = \mathrm{diag}(1, \cdots, 1) \tag{3.77}$$

の逆行列 (δ^{ab}) を用いて，

$$\theta^{a\mu} = \delta^{ab}\theta_b{}^\mu \tag{3.78}$$

のように添え字 a を上げることができる．この量は局所 Lorentz 変換に対して反変ベクトルとして変換する．$g_{\mu\nu}$ を使うと，$e^a{}_\mu$ を

$$e^a{}_\mu = g_{\mu\nu}\theta^{a\nu} \tag{3.79}$$

で定義することができる．$e^a{}_\mu$ を多脚場と呼ぶ．$\{e^a = e^a{}_\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\}(a = 1, \cdots, m)$ は余接空間の正規直交基底となる．また，Euclid 空間における計量を用いて，

$$e_{a\mu} = \delta_{ab} e^b{}_\mu \tag{3.80}$$

を定義することができる．$\theta_a{}^\mu$，$\theta^{a\mu}$，$e^a{}_\mu$，$e_{a\mu}$ の間に成り立つ関係は，

$$e^a{}_\mu e_{a\nu} = g_{\mu\nu},\ \theta_a{}^\mu \theta^{a\nu} = g^{\mu\nu}, \tag{3.81a}$$

$$e^a{}_\mu \theta_a{}^\nu = \delta^\nu_\mu, \tag{3.81b}$$

$$e_{a\mu}\theta_b{}^\mu = \delta_{ab},\ e^a{}_\mu \theta^{b\mu} = \delta^{ab}, \tag{3.81c}$$

$$e^a{}_\mu \theta_b{}^\mu = \delta^a_b \tag{3.81d}$$

となる．

次に，局所 Lorentz 系におけるスピノル場 ψ について考える．スピノル場は無限小局所 Lorentz 変換において，

$$\psi \to \psi + \delta\psi,\ \delta\psi = \frac{1}{4}\varepsilon^{ab}\gamma_{ab}\psi \tag{3.82}$$

のように変換される．γ_{ab} は，

$$\gamma_{ab} = \frac{1}{2}[\gamma_a, \gamma_b] \tag{3.83}$$

で定義している．γ_a はクリフォード代数

$$\{\gamma_a, \gamma_b\} = 2\delta_{ab} \tag{3.84}$$

を満たす．γ_{ab} は m 次元においては $2^{m/2} \times 2^{m/2}$ 行列として実現される．ε^{ab} は

$$\varepsilon^{ab} = -\varepsilon^{ba} \tag{3.85}$$

を満たす．Euclid 空間におけるベクトル場 V_a もこのパラメーターを用いて

$$\delta V_a = \varepsilon_{ab} V^b \tag{3.86}$$

のように変換される．また，スカラー場 ϕ は Lorentz 変換のもとで，

$$\delta\phi = 0 \tag{3.87}$$

である．これらをスピン行列 S_{ab} を用いて統一的に表すと，

$$\delta\Phi = \frac{1}{2}\varepsilon^{ab} S_{ab}\Phi, \tag{3.88}$$

となる．S_{ab} は次の交換関係を満たす．

$$[S_{ab}, S_{cd}] = -\delta_{ac}S_{bd} + \delta_{bc}S_{ad} + \delta_{ad}S_{bc} - \delta_{bd}S_{ac} \tag{3.89}$$

ここで，Φ はスカラー ϕ，スピノル ψ，ベクトル V_a のいずれかで，

$$S_{ab}\phi = 0, \tag{3.90a}$$

$$S_{ab}\psi = \frac{1}{2}\gamma_{ab}\psi, \tag{3.90b}$$

$$\begin{aligned}(S_{ab}V)_c &= (S_{ab})_{cd}V^d \\ &= (\delta_{ac}\delta_{bd} - \delta_{ad}\delta_{bc})V^d\end{aligned} \tag{3.90c}$$

と表される．

次に，$\partial_\mu\Phi$ の変換性について考える．ε^{ab} が x に依存しなければ，(3.88) 式と同様の変換をする．ただし，δ と ∂_μ は可換である．しかし，局所 Lorentz 変換においては，ε_{ab} は x に依存する．したがって，$\partial_\mu\Phi$ の変換性は

$$\partial_\mu(\delta\Phi) = \frac{1}{2}\varepsilon^{ab}S_{ab}\partial_\mu\Phi + \frac{1}{2}(\partial_\mu\varepsilon^{ab})S_{ab}\Phi \tag{3.91}$$

となる．

$\partial_\mu\Phi$ は Lorentz 変換に対して，既約表現としてふるまわないことに注意する．そこで，新しい接続場を導入し，新しい共変微分を定義することでこの問題を解決する．共変微分を

$$D_\mu\Phi = \partial_\mu\Phi + \frac{1}{2}\Omega^{ab}{}_\mu S_{ab}\Phi \tag{3.92}$$

で定義する．ここで，新しい接続場である**スピン接続**を $\Omega^{ab}{}_\mu$ で導入して．これは，

$$\Omega^{ab}{}_\mu = -\Omega^{ba}{}_\mu \tag{3.93}$$

を満たし，無限小局所 Lorentz 変換に対して

$$\begin{aligned}&\Omega^{ab}{}_\mu \to \Omega^{ab}{}_\mu + \delta\Omega^{ab}{}_\mu, \\ &\delta\Omega^{ab}{}_\mu = \varepsilon^a{}_c\Omega^{cb}{}_\mu + \varepsilon^b{}_c\Omega^{ac}{}_\mu - \partial_\mu\varepsilon^{ab}\end{aligned} \tag{3.94}$$

のように変換するものとする．これにより，(3.92) 式の第 2 項の変換性は

$$\begin{aligned}\delta(\frac{1}{2}\Omega^{ab}{}_\mu S_{ab}\Phi) &= \frac{1}{2}\Big((\delta\Omega^{ab}{}_\mu)S_{ab}\Phi + \Omega^{ab}{}_\mu S_{ab}(\delta\Phi)\Big) \\ &= \frac{1}{2}(\varepsilon^a{}_c\Omega^{cb}{}_\mu + \varepsilon^b{}_c\Omega^{ac}{}_\mu)S_{ab}\Phi \\ &\quad + \frac{1}{4}\Omega^{ab}{}_\mu S_{ab}\varepsilon^{cd}S_{cd}\Phi - \frac{1}{2}(\partial_\mu\varepsilon^{ab})S_{ab}\Phi\end{aligned} \tag{3.95}$$

となる．(3.89) 式を用いることにより，さらに式を整理することができる．(3.92) 式，(3.94) 式，(3.95) 式より，$D_\mu\Phi$ の変換性は

$$
\begin{aligned}
\delta(D_\mu\Phi) &= \frac{1}{2}\varepsilon^{ab}S_{ab}\left(\partial_\mu\Phi + \frac{1}{2}\Omega^{cd}{}_\mu S_{cd}\Phi\right) \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon^{ab}S_{ab}D_\mu\Phi
\end{aligned}
\tag{3.96}
$$

となり，Φ と同様の変換性を示すことが分かった．

ここで導入した D_μ は局所 Lorentz 変換に対する共変微分であり，前で定義した一般座標変換に対する共変微分 ∇_μ とは異なることに注意する．ここで，$e_{a\nu}$ に対する全共変微分 $\mathscr{D}_\mu$ を

$$
\mathscr{D}_\mu e_{a\nu} = \partial_\mu e_{a\nu} + \Omega_{ab\mu}e^b{}_\nu - \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}e_{a\lambda} \tag{3.97}
$$

で定義する．$e^a{}_\nu$ に対しては

$$
\mathscr{D}_\mu e^a{}_\nu = \partial_\mu e^a_\nu + \Omega^a{}_{b\mu}e^b{}_\nu - \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}e^a{}_\lambda \tag{3.98}
$$

となる．

ここで，多脚場仮説

$$
\mathscr{D}_\rho e_{a\nu} = \mathscr{D}_\rho e^a{}_\nu = 0 \tag{3.99}
$$

を課す．これは，(3.93) 式及び (3.94) 式と両立する．このとき，計量条件

$$
\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0 \tag{3.100}
$$

が成り立つ．これは，平行移動のもとでベクトルの内積が保たれるという条件と等価である．また，このとき (3.74) 式で与えられる捩率がゼロである条件は

$$
\mathrm{d}e^a + \Omega^{ab}\wedge e_b = 0 \tag{3.101}
$$

となる．ここで，Ω^{ab} は

$$
\Omega^{ab} = \Omega^{ab}{}_\mu \mathrm{d}x^\mu \tag{3.102}
$$

である．

3.4 ファイバー束と接続

本節では，前節で定義した多様体とその接空間などを用いて，ファイバー束を定義する．本論文でで扱うファイバー束とは，微分可能なものに限る．その後に，ファイバー束の具体例としてベクトル束やフレーム束を説明する．フレーム束は，既に 2.2 節で扱っている．次章の Berezin-Toeplitz 量子化では，2 次元球面上のスピノル束を考えることになる．

ファイバー束

はじめに，ファイバー束の定義を与える．

定義 13. **ファイバー束** (E,π,M,F,G) とは，次のものからなる．ファイバー束を $E\xrightarrow{\pi}M$ と表すこともある．

(i) 全空間と呼ばれる微分可能多様体 E

(ii) 底空間と呼ばれる微分可能多様体 M

(iii) ファイバー又は典型ファイバーと呼ばれる微分可能多様体 F

(iv) 射影と呼ばれる全射 $\pi:E\to M$．逆像 $\pi^{-1}(p)\equiv F_p\simeq F$ は点 p におけるファイバーと呼ばれる．

(v) 構造群と呼ばれる Lie 群 G．G は左から F に作用する．

(vi) M の開被覆 $\{U_i\}$，および $\pi\phi_i(p,f)=p$ を満たす微分同相写像 $\phi_i:U_i\times F\to\pi^{-1}(U_i)$．写像 ϕ_i は，ϕ_i^{-1} が $\pi^{-1}(U_i)$ を直積 $U_i\times F$ 上に写すので，局所自明化と呼ばれる．

(vii) $\phi_i(p,f)=\phi_{i,p}(f)$ とかくとき，写像は微分同相写像である．上では $t_{ij}(p)\equiv\phi_{i,p}^{-1}\circ\phi_{j,p}:F\to F$ が G の元であることを要請する．このとき，ϕ_i と ϕ_j は滑らかな写像 $t_{ij}:U_i\cap U_j\to G$ によって

$$\phi_j(p,f)=\phi_i(p,t_{ij}(p)f) \tag{3.103}$$

で関係づけられる．$\{t_{ij}\}$ は変換関数と呼ばれる．

$E\xrightarrow{\pi}M$ をファイバー束とする．このとき切断とは，滑らかな写像 $s:M\to E$ で，$\pi\circ s=\mathrm{id}_M$ を満たすものである．$s(p)=s|_p$ は $F_p=\pi^{-1}(p)$ の元である．M 上の切断の集合を $\Gamma(M,E)$ で表す．また，チャート (U_i,φ_i) 上の局所切断の集合を $\Gamma(U_i,E)$ で表す．すべてのファイバー束が大域的な切断を持つわけではないことに注意する．

ベクトル束・テンソル積束・主束

ベクトル束とは，ファイバーがベクトル空間であるファイバー束である．F を $\mathbb{R}^k$，低空間 M を m 次元多様体とする．全空間 E は $m+k$ 次元多様体であり，k をファイバー次元といい，$\dim E$ で表す．変換関数 t_{ij} はファイバーであるベクトル空間を同次元の別のベクトル空間に写すので $GL(k,\mathbb{R})$ に属する．

底空間 M を共通とする 2 つのベクトル束を $E\xrightarrow{\pi}M$，$E^{'}\xrightarrow{\pi^{'}}M$ とする．テンソル積束 $E\otimes E^{'}$ とは，各点 $p\in M$ に対して，ファイバーのテンソル積 $F_p\otimes F_p^{'}$ を対応させることにより得られるファイバー束のことである．$\{b_\alpha\}$ と $\{f_\beta\}$ をそれぞれファイバーの基底とする．$F_p\otimes F_p^{'}$ は $\{b_\alpha\otimes f_\beta\}$ によって張られる．すなわち，$\dim(E\otimes E^{'})=\dim E\times\dim E^{'}$ である．$\bigotimes^r E\equiv E\otimes\cdots\otimes E$ を E の r 回のテンソル積束とする．$\{b_\alpha\}$ を E のファイバー F の基底とすると，$\bigotimes^r E$ のファイバーは $\{b_{\alpha_1}\otimes b_{\alpha_2}\otimes\cdots b_{\alpha_r}\}$ によって張られる．

