行列による幾何の記述と時空の創発

（課程博士・様式７）（Doctoral qualification by coursework, Form 7）

学 位 論 文 要 旨

Abstract of Doctoral Thesis

専　　攻：　情報科学　　　　　　　　氏　名：　松浦　夏穂

論文題目：　行列による幾何の記述と時空の創発

論文要旨：

自然界には、４つの基本的相互作用が存在している。この中で、強い相互作用・電磁相互作用・弱い相互作用の３つは場の量子論によって記述されているが、重力相互作用の量子論はまだ完成していない。超弦理論は、量子重力を含む４つの相互作用を統一的に記述できる理論の候補として盛んに研究されている。現在、超弦理論は摂動論的に定式化されているが、真空が無数に存在してしまうという問題や宇宙のはじまりの特異点で理論が破綻するという問題を含んでいる。そこで、超弦理論の非摂動論的な定式化が必要とされている。行列模型は、この定式化の有力な候補の１つである。行列模型において、時空はあらかじめ与えられるものではなく創発するものである。これは、重力の量子論として自然である。超弦理論は重力を含むため、特に曲がった時空が創発されなければならない。したがって、超弦理論の非摂動論的定式化として行列模型を完成させるには、行列によって幾何がどのように記述されるのかを明らかにしなければならない。

行列による幾何の記述を確立するためには、以下の２つを明らかにしなければならない。１つ目は行列が与えられたときにその行列が表す多様体とその幾何を解明することで、２つ目は、多様体が与えられたときにその多様体を表す行列を見出すことである。本論文では、前者に対して「コヒーレント状態法」、後者に対して「Berezin-Toeplitz 量子化」を用いる。以下ではこの２つの手法を簡単に説明する。

まず、「コヒーレント状態法」とは、非可換空間を定義するエルミート行列からその行列が表す多様体とその幾何を取り出す手法である。はじめに、非可換空間を定義するエルミート行列からDirac型演算子を定義する。そのDirac型演算子のカーネルを与える座標から、エルミート行列が表す