主束とは，ファイバー F が構造群 G と同一のファイバー束である．主束 $P\xrightarrow{\pi}M$ は，$P(M,G)$ とも表され，M 上の G 束と呼ばれることもある．構造群 G はファイバー F へ左から作用する

ものであるが，主束においては右からの作用も定義できる．$u \in \pi^{-1}(U_i)$，$p = \pi(u)$ に対して，局所自明化 $\phi_i : U_i \times G \to \pi^{-1}(U_i)$ が $\phi_i^{-1}(u) = (p, g_i)$ で与えられているとする．G の $\pi^{-1}(U_i)$ への右作用は，$\phi_i^{-1}(ua) = (p, g_i a)$ によって定義される．すなわち，任意の $g \in G$ と $u \in \pi^{-1}(p)$ に対して，

$$ua = \phi_i(p, g_i a) \tag{3.104}$$

である．右作用と左作用は可換であるので，この定義は局所自明化の取り方によらない．実際，$p \in U_i \cap U_j$ のとき，

$$ua = \phi_j(p, g_j a) = \phi_j(p, t_{ji}(p) g_i a) = \phi_i(p, g_i a) \tag{3.105}$$

である．したがって，右からの作用は局所自明化を明示せずに定義される．

同伴束

同じ底空間 M と変換関数 t_{ij} を持ち，異なるファイバー F 及び F' をもつ 2 つのファイバー束 $E \xrightarrow{\pi} M$ と $E' \xrightarrow{\pi'} M$ を互いに同伴するという．

例えば，2.2 節では接ベクトル束に同伴する正規直交枠束について考えた．m 次元多様体 M 上の接ベクトル束 TM は，ファイバーが M 上の点 p における接空間 T_pM である．接空間の基底を $\theta_i = \theta_i{}^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ とすると，変換関数は $SO(m)$ の元となる．一方，この接ベクトル束に同伴する正規直交枠束は，ファイバーが正規直交基底の集合 $\{\theta_i\}$ で，変換関数は再び $SO(m)$ の元となる．

主束上の接続

以下では，主束の構造群 G の Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする．ここでの接続の定義は，接空間の水平方向及び垂直方向の部分空間への分解に基づく．接続は，ある公理を満たす $\mathfrak{g}$ 値 1-形式として定義される．$\mathfrak{g}$ 値 1-形式とは，Lie 環 $\mathfrak{g}$ に値をとる 1-形式のことである．

u を主束 $P(M, G)$ の元とし，点 u における接空間を T_uP とする．また，G_p を $p = \pi(u)$ におけるファイバーとする．u において，G_p に接する T_uP の部分空間を垂直部分空間 V_pP と呼ぶ．V_pP について考える．主束への群 G の右作用 $R_{\exp(tA)}$ を

$$R_{\exp(tA)} u = u \exp(tA) \tag{3.106}$$

で定義する．ここで，$A \in \mathfrak{g}$ である．P 上の点 u を通る曲線が，この右作用によって定義される．$\pi(u) = \pi(u \exp(tA)) = p$ であるから，この曲線は G_p の内部にある．ベクトル $A^\# \in T_uP$ を

$$A^\# f(u) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\big(u \exp(tA)\big)\Big|_{t=0} \tag{3.107}$$

で定義する．ここで，f は P 上の滑らかな関数である．ベクトル $A^\#$ は u において G_p に接するので，$A^\# \in V_uP$ となる．このように，P の各点でベクトル $A^\#$ が定義され，ベクトル場が構成される．これを，A によって生成される基本ベクトル場と呼ぶ．したがって，$A \mapsto A^\#$ で与えられる写像 $\# : \mathfrak{g} \to V_uP$ 存在する．この写像が同型写像であることを示すことができる．水平部分空間 H_uP は T_uP における V_uP の補空間で，P に接続が定義されれば一意的に決まる．

以下のように，主束上の接続を与える．

定義 14. $P(M,G)$ を主束とする．P 上の**接続**とは，接空間 T_uP を垂直部分空間 V_uP と水平部分空間 H_uP へ一意的に分解し，以下の条件を満たすものである．

(i) $T_uP = H_uP \oplus V_uP$

(ii) P 上の滑らかなベクトル場 V は滑らかなベクトル場 $V^H \in H_uP$ と $V^V \in V_uP$ に分解される．

(iii) 任意の $u \in P$，$g \in G$ に対して，$H_{ug}P = R_{g^*}H_uP$ となる．ここで，R_{g^*} は右作用である．

初めに説明した通り，このような接続の具体的なものとして，**接続 1-形式**と呼ばれる Lie 環に値をもつ 1-形式 $\omega \in \mathfrak{g} \otimes T^*P$ を導入する．

定義 15. 接続 1-形式 $\omega \in \mathfrak{g} \otimes T^*P$ とは，T_uP の垂直成分 $V_uP \simeq \mathfrak{g}$ の上への射影である．射影の性質は次の条件によりまとめられる．

(i) $\omega(A^{\#}) = A, \qquad A \in \mathfrak{g}$

(ii) $R_g^*\omega = \mathrm{Ad}_{g^{-1}}\omega$
すなわち，$X \in T_uP$ に対して，

$$R_g^*\omega_u(X) = \omega_{ug}(R_{g^*}X) = g^{-1}\omega_u(X)g$$

が成り立つ．

ここで，随伴写像 Ad_g について説明しておく．G を Lie 群とし，g 及び h をその元とする．特に単位元を e とする．g に作用する随伴作用 $\mathrm{ad} : G \to G$ は，$\mathrm{ad}_g h \equiv ghg^{-1}$ で定義される．ad_g の微分は随伴写像と呼ばれ，$\mathrm{Ad}_g : T_hG \to T_{ghg^{-1}}G$ で表される．$T_eG \simeq \mathfrak{g}$ に制限すると，Ad_g はそれ自身の上への写像 $\mathrm{Ad}_g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ で，$A \mapsto gAg^{-1}$，$A \in \mathfrak{g}$ で与えられる．

水平部分空間 H_uP を ω の核

$$H_uP \equiv \{X \in T_uP | \omega(X) = 0\} \tag{3.108}$$

によって定義する．この水平部分空間は，

$$R_{g*}H_uP = H_{ug}P \tag{3.109}$$

を満たすことが示せる．ω は，定義 14 と同様に T_uP を $H_uP \oplus V_uP$ に分解するので，接続そのものである．

次に，多様体における局所接続について説明する．多様体 M 上の開被覆を $\{U_i\}$ とし，各 U_i で定義される局所切断を σ_i とする．U_i 上の $\mathfrak{g}$ 値 1-形式の局所表示 $\mathcal{A}_i$ を

$$\mathcal{A}_i \equiv \sigma_i^*\omega \in \mathfrak{g} \otimes \Omega^1(U_i) \tag{3.110}$$

で導入する．逆に，$\mathfrak{g}$ 値 1-形式の局所表示 $\mathcal{A}_i$ が与えられると，σ_i^* による引き戻しがこの $\mathfrak{g}$ 値 1-形式となるような接続 1-形式 ω を再構成できることを示せる．ω が P 上で一意的に定義されるためには，すなわち $T_uP = H_uP \oplus V_uP$ の分解が一意的であるためには，$U_i \cap U_j \neq \emptyset$ 上で $\omega_i = \omega_j$ とならなければならない．このとき，一意的な 1-形式 ω が $\omega|_{U_i} = \omega_i$ により P 全体で定義される．この条件を満たすために，$\mathfrak{g}$ 値 1-形式 ω の局所表示 $\mathcal{A}_i$ は，共通部分をもつ 2 つの被覆を移り合う際に，特別な変換則を満たさなければならない．これをみるために，以下のような補題を用いる．

補題
主束 $P(M,G)$ 上の被覆 U_i と U_j における局所切断を σ_i と σ_j とする．ただし，$U_i\cap U_j\neq\emptyset$ とし，p をこの共通部分上の点とする．このとき，$X\in T_pM$ に対して，$\sigma_{i*}X$ と $\sigma_{j*}X$ は

$$\sigma_{j*}X=R_{t_{ij}*}(\sigma_{i*}X)+(t_{ij}^{-1}\mathrm{d}t_{ij}(X))^{\#}$$

を満たす．ただし，$t_{ij}:U_i\cap U_j\to G$ は変換関数である．

これを，接続 1-形式 ω に適用すると以下のような結果を得る．

$$\begin{aligned}\sigma_j^*\omega(X)&=\omega(\sigma_{j*}X)\\&=\omega\bigl(R_{t_{ij}*}(\sigma_{i*}X)+(t_{ij}^{-1}\mathrm{d}t_{ij}(X))^{\#}\bigr)\\&=R_{t_{ij}}^*\omega(\sigma_{i*}X)+t_{ij}^{-1}\mathrm{d}t_{ij}(X)\\&=t_{ij}^{-1}\omega(\sigma_{i*}X)t_{ij}+t_{ij}^{-1}\mathrm{d}t_{ij}(X)\\&=t_{ij}^{-1}\sigma_i^*\omega(X)t_{ij}+t_{ij}^{-1}\mathrm{d}t_{ij}(X).\end{aligned}\tag{3.111}$$

ここで，定義 15 の公理を用いている．上の式は任意の X について成立するので，

$$\mathcal{A}_j=t_{ij}^{-1}\mathcal{A}_it_{ij}+t_{ij}^{-1}\mathrm{d}t_{ij}\tag{3.112}$$

を得る．これが $\mathfrak{g}$ 値 1-形式の局所表示が満たさなければならない条件である．逆に，開被覆 $\{U_i\}$ と局所切断 $\{\sigma_i\}$ と (3.112) 式を満たす局所表示 $\{\mathcal{A}_i\}$ が与えられると，P 上の接続 1-形式 ω を再構成することができる．ゲージ理論では，$\mathcal{A}_i$ はゲージ・ポテンシャル (Yang-Mills ポテンシャル) と同一視される．

主束 $P(M,G)$ の同伴束の上の共変微分は，P 上の接続 1-形式を用いて自然に定義される．3.3 節で説明したアフィン接続やスピン接続は，主束上の接続から定義される共変微分に現れるものと解釈される．

3.5 Atiyah-Singer の指数定理

本節では，Dirac 作用素を導入し，次章以降で必要となる捻じれスピン複体に対する Atiyah-Singer の指数定理を説明する．

Dirac 作用素

向き付け可能な m 次元多様体 M 上のスピノル束 $\boldsymbol{S}$ を考える．この束の切断全体の集合を $\Delta(M)=\Gamma(M,\boldsymbol{S})$ と表すことにする．ただし，m は偶数とし，$m=2\ell$ とおく．スピン群 $\mathrm{Spin}(m)$ は，m 個の Dirac 行列 $\{\gamma^a\}$ で生成される．γ^a は，各成分を複素数とする $2^\ell\times2^\ell$ 行列で表される．この Dirac 行列は，以下の関係式を満たす．

$$\begin{aligned}\gamma^{a\dagger}&=\gamma^a,\\\{\gamma^a,\gamma^b\}&=2\delta^{ab}.\end{aligned}\tag{3.113}$$

Clifford 代数は以下の $m+1$ 個の行列

$$1;\gamma^a;\gamma^{a_1}\gamma^{a_2};\gamma^{a_1}\cdots\gamma^{a_k};\gamma^{a_1}\cdots\gamma^{a_m}\tag{3.114}$$

で生成される．ただし $a_1 < a_2 < \cdots < a_k \cdots < a_m$ としている．特に重要な生成元として，$m+1$ 番目の行列を

$$\gamma^{m+1} \equiv \mathrm{i}^{\ell} \gamma^1 \cdots \gamma^m \tag{3.115}$$

と定義する．ここで，γ^{m+1} は次の 2 つの関係式を満たす．ただし以下では，単位行列を行列のサイズに関係なく $\mathbb{1}$ と表すため，行列のサイズについてはそれぞれの式で注意されたい．

$$(\gamma^{m+1})^2 = \mathbb{1},\ (\gamma^{m+1})^{\dagger} = \gamma^{m+1} \tag{3.116}$$

を満たす．便利のために γ^{m+1} が

$$\gamma^{m+1} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \tag{3.117}$$

と対角化されるような $\{\gamma^a\}$ の表現行列を選んでおく．ただし，ここでの $\mathbb{1}$ は $2^{\ell-1} \times 2^{\ell-1}$ 単位行列である．

Dirac スピノル $\psi \in \Delta(M)$ は，Clifford 代数の既約表現であるが，Spin(2ℓ) の既約表現ではない．Spin(2ℓ) の既約表現は，γ^{m+1} を固有値にしたがって分解することによって得られる．$(\gamma^{m+1})^2 = \mathbb{1}$ より，γ^{m+1} の固有値は ± 1 で，この固有値はカイラリティと呼ばれる．このとき，$\Delta(M)$ は 2 つの固有空間

$$\Delta(M) = \Delta^{+}(M) \oplus \Delta^{-}(M) \tag{3.118}$$

に分解される．ここで，$\psi^{\pm} \in \Delta^{\pm}(M)$ に対して

$$\gamma^{m+1}\psi^{\pm} = \pm\psi^{\pm} \tag{3.119}$$

である．$\Delta^{\pm}$ の上への射影作用素 $\mathcal{P}^{\pm}$ を

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{+} &\equiv \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \gamma^{m+1}) = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{P}^{-} &\equiv \frac{1}{2}(\mathbb{1} - \gamma^{m+1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.120}$$

のように定義する．したがって，

$$\psi^{+} = \begin{pmatrix} \tilde{\psi}^{+} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \psi^{-} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\psi}^{-} \end{pmatrix} \tag{3.121}$$

のように表すことができる．

曲がった空間の Dirac 作用素 $\mathrm{i}\nabla\!\!\!/ : \Delta(M) \to \Delta(M)$ は

$$\mathrm{i}\nabla\!\!\!/ \equiv \mathrm{i}\gamma^{\mu}(\partial_{\mu} + \Omega_{\mu}) \tag{3.122}$$

で与えられる．ここで，$\partial_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$ であり，x^{μ} は局所座標である．$\Omega_{\mu} = \frac{1}{4}\Omega^{ab}{}_{\mu}\gamma_a\gamma_b$ はスピン接続であり，$\gamma^{\mu} \equiv \gamma^a \theta_a{}^{\mu}$ である．

$\{\gamma^a\}$ は，次のような形をとる．

$$\gamma^a = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i}\alpha_a \\ -\mathrm{i}\alpha_a^{\dagger} & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.123}$$

Dirac 作用素は

$$\mathrm{i}\nabla\!\!\!/ = \begin{pmatrix} 0 & D^\dagger \\ D & 0 \end{pmatrix} \tag{3.124}$$

となる．このとき，

$$D \equiv \bar{\alpha}^a \theta_a{}^\mu(\partial_\mu + \Omega_\mu), \qquad D^\dagger \equiv -\alpha^a \theta_a{}^\mu(\partial_\mu + \Omega_\mu) \tag{3.125}$$

と定義している．Dirac 作用素は，ψ^+，ψ^- に対してそれぞれ，

$$\mathrm{i}\nabla\!\!\!/\psi^+ = \begin{pmatrix} 0 & D^\dagger \\ D & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{\psi}^+ \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ D\tilde{\psi}^+ \end{pmatrix} \tag{3.126}$$

及び

$$\mathrm{i}\nabla\!\!\!/\psi^- = \begin{pmatrix} 0 & D^\dagger \\ D & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{\psi}^- \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D^\dagger\tilde{\psi}^- \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.127}$$

のように作用する．したがって，$D = \mathrm{i}\nabla\!\!\!/\mathcal{P}^+ : \Delta^+(M)\to\Delta^-(M)$ 及び $D^\dagger = \mathrm{i}\nabla\!\!\!/\mathcal{P}^- : \Delta^-(M)\to\Delta^+(M)$ である．こうして 2 項複体

$$\Delta^+(M) \underset{\xleftarrow{D^\dagger}}{\xrightarrow{D}} \Delta^-(M) \tag{3.128}$$

が得られる．これを**スピン複体**と呼ぶ．この複体の指数は，

$$\mathrm{ind}D = \dim\ker D - \dim\ker D^\dagger = \nu_+ - \nu_- \tag{3.129}$$

である．ここで ν_+，ν_- はそれぞれカイラリティ$+$，$-$ のゼロ・モードの個数である．

Atiyah-Singer の指数定理

スピノル場はある群 G の表現 ρ に属する．G の表現 ρ に属するスピノル場は，テンソル積束 $\boldsymbol{S}\otimes E$ の切断である．このテンソル積束の底空間は M である．E は ρ の表現空間をファイバーとする $P(M,G)$ の同伴束である．この場合，Dirac 作用素 $D_E : \Gamma^+(\boldsymbol{S}\otimes E) \to \Gamma^-(\boldsymbol{S}\otimes E)$ は

$$D_E = \mathrm{i}\gamma^a \theta_a{}^\mu(\partial_\mu + \Omega_\mu + \mathcal{A}_\mu)\mathcal{P}_+ \tag{3.130}$$

である．ここで，$\mathcal{A}_\mu$ は E 上のゲージ接続である．このとき，(3.128) 式と同様に複体が定義され，これを捻じれスピン複体と呼ぶ．2 次元の捻じれスピン複体に対する **Atiyah-Singer の指数定理**は

$$\nu_+ - \nu_- = \int_M \mathrm{ch}_1(E) = \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_M \mathrm{tr}\mathcal{F} \tag{3.131}$$

である．ここで，$\mathcal{F} = \mathrm{d}\mathcal{A} + \mathcal{A}\wedge\mathcal{A}$ である．$\mathrm{ch}_1(E)$ は 1 次 Chern 指標である．j 次の Chern 指標は，

$$\mathrm{ch}_j(E) \equiv \frac{1}{j!}\mathrm{tr}\left(\frac{\mathrm{i}\mathcal{F}}{2\pi}\right)^j \tag{3.132}$$

である．

第4章　単位球面における行列幾何

本章では，単位球面 S^2 に対する行列による幾何の記述をレビューする．4.1 節では，S^2 にコヒーレント状態法を適用する [8,17]．4.2 節では，S^2 に Berezin-Toeplitz 量子化を適用し，4.1 節で得られる波動関数が Berezin-Toeplitz 量子化で得られる波動関数と一致していることを確かめる．また，行列サイズが無限大の極限でコヒーレント状態法のエルミート行列と Toeplit 演算子が一致することを示す [17,18].

4.1　コヒーレント状態法

本節では単位球面 S^2 におけるコヒーレント状態法をレビューする．本論文では，Dirac タイプ演算子をベースにした方法を用いる [4]．まず，非可換球面を与える行列から，球面が得られることを示す．また，Dirac タイプ演算子の波動関数を求める．

コヒーレント状態法とは，非可換空間を定義する有限のサイズのエルミート行列からその行列が表す多様体の幾何を取り出す方法である．このエルミート行列から Dirac タイプ演算子を定義する．行列が表す多様体は，この演算子のカーネルを与える座標の集合として記述される．

$\mathbb{R}^3$ に埋め込まれた 2 次元曲面について考える．まず，$N\times N$ エルミート行列のセット $\{X^i\}(i=1,2,3)$ を定義する．この行列から幾何を引き出すために，以下ように Dirac タイプ演算子を定義する．

$$\not{D}(y) = \sigma^i \otimes (X^i - y^i \mathbb{1}_N)\ . \tag{4.1}$$

ここで，σ^i は Pauli 行列である．y^i は $\mathbb{R}^3$ への埋め込み座標であり，行列が表す多様体上の座標である．この Dirac タイプ演算子のゼロモードとなる波動関数を $|\phi(y)\rangle$ とすると，以下の方程式が得られる．

$$\not{D}(y)\,|\phi(y)\rangle = \sigma^i \otimes (X^i - y^i \mathbb{1}_N)\,|\phi(y)\rangle = 0\ . \tag{4.2}$$

(4.2) 式が解をもつときの y^i の集合が多様体を定める．

ここでは，先行研究で扱われている非可換球面をレビューする．非可換球面を与えるエルミート行列 X^i を $SU(2)$ 生成子の spin-J 既約表現 L^i を用いて

$$X^i = RL^i \tag{4.3}$$

のように表す．ここで，R は定数とする．また，エルミート行列 X^i の行列サイズは $N=2J+1$ で与えられている．このエルミート行列 X^i は,

$$(X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2 = R^2 \frac{N^2-1}{4} \mathbb{1}_N \tag{4.4}$$

[4] コヒーレント状態法には，ハミルトニアンタイプ演算子 $H(y)=\frac{1}{2}(X^i - y^i\mathbb{1}_N)^2$ をベースとした方法もある．

の関係式を満たしている．また，エルミート行列 X^i は交換関係

$$[X^i, X^j] = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk} R X^k \tag{4.5}$$

も満たしている．以上から，2.3 節でも述べたように，行列 X^i が非可換球面を表していることが分かる．非可換球面の半径は $R\frac{\sqrt{N^2-1}}{2}$ である．行列のサイズを $N \to \infty$ としたとき，$R \sim \mathcal{O}(1/N)$ であれば有限な半径をもつ可換な球面を得る．

Dirac タイプ演算子のゼロモードに対する方程式は，

$$\not{D}(y)\,|\psi(y)\rangle = \sigma^i \otimes (RL^i - y^i \mathbb{1}_N)\,|\psi(y)\rangle = 0 \tag{4.6}$$

である．(4.6) 式の解は以下であることが示されている．ここで s は単位球面上の座標である．

$$|\psi_J(s)\rangle = (U_2 \otimes U_N)\Big|\frac{1}{2}, +\Big\rangle \otimes |J, J\rangle\,. \tag{4.7}$$

いま，$J = 1/2$ の場合の固有状態は簡単のために $|\frac{1}{2}, \pm\rangle := |\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\rangle$ という記法を用いていることに注意する．$|J, J\rangle$ 及び $|\frac{1}{2}, \pm\rangle$ は (2.92) 式及び (2.93) 式で定義されている．

ここで，ユニタリ行列 U_2 と U_N について言及しておく．はじめに，一般の方向を指す球面上の単位ベクトル s を北極を指す単位ベクトル $\hat{n}$ へ変換する $SO(3)$ 回転の表現行列 Λ を

$$s = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \Lambda^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\ , \tag{4.8}$$

$$\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

のように導入する．ここで，球面上の点を極座標 (θ, ϕ) で表す．いま，$SU(2)$ 生成子の既約表現の表現行列 L_i へこの回転がどのように作用するかを考える．Lie 代数の生成子の表現行列が不変テンソルであることから，ベクトルの添字の回転を元に戻すユニタリ変換が存在する．つまり，以下のような関係式を満たすユニタリ行列 U_N が存在する．

$$U_N^\dagger L_i U_N = (\Lambda^{-1})_{ij} L_j\ . \tag{4.10}$$

U_2 については，この式において $N = 2$ を入れると得られる．すなわち，以下の式を満たす．

$$U_2^\dagger \frac{\sigma_i}{2} U_2 = (\Lambda^{-1})_{ij} \frac{\sigma_j}{2}\ . \tag{4.11}$$

本論文では，このようなユニタリ行列の具体的な表現として以下を用いることにする．

$$U_N = e^{zL^-} e^{-L^3 \log(1+|z|^2)} e^{-\bar{z}L^+}\ . \tag{4.12}$$

ここで，球面上の立体射影座標 $(z,\bar{z})$ は極座標 (θ,ϕ) を用いて

$$z=\tan\frac{\theta}{2}e^{\mathrm{i}\phi}\ ,\ \bar{z}=\tan\frac{\theta}{2}e^{-\mathrm{i}\phi} \tag{4.13}$$

のように導入している．ユニタリ行列 $U(U_2$ または $U_N)$ は，以上の性質を満たすものを用いることにする．

ここからは，波動関数 (4.7) 式が実際に方程式 (4.6) の解になっていることを確かめてみる．まずは，この方程式に左から $(U_2^\dagger\otimes U_N^\dagger)$ をかけてみる．これは，以下の計算からもわかるように座標 s を北極 $\hat{n}$ に持っていく操作に対応している．

$$\begin{aligned}
&(U_2^\dagger\otimes U_N^\dagger)\ \sigma^i\otimes(RL^i-s^i\mathbb{1}_N)\,|\psi(s)\rangle\\
&=(U_2^\dagger\otimes U_N^\dagger)\ \sigma^i\otimes(RL^i-s^i\mathbb{1}_N)(U_2\otimes U_N)\Big|\frac{1}{2},+\Big\rangle\otimes|J,J\rangle\\
&=\sigma^i\otimes(RL^i-(\Lambda^{-1})_j{}^i s^j\mathbb{1}_N)\Big|\frac{1}{2},+\Big\rangle\otimes|J,J\rangle\\
&=\Big(\frac{R}{2}(\sigma^+\otimes L^-+\sigma^-\otimes L^+)+R\sigma^3\otimes L^3-\sigma^3\otimes\mathbb{1}_N\Big)\Big|\frac{1}{2},+\Big\rangle\otimes|J,J\rangle\\
&=(RJ-1)\Big|\frac{1}{2},+\Big\rangle\otimes|J,J\rangle\ .
\end{aligned} \tag{4.14}$$

途中計算で (4.8) 式及び (4.10) 式，(4.11) 式を用いた．この結果から，$R=1/J$ ならばこの波動関数は解となることが分かる．したがって，非可換球面を与える行列が単位球面全体を記述することが分かった．

4.2 Berezin-Toeplitz 量子化

本節では単位球面 S^2 に対する Berezin-Toeplitz 量子化をレビューする．まず，Dirac 演算子を定義し，カーネルの基底となる波動関数を求める．このような基底は有限個存在している．S^2 上の滑らかな関数から，カーネルの次元をサイズとする行列への写像が得られる．このようにして得られる行列を Toeplit 演算子と呼ぶ．ここでは，S^2 から $\mathbb{R}^3$ への埋め込み座標 x^i に対する Toeplitz 演算子 $T_p(x^i)$ が，非可換球面を与える行列に一致することを確かめる．また，2.1 節で得られた波動関数が Berezin-Toeplitz 量子化で得られる波動関数と一致していることを確認する．最後に，コヒーレント状態法で得られた波動関数から Berry 接続を計算する．

球面に対する Berezin-Toeplitz 量子化を行うために，幾何的構造を定義する．S^2 上のスピノル束を $\boldsymbol{S}$ とする．$\boldsymbol{S}$ におけるファイバーはスピノル空間で，切断はスピノル場となる．次に，ゲージ接続 A と曲率 2-形式 F をもつ S^2 上の主 $U(1)$ 束を $\boldsymbol{P}$ とする．ここでの F は，(3.131) 式に現れる $\mathcal{F}$ と $F=\mathrm{i}\mathcal{F}$ の関係にある．この束のファイバーは $U(1)$ である．群 $U(1)$ の既約表現として，$\rho_p:U(1)\to GL(1,\mathbb{C})$ を $\rho_p(e^{\mathrm{i}\theta})=e^{\mathrm{i}p\theta}$ で定義する．ここで，$\theta\in\mathbb{R}$ 及び $p\in\mathbb{N}$ である．この ρ_p を用いて，$\boldsymbol{P}$ に同伴する複素直線束を $\boldsymbol{L_p}$ で定義する．以上から，S^2 上のツイストされたスピノル束 $\boldsymbol{S}\otimes\boldsymbol{L_p}\simeq\boldsymbol{S}\otimes\boldsymbol{L_1}^{\otimes p}$ について考える．この束の底空間は S^2 で，ファイバーはスピノル空間と $\mathbb{C}$ のテンソル積で与えらる．S^2 上の切断であるスピノル場の内積を以下で定義する．ここで 2 つのスピノル場を $\psi,\psi'\in\Gamma(\boldsymbol{S}\otimes\boldsymbol{L_p})$ とし，ω を S^2 の体積形式とする．ω の具体的な形は (4.22) 式で導入する．

$$(\psi,\psi')=\int_{S^2}\omega\ \psi^\dagger\psi'. \tag{4.15}$$

$\Gamma(\boldsymbol{S}\otimes\boldsymbol{L_p})$ 上の Dirac 演算子を定義するために以下を準備する．$\mathbb{R}^3$ に埋め込まれた S^2 を考え，その埋め込み座標を直交座標 x^i とする．$i=1,2,3$ である．x^i は以下の式を満たす．

$$(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2=1\ . \tag{4.16}$$

立体射影座標 $(z,\bar{z})$ で球面上の点を表すために，南極から x^1-x^2 平面へ射影する座標を

$$z=\frac{x^1+\mathrm{i}x^2}{1+x^3} \tag{4.17}$$

で定義する．ただし，南極点は除いている．この座標のみでは球面全体を定義できないため，北極から x^1-x^2 平面へ射影するもう 1 つの開被覆を用意し，座標を w とする．これらの座標は $z=1/w$ のように関係している．立体射影座標 $(z,\bar{z})$ より，S^2 の計量テンソルは

$$g_{z\bar{z}}=g_{\bar{z}z}=\frac{2}{(1+|z|^2)^2} \tag{4.18}$$

のように表される．ここで，$|z|^2=z\bar{z}$ としている．底空間である球面上の局所 Lorentz 計量は Euclid 計量 δ_{ab} を用いる．この局所座標に対する添え字を $a,b,\cdots$ で表す．ただし，$a=1,2$ である．計量 (4.18) 式を与える最も簡単な 2 脚場を

$$\begin{aligned} e^1&=\frac{dz+d\bar{z}}{1+|z|^2}\ ,\\ e^2&=\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{dz-d\bar{z}}{1+|z|^2} \end{aligned} \tag{4.19}$$

ととる．この 2 脚場に双対な正規直交フレームは以下の通りである．

$$\begin{aligned} \theta_1&=\frac{1}{2}(1+|z|^2)(\partial_z+\partial_{\bar{z}})\ ,\\ \theta_2&=\frac{\mathrm{i}}{2}(1+|z|^2)(\partial_z-\partial_{\bar{z}})\ . \end{aligned} \tag{4.20}$$

捩率がゼロとなる条件により，局所 Lorentz 変換のスピン接続 ${\Omega^1}_2$ が得られる．

$${\Omega^1}_2=-\mathrm{i}\frac{\bar{z}dz-zd\bar{z}}{1+|z|^2}\ . \tag{4.21}$$

ここで，体積形式を以下のように定義する．

$$\omega=\mathrm{i}\sqrt{|\det\,g|}dz\wedge d\bar{z}\ . \tag{4.22}$$

球面全体で ω を積分すると球の表面積

$$\int_{S^2}\omega=4\pi \tag{4.23}$$

を得る．いま，$F=\mathrm{d}A=2\pi\omega/4\pi$ となるゲージ接続 A について考える．ここで，1 次の Chern 指標の積分値は

$$\frac{1}{2\pi}\int_{S^2}F=1 \tag{4.24}$$

となっていることに注意しよう．$U(1)$ ゲージ接続 A として Wu-Yang モノポール配位を選ぶ．

$$A=-\frac{\mathrm{i}}{2}\ \frac{\bar{z}dz-z\bar{z}}{1+|z|^2}. \tag{4.25}$$

これらより $\Gamma(\boldsymbol{S}\otimes\boldsymbol{L_p})$ 上の Dirac 演算子が以下のように定義できる．

$$D=\mathrm{i}\gamma^a\theta_a{}^\mu\left(\partial_\mu+\frac{1}{4}\Omega^{bc}{}_\mu\gamma_b\gamma_c-\mathrm{i}pA_\mu\right). \tag{4.26}$$

ここで，$\mu=z,\bar{z}$ 及び $a=1,2$ で和をとっている．$\gamma_a=\sigma_a$ で，σ_a は Pauli 行列である．この Dirac 演算子は以下のように分解することができる．

$$D=\begin{pmatrix}0 & D_- \\ D_+ & 0\end{pmatrix}. \tag{4.27}$$

ここで，D_+ と D_- は以下である．

$$D_-=\mathrm{i}\left\{(1+|z|^2)\partial_z-\frac{p+1}{2}\bar{z}\right\}, \tag{4.28}$$

$$D_+=\mathrm{i}\left\{(1+|z|^2)\partial_{\bar{z}}+\frac{p-1}{2}z\right\}. \tag{4.29}$$

Dirac 演算子のゼロモードに対する方程式 $D_\pm\psi^\pm=0$ を解く．その解は反正則関数，正則関数をそれぞれ $h^-(\bar{z})$，$h^+(z)$ で導入すると

$$\psi^-=(1+|z|^2)^{\frac{p+1}{2}}h^-, \tag{4.30}$$

$$\psi^+=(1+|z|^2)^{-\frac{p-1}{2}}h^+ \tag{4.31}$$

のように得られる．積分 $\int_{S^2}\omega|\psi^-|^2$ は，$p\geq 1$ の範囲で $h^-=0$ であるときのみ収束することから，D_- に対するカーネルは無いことが分かる．一方で ψ^+ の積分では，h^+ の次数が p よりも小さいとき収束している．そのような h^+ は z のべき乗で展開し $(p-1)$ 次の正則な多項式で表すことができる．したがって，Dirac 演算子のカーネルは D_+ から与えられ，その次元は $N=p$ である．これは確かに，指数定理から得られる結果と一致する．Dirac 演算子のゼロモードは以上の条件以外は任意であるので，ここでは $SU(2)$ 生成子の $(2J+1)$ 次元既約表現の基底 (2.92) 式と Bloch コヒーレント状態を用いて次の式のように書くことにする．

$$\psi_n(z,\bar{z})=\sqrt{\frac{p}{4\pi}}\begin{pmatrix}\langle J,J-n|z\rangle \\ 0\end{pmatrix}, \tag{4.32}$$

$$|z\rangle=\frac{1}{(1+|z|^2)^J}\sum_{m=0}^{2J}z^m\binom{2J}{m}^{\frac{1}{2}}|J,J-m\rangle. \tag{4.33}$$

ここで，$J=(p-1)/2$ である．波動関数 $\psi_n(z,\bar{z})$ は内積 (4.15) 式のもとで，規格化された正規直交基底をなしている．

このようにして得られる Berezin-Toeplitz 量子化における波動関数と 4.1 節のコヒーレント状態法から得られる波動関数 (4.7) 式を比較してみよう．4.1 節での波動関数に対して，以下のような局所 Lorentz 変換を作用させる．

$$|\psi_J(s)\rangle' = U_2^\dagger \otimes \mathbb{1}_N |\psi_J(s)\rangle = \begin{pmatrix} U_N |J, J\rangle \\ 0 \end{pmatrix} . \tag{4.34}$$

U_N は (4.12) 式で与えているので，$|J, J\rangle$ に作用させるとコヒーレント状態 (4.33) が得られ，2 つの波動関数は一致していることが分かる．

上記の波動関数と内積より，Toeplitz 演算子を定義することができる．

$$\hat{f}_{mn} = (\psi_n, f\psi_m) = \frac{p}{4\pi} \int_{S^2} \omega \langle J, J-m|z\rangle f(z, \bar{z}) \langle z|J, J-n\rangle , \tag{4.35}$$

式からもわかるように，これは関数空間から有限次元行列への写像になっている．いま，具体例として S^2 から $\mathbb{R}^3$ への埋め込み座標 x^i についての Toeplitz 演算子を計算する．簡単のために以下を利用する．

$$\begin{aligned} x^+ &= \frac{2z}{1+|z|^2} , \\ x^- &= \frac{2\bar{z}}{1+|z|^2} , \\ x^3 &= \frac{1-|z|^2}{1+|z|^2} . \end{aligned} \tag{4.36}$$

その結果はこのように得られる．

$$\begin{aligned} T_p(x^+)_{mn} &= \frac{2}{p+1} \sqrt{n(p-n)}\, \delta_{m,n-1} , \\ T_p(x^-)_{mn} &= \frac{2}{p+1} \sqrt{(n+1)(p-n-1)}\, \delta_{m,n+1} , \\ T_p(x^3)_{mn} &= \frac{2(\frac{p-1}{2} - n)}{p+1}\, \delta_{m,n} . \end{aligned} \tag{4.37}$$

一方，$SU(2)$ 生成子の $(2J+1)$ 次元既約表現の基底について成り立つ (2.93) 式を用いて得られる結果を以下に示しておく．

$$\begin{aligned} \langle J, J-m|L^+|J, J-n\rangle &= \sqrt{n(2J-n+1)} , \\ \langle J, J-m|L^-|J, J-n\rangle &= \sqrt{(n+1)(2J-n)} , \\ \langle J, J-m|L^3|J, J-n\rangle &= J-n . \end{aligned}$$

これらの結果から，S^2 から $\mathbb{R}^3$ への埋め込み座標に対する Toeplitz 演算子 (4.37) 式はコヒーレント状態法において球面を与える行列 (4.3) 式に一致している．

$$T_p(x^i) = \frac{L^i}{J+1} . \tag{4.38}$$

2.1 節では $X^i = L^i/J$ であったが，$J \to \infty$ すなわち行列サイズが $N \to \infty$ で $T_p(x^i) = X^i$ になっていることが分かる．このとき，この行列が表す非可換球面は，可換な単位球面に対応し

ている．

次に，4.1 節で得られた波動関数を用いて Berry 接続を計算する．まず，$dU_N(y)\,|J,J\rangle$ を計算すると，

$$\begin{aligned} dU_N(y)\,|J,J\rangle &= J\frac{\bar{z}dz - zd\bar{z}}{1+|z|^2}U_N(y)\,|J,J\rangle \\ &\quad + \sqrt{2J}\frac{dz}{1+|z|^2}U_N(y)\,|J,J-1\rangle \end{aligned} \tag{4.39}$$

を得る．これより，Berry 接続は

$$\begin{aligned} A &= -\,\mathrm{i}\,\langle\psi_J|d|\psi_J\rangle \\ &= -\,\mathrm{i}\,\frac{N}{2}\frac{\bar{z}dz - zd\bar{z}}{1+|z|^2} \end{aligned} \tag{4.40}$$

となる．これは，球面の Berezin-Toeplitz 量子化におけるゲージ接続 (チャージ p も含めた) となっていることが分かる．

第 5 章　回転楕円面における行列幾何

前章では球面 S^2 についてのコヒーレント状態法と Berezin-Toeplitz 量子化をレビューした．本章では，S^2 に行ったことを回転楕円面 E(ellipsoid) に発展させる．回転楕円面の例として単位球面が 3 軸方向に引き伸ばされた曲面を考える．5.1 節では E にコヒーレント状態法を適用する．波動関数を求め，行列がどのような多様体を表すかを調べる．5.2 節では，E に Berezin-Toeplitz 量子化を適用する．3 軸方向への引き伸ばしが十分小さい場合の摂動論を考え，波動関数と Toeplit 演算子を計算する．さらに，回転楕円面の場合でもこれら 2 つの方法から得られる波動関数が一致していることを示す．また，コヒーレント状態法の行列と Toeplitz 演算子が $J \to \infty$ の極限で一致することを示す．本章は [20] に基づく．

5.1　コヒーレント状態法

本節では回転楕円面 E に Dirac タイプ演算子をベースにしたコヒーレント状態法を適用する．まず，非可換回転楕円面を定義する行列から，回転楕円面が得られることを示す．次に，Dirac タイプ演算子のカーネルの基底となる波動関数を求める．回転楕円面に対するコヒーレント状態法は [10] でも研究された．

非可換回転楕円面に対してコヒーレント状態法を適用する．簡単のため，非可換回転楕円面として球面が 3 軸方向にのみ引き伸ばされたものを考える．まず，非可換回転楕円面を表す $N \times N$ エルミート行列のセット $\{X^i\}(i = 1, 2, 3)$ を $SU(2)$ 生成子の spin-J 既約表現 L^i を用いて，

$$X^1 = RL^1\ ,\ X^2 = RL^2\ ,\ X^3 = \lambda RL^3 \tag{5.1}$$

のように定義する．行列サイズは $N = 2J + 1$ のように関係している．このように与えたエルミート行列 X^i は，以下の関係式を満たしている．

$$(X^1)^2 + (X^2)^2 + \left(\frac{X^3}{\lambda}\right)^2 = R^2 \frac{N^2 - 1}{4}\ . \tag{5.2}$$

$N \to \infty$ のとき $R \sim \mathcal{O}(1/N)$ であれば，有限なサイズをもつ可換な回転楕円面を得ることが分かる．

以下では 3 軸方向への引き伸ばしが十分小さい場合について考える．すなわち，$\lambda^2 - 1 = \mu$ とおくと，$\mu \ll 1, \lambda \simeq 1$ である．以降は μ についての摂動論を展開する．Dirac タイプ演算子は以下のように与えられる．

$$\not{D}(y) = \sigma^i \otimes (RL^i - y^i \mathbb{1}_N) + \frac{1}{2}\mu\sigma^3 \otimes RL^3\ . \tag{5.3}$$

この演算子は非可換球面の場合と比べ，$\mathcal{O}(\mu)$ だけ異なる．そこで，この Dirac タイプ演算子のゼロモードを与える波動関数を非可換球面で得られる波動関数に $\mathcal{O}(\mu)$ のずれが加わった形で定

義してみる．ゼロモードの集合が表す多様体上の座標を $y^i = s^i + \mu\alpha^i$ とする．したがって波動関数は，

$$|\psi_J(s+\mu\alpha)\rangle = (U_2 \otimes U_N)\Big|\frac{1}{2},+\Big\rangle \otimes |J,J\rangle + \mu(U_2 \otimes U_N)\,|\chi\rangle \tag{5.4}$$

である．この波動関数に Dirac タイプ演算子を作用させると，以下のような方程式を得る．

$$\begin{aligned}0 =& -\mu\sigma^i \otimes \alpha^i\Big((U_2 \otimes U_N)\Big|\frac{1}{2},+\Big\rangle \otimes |J,J\rangle\Big)\\ &+ \frac{1}{2}\mu\sigma^3 \otimes RL^3(U_2 \otimes U_N)\Big|\frac{1}{2},+\Big\rangle \otimes |J,J\rangle\\ &+ \mu\sigma^i \otimes RL^i(U_2 \otimes U_N)\,|\chi\rangle - \mu\sigma^i \otimes s^i(U_2 \otimes U_N)\,|\chi\rangle\ .\end{aligned} \tag{5.5}$$

以下では，この方程式を解くことで，球面上の座標 s^i からのずれ $\mu\alpha^i$ と波動関数のずれ $\mu(U_2 \otimes U_N)\,|\chi\rangle$ を求める．

まず，(5.5) 式の各項に $(U_2^\dagger \otimes U_N^\dagger)$ を左からかけると，

$$\begin{aligned}0 =& -\sigma^i \otimes \tilde{\alpha}^i\Big|\frac{1}{2},+\Big\rangle \otimes |J,J\rangle + \frac{1}{2}(\Lambda^1)_{3j}(\Lambda^1)_{3k}\sigma^j \otimes RL^k\Big|\frac{1}{2},+\Big\rangle \otimes |J,J\rangle\\ &+ \sigma^i \otimes RL^i\,|\chi\rangle - \sigma^3 \otimes \mathbb{1}\,|\chi\rangle\end{aligned} \tag{5.6}$$

を得る．ここで，$\tilde{\alpha}^i$ は

$$\tilde{\alpha}^i = \Lambda_{ij}\alpha^j \tag{5.7}$$

のように導入した．Λ は (4.9) 式で定義した行列である．スピン 1/2 表現とスピン J 表現のテンソル表現の積を考える．この表現での生成子は

$$J^i = \frac{1}{2}\sigma^i \otimes \mathbb{1}_N + \mathbb{1}_2 \otimes L^i \tag{5.8}$$

となる．$|\chi\rangle$ をこのテンソル表現の既約成分における標準的な基底で表すと，

$$|\chi\rangle = \sum_{n=0}^{2J+1} a_n\Big|J+\frac{1}{2}, J+\frac{1}{2}-n\Big\rangle + \sum_{n=0}^{2J-1} b_n\Big|J-\frac{1}{2}, J-\frac{1}{2}-n\Big\rangle\ . \tag{5.9}$$

この基底はさらに $\sigma^i/2$ と L^i の基底のテンソル積で表すと

$$\begin{aligned}\Big|J+\frac{1}{2}, J+\frac{1}{2}-n\Big\rangle &= \sqrt{\frac{2J-n+1}{2J+1}}\Big|\frac{1}{2},+\Big\rangle \otimes |J,J-n\rangle + \sqrt{\frac{n}{2J+1}}\Big|\frac{1}{2},-\Big\rangle \otimes |J,J-n+1\rangle\,,\\ \Big|J-\frac{1}{2}, J-\frac{1}{2}-n\Big\rangle &= \sqrt{\frac{n+1}{2J+1}}\Big|\frac{1}{2},+\Big\rangle \otimes |J,J-n-1\rangle - \sqrt{\frac{2J-n}{2J+1}}\Big|\frac{1}{2},-\Big\rangle \otimes |J,J-n\rangle\end{aligned} \tag{5.10}$$

のように表される．これに $\sigma^i \otimes L^i$ を作用させると，以下のような結果を得ることに注意する．

$$(\sigma^i \otimes L^i)\,|\chi\rangle = J\sum_{n=0}^{2J+1} a_n\Big|J+\frac{1}{2}, J+\frac{1}{2}-n\Big\rangle - (J+1)\sum_{n=0}^{2J-1} b_n\Big|J-\frac{1}{2}, J-\frac{1}{2}-n\Big\rangle. \tag{5.11}$$

これらを用いて，(5.6) 式で σ^i と L^i を作用させた後の結果を得る．

次に，a_n と b_n を求める．a_n と b_n の漸化式を得るために，(5.6) 式に $\langle J, J-n|$ を左からかける．$|\frac{1}{2},+\rangle$ 及び $|\frac{1}{2},-\rangle$ に比例する項から，それぞれ以下のような式が得られる．

$$\begin{aligned}&-\tilde{\alpha}^3\delta^{n,0}+\frac{RJ}{2}(\Lambda^{-1})_{33}(\Lambda^{-1})_{33}\delta^{n,0}+\frac{R\sqrt{2J}}{4}(\Lambda^{-1})_{33}((\Lambda^{-1})_{31}+i(\Lambda^{-1})_{32})\delta^{n-1,0}\\&+RJa_n\sqrt{\frac{2J-n+1}{2J+1}}-R(J+1)b_{n-1}\sqrt{\frac{n}{2J+1}}-a_n\sqrt{\frac{2J-n+1}{2J+1}}-b_{n-1}\sqrt{\frac{n}{2J+1}}=0\end{aligned} \tag{5.12}$$

及び，

$$\begin{aligned}&-(\tilde{\alpha}^1+\mathrm{i}\tilde{\alpha}^2)\delta^{n,0}+\frac{RJ}{2}(\Lambda^{-1})_{33}((\Lambda^{-1})_{31}+\mathrm{i}(\Lambda^{-1})_{32})\delta^{n,0}+\frac{R\sqrt{2J}}{4}((\Lambda^{-1})_{31}+i(\Lambda^{-1})_{32}))^2\delta^{n-1,0}\\&+RJa_{n+1}\sqrt{\frac{n+1}{2J+1}}+R(J+1)b_n\sqrt{\frac{2J-n}{2J+1}}+a_{n+1}\sqrt{\frac{n+1}{2J+1}}-b_n\sqrt{\frac{2J-n}{2J+1}}=0\ .\end{aligned} \tag{5.13}$$

ここで，$R=1/J$ をこの漸化式に適用すると，以下のように簡単化される．

$$\begin{aligned}&-\tilde{\alpha}^3\delta^{n,0}+\frac{1}{2}(\Lambda^{-1})_{33}(\Lambda^{-1})_{33}\delta^{n,0}+\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{J}}(\Lambda^{-1})_{33}\big((\Lambda^{-1})_{31}+i(\Lambda^{-1})_{32}\big)\delta^{n-1,0}\\&-\frac{2J+1}{J}b_{n-1}\sqrt{\frac{n}{2J+1}}=0\ ,\end{aligned} \tag{5.14}$$

$$\begin{aligned}&-(\tilde{\alpha}^1+\mathrm{i}\tilde{\alpha}^2)\delta^{n,0}+\frac{1}{2}(\Lambda^{-1})_{33}((\Lambda^{-1})_{31}+\mathrm{i}(\Lambda^{-1})_{32})\delta^{n,0}+\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{J}}\big((\Lambda^{-1})_{31}+i(\Lambda^{-1})_{32})\big)^2\delta^{n-1,0}\\&+2a_{n+1}\sqrt{\frac{n+1}{2J+1}}+\frac{1}{J}b_n\sqrt{\frac{2J-n}{2J+1}}=0\ .\end{aligned} \tag{5.15}$$

この漸化式を解くと以下の結果を得る．ここで，行列 Λ^{-1} の成分の具体的な形は，(4.9) 式を参照した．

$$\begin{cases} b_0= & -\frac{1}{2}\frac{J}{2J+1}\sqrt{\frac{2J+1}{2J}}\sin\theta\cos\theta e^{\mathrm{i}\phi}\\ b_n= & 0 \quad (1\le n\le 2J)\end{cases} \tag{5.16}$$

$$\begin{cases} a_0:(z,\bar{z})\ \text{の任意関数}\\ a_1=-\frac{\sqrt{2J+1}}{2}(\tilde{\alpha}^1+\mathrm{i}\tilde{\alpha}^2)-\frac{1}{2}\frac{J+1}{2J+1}\sqrt{2J+1}\sin\theta\cos\theta e^{\mathrm{i}\phi}\\ a_2=-\frac{1}{8}\sqrt{\frac{2J+1}{J}}\sin^2\theta e^{\mathrm{i}2\phi}\\ a_n=0 \quad (3\le n\le 2J+1)\end{cases} \tag{5.17}$$

$$\begin{cases} \tilde{\alpha}^1,\tilde{\alpha}^2:(z,\bar{z})\ \text{の任意関数}\\ \tilde{\alpha}^3=\frac{1}{2}\cos^2\theta\end{cases} \tag{5.18}$$

ここでは，$\tilde{\alpha}^1$と$\tilde{\alpha}^2$の自由度について言及しておく．これは，波動関数$|\psi_J(y)\rangle$に含まれる自由度である．$\tilde{\alpha}^i$は(5.7)式より分かるように，S^2上の座標s^iからのずれを表すα^iが行列Λで回転した後の量である．この$\tilde{\alpha}^i$から，α^iを計算する．こうして得られたα^iは，以下の関係式を$\mathcal{O}(\mu)$まで満たしている．

$$(s^1+\mu\alpha^1)^2+(s^2+\mu\alpha^2)^2+\frac{(s^3+\mu\alpha^3)^2}{\lambda^2}=1 \tag{5.19}$$

すなわち，エルミート行列X^iが表す多様体上の座標y^iは回転楕円面上の点の集合を表していることが分かる．いま，$a^1=0+\mathcal{O}(1/\sqrt{N})$となるように，$\tilde{\alpha}^1$と$\tilde{\alpha}^2$の値を$\tilde{\alpha}^1=-\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta\cos\phi$と$\tilde{\alpha}^2=-\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta\sin\phi$ととる．このとき，$\alpha^1=\alpha^2=0$及び$\alpha^3=\frac{1}{2}\cos\theta$となり，ちょうど$y^3$だけが球面上の座標からずれた形となる．これは，球面上の点から回転楕円面上の点へ垂直に射影するという座標y^iの1つの決め方に対応している．コヒーレント状態法の波動関数には，このような座標y^iの決め方の自由度が含まれていることに注意する．以下では，このような垂直に射影した場合の波動関数を求める．

ここまでの議論から，$|\chi\rangle$は以下のように決まっている．

$$\begin{aligned}
|\chi\rangle =& a_0\Big|\frac{1}{2},+\Big\rangle\otimes|J,J\rangle\\
&+a_1\Big(\sqrt{\frac{2J}{2J+1}}\Big|\frac{1}{2},+\Big\rangle\otimes|J,J-1\rangle+\sqrt{\frac{1}{2J+1}}\Big|\frac{1}{2},-\Big\rangle\otimes|J,J\rangle\Big)\\
&+a_2\Big(\sqrt{\frac{2J-1}{2J+1}}\Big|\frac{1}{2},+\Big\rangle\otimes|J,J-2\rangle+\sqrt{\frac{2}{2J+1}}\Big|\frac{1}{2},-\Big\rangle\otimes|J,J-1\rangle\Big)\\
&+b_0\Big(\sqrt{\frac{1}{2J+1}}\Big|\frac{1}{2},+\Big\rangle\otimes|J,J-1\rangle-\sqrt{\frac{2J}{2J+1}}\Big|\frac{1}{2},-\Big\rangle\otimes|J,J\rangle\Big)\ .
\end{aligned} \tag{5.20}$$

便利のために$|\chi\rangle=|\frac{1}{2},-\rangle\otimes|\varphi\rangle+|\frac{1}{2},+\rangle\otimes|\rho\rangle$と表しておく．$|\psi_J(y)\rangle$のノルムが$\mathcal{O}(\mu)$までで1であるためには，$\langle J,J|\rho\rangle=0$でなければならない．ゆえに，$a_0=0$である．(4.12)式を用いて$U_N$の具体的な形を使って，$U_N|\rho\rangle$を計算すると，以下のような結果を得る．

$$\begin{aligned}
U_N|\rho\rangle &= \frac{1}{(1+|z|^2)^J}\sum_{n=0}^{2J}z^nD_n\binom{2J}{n}^{\frac{1}{2}}|J,J-n\rangle\ ,\\
D_n &= -\frac{1}{4J}n(n-1)+\Big(\frac{2J-1}{2J}+\frac{1}{4J+2}\Big)n-\Big(\frac{J}{2J+1}+\frac{2J-1}{2}\Big)\\
&\quad-(1+|z|^2)^{-1}\Big(\Big(\frac{1}{2J+1}+\frac{2J-1}{2J}\Big)n-\Big(\frac{3J}{2J+1}+2J-1\Big)\Big)\\
&\quad-(1+|z|^2)^{-2}\Big(\frac{2J}{2J+1}+\frac{2J-1}{2}\Big)\ .
\end{aligned} \tag{5.21}$$

したがって，回転楕円面に対する波動関数$|\psi_J(y)\rangle$は以下のように求めることができた．

$$|\psi_J(y)\rangle=|\psi_J(s)\rangle+\mu(U_2\otimes\mathbb{1}_N)\Big|\frac{1}{2},+\Big\rangle\otimes U_N|\rho\rangle+\mu(U_2\otimes U_N)\Big|\frac{1}{2},-\Big\rangle\otimes|\varphi\rangle\ . \tag{5.22}$$

5.2 Berezin-Toeplitz 量子化

本節では Berezin-Toeplitz 量子化を回転楕円面 E に適用する．Dirac 演算子のカーネルの基底に対する波動関数を求め，これを用いて Toeplitz 演算子を定義する．E から $\mathbb{R}^3$ への埋め込み座標 x^i に対する Toeplitz 演算子を計算し，行列のサイズが無限大の極限で非可換回転楕円面を与える行列と一致することを示す．また，回転楕円面においても，コヒーレント状態法で得られる波動関数が Berezin-Toeplitz 量子化で得られる波動関数と一致することを示す．

回転楕円面 E に対して Berezin-Toeplitz 量子化を適用する．E 上のスピノル束を $\boldsymbol{E}$ とする．さらに，ゲージ接続 A と曲率 2-形式 F をもつ E 上の主 $U(1)$ 束を $\boldsymbol{P}_E$ とする．この主束のファイバーは $U(1)$ である．再び表現 ρ_p を用いて，$\boldsymbol{P}_E$ に同伴する複素直線束を $\boldsymbol{L_p}$ で定義する．以上から，E 上のツイストされたスピノル束 $\boldsymbol{E}\otimes\boldsymbol{L_p}\simeq\boldsymbol{E}\otimes\boldsymbol{L_1}^{\otimes p}$ について考える．この束の切断は E 上のスピノル場で，スピノル場の内積は (4.15) 式と同様な定義とする．Dirac 演算子を定義するために以下を準備する．$\mathbb{R}^3$ に埋め込まれた E を考え，その埋め込み座標を直交座標 x^i で表す．ただし，$i=1$，2，3 である．x^i は，

$$(x^1)^2+(x^2)^2+\frac{(x^3)^2}{\lambda^2}=1 \tag{5.23}$$

を満たす．$x^3/\lambda=\tilde{x}^3$ とおく．回転楕円面において，南極から x^1-x^2 平面へ射影する立体射影座標 $(z,\bar{z})$ を以下で定義する．

$$z=\frac{x^1+\mathrm{i}x^2}{1+\tilde{x}^3}\ . \tag{5.24}$$

ただし，ここでも楕円面全体を定義するために 2 つの被覆を用意する．

$(z,\bar{z})$ を直交座標 x^i について解き直すと，

$$\begin{aligned} x^1 &= \frac{z+\bar{z}}{1+|z|^2}\ ,\\ x^2 &= -\,\mathrm{i}\frac{z-\bar{z}}{1+|z|^2}\ ,\\ \tilde{x}^3 &= \frac{x^3}{\lambda}=\ \frac{1-|z|^2}{1+|z|^2} \end{aligned} \tag{5.25}$$

を得る．

これらの座標を用いて計量テンソル $g_{\mu\nu}$ を求めると，

$$g_{zz}=\frac{4(\lambda^2-1)\bar{z}^2}{(1+|z|^2)^4}=\frac{4\mu\bar{z}^2}{(1+|z|^2)^4}\ , \tag{5.26}$$

$$g_{\bar{z}\bar{z}}=\frac{4(\lambda^2-1)z^2}{(1+|z|^2)^4}=\frac{4\mu z^2}{(1+|z|^2)^4}\ , \tag{5.27}$$

$$g_{z\bar{z}}=\frac{2}{(1+|z|^2)^2}+\frac{4(\lambda^2-1)|z|^2}{(1+|z|^2)^4}=\frac{2}{(1+|z|^2)^2}+\frac{4\mu|z|^2}{(1+|z|^2)^4} \tag{5.28}$$

を得る．ここで，$\lambda^2-1=\mu$ で定義している．以下では，$\mu\ll 1$ すなわち $\lambda\simeq 1$ であるような回転楕円面を考え，μ についての摂動論を展開する．

まず，計量テンソル (5.28) 式を与える 2 脚場を球面の値と $\mathcal{O}(\mu)$ のずれという形で，

$$e^1 = \frac{dz + d\bar{z}}{1+|z|^2} + \frac{\mu}{(1+|z|^2)^3}(\alpha dz + \beta d\bar{z}) \ , \tag{5.29}$$

$$e^2 = \frac{1}{\mathrm{i}}\frac{dz - d\bar{z}}{1+|z|^2} + \frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\mu}{(1+|z|^2)^3}(\sigma dz + \rho d\bar{z}) \tag{5.30}$$

のように表す．ここで，$(\alpha, \beta, \sigma, \rho)$ は $(z, \bar{z})$ の関数である．局所座標の計量テンソルは Euclid 計量 δ_{ab} にとる．局所座標における添え字を a，b，$\cdots$ を用いて表す．ただし $a = 1, 2$ である．これらの $g_{\mu\nu} = e^a{}_\mu e^a{}_\nu$ より，(β, σ, ρ) は以下のように決まっている．

$$\begin{aligned} \beta &= (z+\bar{z})^2 - \alpha \ , \\ \sigma &= \alpha - 2\bar{z}^2 \ , \\ \rho &= z^2 - \bar{z}^2 - 2|z|^2 + \alpha \ . \end{aligned} \tag{5.31}$$

2 脚場の成分は実数であるべきなので，$e^a = \bar{e}^a$ から α の実部は $\mathrm{Re}(\alpha) = (z+\bar{z})^2/2$ に決まっている．したがって，α は

$$\alpha = \frac{(z+\bar{z})^2}{2} + \mathrm{i}\tau \tag{5.32}$$

である．ここで，局所 Lorentz 変換の自由度について言及しておく．$g_{\mu\nu} = e^a{}_\mu e^a{}_\nu$ は 2 脚場 $e^a{}_\mu$ についての以下のような無限小 Lorentz 変換に対して不変である．$\eta \ll 1$ である．

$$e'^a = R^a{}_b e^b \ , \qquad\qquad R = \begin{pmatrix} \cos\eta & \sin\eta \\ -\sin\eta & \cos\eta \end{pmatrix} \ . \tag{5.33}$$

これは，$\eta = -\mu\tau/(1+|z|^2)^2$ としておくと，ここで導入した 2 脚場が実際にこの変換を満たしていることが分かる．したがって，$\alpha = \mathrm{Re}(\alpha) + \mathrm{i}\tau(\tau \in \mathbb{R})$ とみたときの τ の自由度が局所 Lorentz 変換のゲージの自由度に対応している．

次に，これらの 2 脚場に双対な正規直交フレームを再び球面の値と $\mathcal{O}(\mu)$ のずれという形で以下のように表す．(a, b, c, d) も $(z, \bar{z})$ の関数である．

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{1}{2}(1+|z|^2)(\partial_z + \partial_{\bar{z}}) + \frac{1}{2}\frac{\mu}{1+|z|^2}(a\partial_z + b\partial_{\bar{z}}) \ , \\ \theta_2 &= (1+|z|^2)(\partial_z - \partial_{\bar{z}}) + \frac{\mathrm{i}}{2}\frac{\mu}{1+|z|^2}(c\partial_z + d\partial_z) \ . \end{aligned} \tag{5.34}$$

(a, b, c, d) は $(\alpha, \beta, \sigma, \rho)$ を用いると以下の通りである．

$$\begin{aligned} a &= -\frac{1}{2}(\alpha + \beta + \sigma + \rho) \ , \qquad & b &= -\frac{1}{2}(\alpha + \beta - \sigma - \rho) \ , \\ c &= -\frac{1}{2}(\alpha - \beta + \sigma - \rho) \ , \qquad & d &= -\frac{1}{2}(\alpha - \beta - \sigma + \rho) \ . \end{aligned}$$

また，局所 Lorentz 変換のスピン接続 $\Omega^1{}_2$ は捩率がゼロである条件から

$$\begin{aligned} \Omega^1{}_2 &= -\mathrm{i}\frac{\bar{z}dz - zd\bar{z}}{1+|z|^2} + \mathrm{i}\frac{\mu}{(1+|z|^2)^3}(tdz + sd\bar{z}) \ , \\ s &= 2(\alpha z - |z|^2\bar{z} - 2|z|^2 z) + (1+|z|^2)(-\partial_{\bar{z}}\alpha + 2z + 2\bar{z}) \ , \\ t &= 2(\alpha - \bar{z}^2)\bar{z} + (1+|z|^2)(-\partial_z\alpha) \end{aligned} \tag{5.35}$$

のように求まる．ここで，再びスピン接続の局所 Lorentz 変換の自由度について言及しておく．2 脚場が (5.33) 式のような Lorentz 変換をする場合について考える．このとき，スピン接続は以下のような変換をする．

$$\Omega'^{a}{}_{b} = -dR^{a}{}_{c}(R^{-1})^{c}{}_{b} + R^{a}{}_{c}\Omega^{c}{}_{d}(R^{-1})^{d}{}_{b}. \tag{5.36}$$

いま，無限小 Lorentz 変換について考える．このときのスピン接続の変換性は以下のようになる．

$$\Omega'^{a}{}_{b} = \Omega^{a}{}_{b} - \varepsilon^{ab} d\eta \tag{5.37}$$

ここで，回転楕円面のスピン接続 $\Omega^{1}{}_{2}$ には局所 Lorentz 変換の自由度である τ 依存性がどのように組み込まれているか調べると，以下のように抜き出すことができる．

$$-\frac{\mu}{(1+|z|^2)^3}\Big((2z\tau - (1+|z|^2)\partial_{\bar{z}}\tau)d\bar{z} + (2\tau + (1+|z|^2)\partial_z\tau)dz\Big) \ .$$

一方 $\eta = -\mu\tau/(1+|z|^2)^2$ より，この τ 依存性は $-d\eta$ とかけていることが分かるので，$\Omega^{1}{}_{2}$ の局所 Lorentz 変換のスピン接続の自由度はゲージ変換の形になっている．

さらに，回転楕円面における体積形式を以下のように定義する．

$$\begin{aligned}\omega =& \mathrm{i}\sqrt{|\det\, g|}dz \wedge d\bar{z} \\ =& 2\mathrm{i}\frac{\sqrt{(1+|z|^2)^2 + 4\mu|z|^2}}{(1+|z|^2)^3}dz \wedge d\bar{z} \ .\end{aligned} \tag{5.38}$$

ω は回転楕円面上で積分すると，回転楕円面の表面積を得る．

$$\int_{S^2} \omega = 4\pi + \frac{4}{3}\pi\mu \ . \tag{5.39}$$

ここでは，$F = dA$ の関係を満たす $U(1)$ ゲージ接続 A として，S^2 の場合と同様に Wu-Yang モノポール配位 (4.25) 式を選ぶ．これはまだ $\int_E F/2\pi = 1$ を満たしている．

これらより $\Gamma(\boldsymbol{S} \otimes \boldsymbol{L_p})$ 上の Dirac 演算子が定義できる．2 章で得られた S^2 に対する Dirac 演算子 (4.27) 式を $D^{(0)}$ とする．回転楕円面における Dirac 演算子も以下のように 2 成分となっている．

$$D = \begin{pmatrix} 0 & D_- \\ D_+ & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & D_-^{(0)} + \mu D_-^{(1)} \\ D_+^{(0)} + \mu D_+^{(1)} & 0 \end{pmatrix} \ . \tag{5.40}$$

Dirac 演算子のカーネルの基底は D_+ 得られる．ここで，$D_+^{(1)}$ は

$$\begin{aligned} D_+^{(1)} =& \frac{\mathrm{i}\mu}{(1+|z|^2)^2}\Bigg(-\frac{s}{2} - z^2\big((1+|z|^2)\partial_z + \frac{\bar{z}}{2}(1-p)\big) \\ & + (\alpha - \bar{z}^2 - 2|z|^2)\big((1+|z|^2)\partial_{\bar{z}} - \frac{z}{2}(1-p)\big)\Bigg) \end{aligned} \tag{5.41}$$

である．α 及び $\partial_{\bar{z}}\alpha$ の中に局所 Lorentz 変換の自由度 τ が入っていることに注意する．$D_+\psi^+ = 0$ を満たす波動関数を以下のようにおく．

$$\psi^+_n = \ (1+|z|^2)^{-\frac{p-1}{2}} h^+_{n,0}(1+\mu h^+_{n,1})(1+\mu C_n)\ . \tag{5.42}$$

ここで，$h^+_{n,0}$ は

$$h^+_{n,0} = \sqrt{\frac{p}{4\pi}}\binom{2J}{n}^{\frac{1}{2}} z^n \tag{5.43}$$

とする．(5.42) 式における $\mathcal{O}(1)$ の寄与は，S^2 の場合のカーネルの正規直交基底となっている．また，$(1+\mu C_n)$ は規格化定数である．$D_+\psi^+_n = 0$ において，$\mathcal{O}(\mu)$ の項をひろうと，$h^+_{n,1}$ に対する以下の方程式を得る．

$$\partial_{\bar{z}} h^+_{n,1} + \left[\Big(\frac{1}{2}(-s+pw) - z^2\bar{z}(1-p)\Big)(1+|z|^2)^{-3} h^+_{n,0} - z^2(1+|z|^2)^{-2}\partial_z h^+_{n,0}\right] = 0. \tag{5.44}$$

ここで，ψ^+_n が $\mathcal{O}(\mu)$ まで正規直交基底をなすためには，局所 Lorentz 対称性に対するゲージを $\tau = \frac{\mathrm{i}}{2}(z^2 - \bar{z}^2)$ で固定すればよいことが分かる．すると，$h^+_{n,1}$ と C_n がそれぞれ

$$h^+_{n,1} = -(\frac{1}{2} - p + n)(1+|z|^2)^{-1} - \frac{p}{2}(1+|z|^2)^{-2}\ , \tag{5.45}$$

$$C_n = -\frac{(n+1)(p-n)}{(p+2)(p+1)} + \Big(\frac{1}{2} - p + n\Big)\frac{p-n}{p+1} + \frac{1}{2}\frac{(p-n+1)(p-n)}{(p+2)(p+1)} \tag{5.46}$$

のように求まる．ここで，C_n を求める際にベータ関数の定義 (B.2) 式を用いた．

このようにして得られる Berezin-Toeplitz 量子化における波動関数 (5.42) 式と 3.1 節のコヒーレント状態法から得られる波動関数 (5.22) 式を比較してみよう．(5.22) 式に左から $\langle J, J-n|$ をかけて，$|\frac{1}{2},+\rangle$ 成分の $\mathcal{O}(\mu)$ の項を取り出すと，

$$\begin{aligned}\binom{2J}{n}^{\frac{1}{2}} z^n(1+|z|^2)^{-\frac{p-1}{2}}\Big[\Big(&-\frac{1}{4J}n(n-1) + \frac{1}{2J}(2J-1)n - \frac{(2J-1)}{2} + \frac{n}{2p} - \frac{1}{2}\Big)\\ &+ (1+|z|^2)^{-1}\Big(-\frac{1}{2J}(2J-1)n + \frac{2(2J-1)}{2} - \frac{n}{p} + \frac{3}{2}\Big)\\ &+ (1+|z|^2)^{-2}\Big(-\frac{(2J-1)}{2} - 1\Big)\Big]\end{aligned} \tag{5.47}$$

となっている．$2J+1 = p$ のように関係していることに注意する．(5.47) 式は，Dirac タイプ演算子が作用するベクトル空間における標準的な内積においては規格化されているが，スピノル場の内積 (4.15) 式 ($S^2 \to E$ とする場合) においては規格化されていない．このもとで，p や n に依る規格化因子まで含めると，$\mathcal{O}(1/\sqrt{p})$ を除いて (5.42) 式に一致している．ただし，n/p は $\mathcal{O}(1)$ の量としている．

上記の波動関数 (5.42) 式より，Toeplitz 演算子を定義することができる．いま，具体例として (5.26) 式で与えた $\mathbb{R}^3$ への埋め込み座標についての Toeplitz 演算子を計算する．その結果は，付

録 (B.3) 式となる．この結果を見ると，$T_p(x^+)$ 及び $T_p(x^-)$ の $\mathcal{O}(\mu)$ の項は，$p \to \infty$ で $1/p \to 0$ となることが分かる．$T_p(x^3)$ は以下のように S^2 の結果とのずれを観測することができる．

$$T_p(x^3)_{mn} = \Big(\frac{2(\frac{p-1}{2} - n)}{p+1} \ + \frac{1}{2}\mu \frac{2(\frac{p-1}{2} - n)}{p+1} \Big) \delta_{m,n} \tag{5.48}$$

すなわち，$\mathbb{R}^3$ への埋め込み座標に対する Toeplitz 演算子は，非可換回転楕円面を与える行列と以下のような関係を満たしている．

$$\begin{aligned} T_p(x^{\pm}) =& \frac{L^{\pm}}{J+1} + \mu \ \mathcal{O}\left(\frac{1}{p}\right) \\ T_p(x^3) =& \lambda \frac{L^3}{J+1} \end{aligned} \tag{5.49}$$

したがって，回転楕円面の場合でも，$J \to \infty$ すなわち行列サイズが $N \to \infty$ で $T_p(x^i) = X^i$ になっている．

次に，5.1 節で得られた波動関数を用いて Berry 接続を求める．$\mathcal{O}(1)$ の項は，S^2 で得られた Berry 接続に一致する．$\mathcal{O}(\mu)$ の項は打ち消し合って，最終的にゼロとなっている．したがって，回転楕円面における Berry 接続は $\mathcal{O}(\mu)$ までで S^2 の場合の Berry 接続に一致する．これは，本節で用いたゲージ接続 (チャージ p も含む) に一致している．

第6章　結論と展望

本研究は，超弦理論の非摂動論的な定式化としての行列模型を完成させるために，有限のサイズの行列による幾何の記述と曲がった時空の創発を明らかにすることを目指したものである．そこで，本論文においては，有限のサイズの行列から幾何を得る手法であるコヒーレント状態法と，与えられた幾何に対して有限のサイズの行列を構成する手法である Berezin-Toeplitz 量子化に着目した．先行研究では，2 次元球面に対してこの 2 つの手法が適用された．本論文では，一般の多様体に対する行列による幾何の記述を確立するための第一歩として，球面よりも対称性が低い回転楕円面にこの 2 つの手法を適用した．簡単のため，球面を 3 軸方向にのみ引き伸ばした回転楕円面を考え，球面からのずれを表すパラメーターに対する摂動論を展開した．

結論

第 5 章の各節で得られた結果についてまとめる．5.1 節では，回転楕円面にコヒーレント状態法を適用した．非可換回転惰円面を与える $N \times N$ エルミート行列から，$\mathcal{O}(\mu)$ までで回転楕円面が得られることを示した[5]．また，Dirac タイプ演算子のカーネルの基底となる波動関数を球面に対する波動関数に $\mathcal{O}(\mu)$ のずれが加わった形として求めた．回転楕円面に対する波動関数には，球面に対する波動関数には存在しなかった 2 つの自由度が含まれている．この自由度は球面上の点から回転楕円面上の点へ射影するときの自由度に対応している．本論文では，この射影が最も単純となる垂直な射影となる場合の波動関数を求めた．

5.2 節では，$\mathbb{R}^3$ に埋め込まれた回転楕円面に，Berezin-Toeplitz 量子化を適用した．まず，Dirac 演算子のカーネルの基底となる波動関数を求めた．この波動関数には局所 Lorentz 変換に対する自由度が 1 つと，Chern 指標の積分値を変えないゲージ接続の取り方の自由度が含まれている．本論文では，得られる波動関数が直交するように局所 Lorentz 対称性に対するゲージを固定し，ゲージ接続の配位は球面の場合と同様の Wu-Yang モノポール配位とした．次に，$\mathbb{R}^3$ への埋め込み座標に対する Toeplit 演算子を求め，行列サイズが無限大の極限で，コヒーレント状態法で用いた行列に一致することを示した．さらに，これらの 2 つの手法から得られる波動関数は $\mathcal{O}(1/\sqrt{p})$ の項を除いて一致することを示した[6]．

考察

本論文で得られた結果について考察する．まず，回転楕円面にコヒーレント状態法と Berezin-Toeplitz 量子化を適用したときに得られる波動関数について考察する．コヒーレント状態法における波動関数には，球面に対する波動関数にはない 2 つの自由度が含まれている．これは，先ほども述べた通り，球面の波動関数にずれが加わった形として回転楕円面に対する波動関数を

---

[5] μ は，$\mu = \lambda^2 - 1$ で $\mu \ll 1$ である．すなわち，非可換回転楕円面を $N \times N$ エルミート行列で，$(X^1)^2 + (X^2)^2 + \left(\frac{X^3}{\lambda}\right)^2 = R^2 \frac{N^2-1}{4} \mathbb{1}_N$ と表したときの λ を用いて表されている．

[6] p は，$p = 2J + 1$ である．$2J + 1$ は，波動関数の次元である．

求めたためで，球面上の点から回転楕円面上の点の上への全単射の取り方の自由度に対応している．すなわち，回転楕円面上の一般座標変換の自由度とも解釈できる．このように，波動関数は回転楕円面上の一般座標変換のもとでの対称性に対するゲージの取り方の自由度をもつ．

また，Berezin-Toeplitz 量子化における波動関数には，局所 Lorentz 変換に対する自由度が 1 つと，Chern 指標の積分値を変えないゲージ接続の取り方の自由度が含まれている．ここで，ゲージ接続の取り方の自由度には，ゲージ変換に対する自由度も含まれていることに注意する．これらの自由度は，一般に波動関数を変える．ただし，局所 Lorentz 変換及びゲージ変換に対する自由度は波動関数の位相のみを変えるので，埋め込み座標に対する Toeplit 演算子の形は変えない．すなわち，埋め込み座標に対する Toeplit 演算子は局所 Lorentz 対称性及びゲージ対称性に対するゲージの取り方によらない．こうして，波動関数には Chern 指標の積分値を変えず，かつゲージ変換では表せないゲージ接続の取り方の自由度が残る．この自由度が何に対応するのかを明らかにすることは，球面の場合も含めて今後の課題である．

次に，2 つの手法の間の関係について考察する．回転楕円面では，球面と同様にコヒーレント状態法と Berezin-Toeplitz 量子化が逆の関係にあることを明らかにした．すなわち，回転楕円面に対してもコヒーレント状態法を適用することで非可換回転楕円面を定義する有限のサイズの行列から，回転楕円面が得られた．逆に，Berezin-Toeplitz 量子化を回転楕円面に適用すると，回転楕円面から非可換回転楕円面を表す有限のサイズの行列を構成することができた．波動関数の考察で示したように，これら 2 つの手法で得られる波動関数はそれぞれ異なる起源をもつ自由度を含む．第 5 章で示したように，これらの波動関数を一致させるような自由度の固定の仕方が存在する．このとき，コヒーレント状態法における波動関数が与える Berry 接続は，Berezin-Toeplitz 量子化で用いたゲージ接続に一致する．これは球面の場合にも当てはまる．

今後の展望

最後に，超弦理論の非摂動論的な定式化としての行列模型における今後の展望について述べる．一般の多様体について，上で述べた意味でコヒーレント状態法と Berezin-Toeplitz 量子化が逆の関係になるかを解明することは今後の課題である．その際，波動関数の自由度やゲージ接続の取り方や Berry 接続がどのような役割を果たすかを明らかにすることが必要になる．これが達成できれば，平坦な空間に埋め込まれた多様体の幾何と行列の対応が明らかになり，超弦理論の非摂動論的な定式化としての行列模型の完成に向けて大きな前進となるであろう．

さらに，行列と幾何の関係は以下のように深化させなければならない．本論文で用いた 2 つの手法では，多様体の埋め込み座標と行列が対応した．行列による幾何の記述をより一般的に行うためには，多様体の埋め込みによらないように多様体を行列に対応させる必要がある．2.2 節でレビューした行列の微分演算子解釈に基づく時空の創発の例では，幾何を反映した微分演算子が行列に対応していた．このとき，この微分演算子は多様体の埋め込みに関係なく定義されていた．しかし，この行列は微分演算子に対応するため，行列のサイズが無限大となっている．多様体の埋め込みに関係なく，かつ有限の行列による幾何の記述を実現することが将来的な課題である．この実現により，超弦理論の非摂動論的な定式化としての行列模型が完成すると期待される．

謝辞

本論文の作成にあたり，手厚くご指導してくださった土屋麻人教授には深く感謝いたします．場の量子論から行列模型，微分幾何学に至るまで丁寧な議論を行っていただけたことで，充実した研究を行うことができました。改めてお礼申し上げます。論文審査員長の浅芝秀人教授には，数学的な視点から細部にわたるご指導を頂きました．論文審査員の冨田誠教授には，物理学的な視点からご指導を頂きました．論文審査員の森田健先生には専門的な視点からご指導頂き，改めて本研究の理解を深めることができました．感謝申し上げます．最後に，日頃からお世話になっている研究室の皆様にお礼申し上げます。

付 録A　単位球面に対するDiracタイプ演算子のゼロモード

単位球面 S^2 に対する Dirac タイプ演算子のゼロモードに対する方程式は，以下である．

$$D\!\!\!/(y)\,|\psi(y)\rangle = \sigma^i \otimes (RL^i - y^i \mathbb{1}_N)\,|\psi(y)\rangle = 0 \tag{A.1}$$

Dirac タイプ演算子はエルミート行列であることから，実固有値を持つ．固有状態と固有値は以下のように得らる．ただし，ここでは $m = -J, -J+1, \cdots, J-1$ と定義している．

$$\begin{aligned}
|\psi_m^{(\pm)}\rangle &= (U_2 \otimes U_N)\left(a_m^{(\pm)}\Big|\frac{1}{2},+\Big\rangle \otimes |J,m\rangle + b_m^{(\pm)}\Big|\frac{1}{2},-\Big\rangle \otimes |J,m+1\rangle\right), \\
|\psi_J\,\rangle &= (U_2 \otimes U_N)\Big|\frac{1}{2},+\Big\rangle \otimes |J,J\rangle\,, \\
|\psi_{J_+}\rangle &= (U_2 \otimes U_N)\Big|\frac{1}{2},-\Big\rangle \otimes |J,-J\rangle\,,
\end{aligned} \tag{A.2}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_m^{(\pm)}(y) =& -\frac{R}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{R^2 + 4\{|y|^2 - R(2m+1)|y| + R^2 J(J+1)\}}, \\
\lambda_J =& RJ - |y|, \\
\lambda_{J_+} =& RJ + |y|.
\end{aligned} \tag{A.3}$$

いま，$J = 1/2$ の場合の固有状態は簡単のために $|\frac{1}{2},\pm\rangle := |\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\rangle$ という記法を用いていることに注意する．ここで，上記の固有値に注目する．λ_{J_+} は正の値しか取りえない．また，$\lambda_m^{\pm}$ も定義された m の範囲ではゼロを取りえない．つまり，Dirac 演算子のゼロモードになり得るのは $|\psi_J\rangle$ のみである．

付 録B　回転楕円面の埋め込み座標に対する Toeplitz演算子

付録 B では，5.2 節で求めた回転楕円面の $\mathbb{R}^3$ への埋め込み座標 x^i に対する Toeplitz 演算子の詳細な結果を示す．

x^i に対する Toeplitz 演算子 $T_p(x^i)$ は，波動関数 (5.42) 式及び体積形式 (5.38) 式より以下で与えられる．

$$\begin{aligned} T_p(x^i)_{mn} = \frac{p}{2\pi}\int_E \omega \frac{1}{(1+|z|^2)^2}\binom{2J}{m}^{\frac{1}{2}}\binom{2J}{n}^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{2\mu|z|^2}{(1+|z|^2)^2}\right)(1+\mu C_m)(1+\mu C_n) \\ \times(1+|z|^2)^{-(p-1)}z^m\bar{z}^n\left[1+\mu\left(-\frac{1}{2}+p-n)(1+|z|^2)^{-1}-\frac{p}{2}(1+|z|^2)^{-2}\right)\right] \\ \times\left[1+\mu\left(-\frac{1}{2}+p-m)(1+|z|^2)^{-1}-\frac{p}{2}(1+|z|^2)^{-2}\right)\right]x^i(z,\bar{z})\ . \end{aligned} \tag{B.1}$$

ここで，ベータ関数の定義

$$\beta(u.v) = \int_0^\infty dt\frac{t^{u-1}}{(1+t)^{u+v}} = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)} \tag{B.2}$$

を用いて計算する．ただし，$\mathrm{Re}(u)>0$，$\mathrm{Re}(v)>0$ である．その結果を以下のように示す．

$$\begin{aligned} T_p(x^+)_{mn} &= \frac{2}{p+1}\sqrt{n(p-n)}\ \delta_{m,n-1}(1+\mu A_n)\ , \\ T_p(x^-)_{mn} &= T_p(x^+)^*_{nm}\ , \\ T_p(x^3)_{mn} &= \frac{p-1-2n}{p+1}\ \delta_{m,n}\,(1+\mu B_n)\ . \end{aligned} \tag{B.3}$$

ここで，

$$\begin{aligned} A_n =& \frac{2(n+1)(p-n+1)}{(p+3)(p+2)} \\ &-\frac{(n+1)(p-n)}{(p+2)(p+1)}+\left(\frac{1}{2}-p+n\right)\frac{p-n}{p+1}+\frac{p(p-n+1)(p-n)}{2(p+2)(p+1)} \\ &-\frac{n(p-n+1)}{(p+2)(P+1)}+\left(-\frac{1}{2}-p+n\right)\frac{p-n+1}{p+1}+\frac{p(p-n+2)(p-n+1)}{2(p+2)(p+1)} \\ &-\left(\frac{1}{2}-p+n\right)\frac{p-n+1}{p+2}+\frac{p(p-n+2)(p-n+1)}{2(p+3)(p+2)} \\ &-\left(-\frac{1}{2}-p+n\right)\frac{p-n+2}{p+2}+\frac{p(p-n+3)(p-n+2)}{2(p+3)(p+2)}\ , \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
B_n =& \frac{2(n+1)(p-n)}{(p+3)(p+2)} \\
&+ 2\left[-\frac{(n+1)(p-n)}{(p+2)(p+1)} + \left(\frac{1}{2} - p + n\right)\frac{p-n}{p+1} + \frac{(p-n+1)(p-n)}{2(p+2)(p+1)}\right] \\
&- \frac{(1-2p+2n)(p-n)(p-2n)}{(p+2)(p-1-2n)} - \frac{p(p-n+1)(p-n)(p-2n+1)}{(p+3)(p+2)(p-1-2n)} + \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

である．

参考文献

[1] T. Banks, W. Fischler, S. H. Shenker and L. Susskind, Phys. Rev. D **55**, 5112 (1997) [hep-th/9610043].

[2] N. Ishibashi, H. Kawai, Y. Kitazawa and A. Tsuchiya, Nucl. Phys. B **498**, 467 (1997) [hep-th/9612115].

[3] R. Dijkgraaf, E. P. Verlinde and H. L. Verlinde, Nucl. Phys. B **500**, 43 (1997) [hep-th/9703030].

[4] M. Hanada, H. Kawai and Y. Kimura, Prog. Theor. Phys. **114**, 1295 (2006).

[5] T. Ishii, G. Ishiki, S. Shimasaki and A. Tsuchiya, Phys. Rev. D **78**, 106001 (2008) [arXiv:0807.2352 [hep-th]].

[6] H. Kawai, S. Shimasaki and A. Tsuchiya, Int. J. Mod. Phys. A **25**, 3389 (2010) [arXiv:0912.1456 [hep-th]].

[7] H. Steinacker, Class. Quant. Grav. **27**, 133001 (2010).

[8] D. Berenstein and E. Dzienkowski, Phys. Rev. D **86**, 086001 (2012).

[9] G. Ishiki, Phys. Rev. D **92**, no. 4, 046009 (2015).

[10] M. H. de Badyn, J. L. Karczmarek, P. Sabella-Garnier and K. H. C. Yeh, JHEP **1511**, 089 (2015).

[11] J. L. Karczmarek and K. H. C. Yeh, JHEP **1511**, 146 (2015).

[12] L. Schneiderbauer and H. C. Steinacker, J. Phys. A **49**, no. 28, 285301 (2016).

[13] G. Ishiki, T. Matsumoto and H. Muraki, JHEP **1608**, 042 (2016).

[14] S. Klimek and A. Lesniewski, Comm. Math. Phys. **146**, no. 1, 103-122 (1992).

[15] M. Bordemann, E. Meinrenken and M. Schlichenmaier, Commun. Math. Phys. **165**, 281 (1994).

[16] X. Ma and G. Marinescu, J. Geom. Anal. **18**, 565-611 (2008).

[17] G. Ishiki, T. Matsumoto and H. Muraki, Phys. Rev. D **98**, no. 2, 026002 (2018).

[18] G. Ishiki and T. Matsumoto, arXiv:1904.00308 [hep-th].

[19] J. Madore, Class. Quant. Grav. **9**, 69 (1992).

[20] K. Matsuura and A. Tsuchiya, “Matrix geometry for ellipsoids,”Progress of Theoretical and Experimenral Physics に掲載決定済.

[21] 土屋麻人, “ 弦理論と行列模型 ”, サイエンス社 (2014).

[22] 中原幹夫, “ 幾何学とトポロジー I ”, ピアソン・エデュケーション (2000).
中原幹夫, “ 幾何学とトポロジー II ”, ピアソン・エデュケーション (2001).

[23] 藤井保憲, “ 超重力理論入門 ”, マグロウヒルブック (1987).

[24] 松本幸夫, “ 多様体の基礎 ”, 東京大学出版会 (1988).

[25] 森田茂之, “ 微分形式の幾何学 ”, 岩波書店 (2005).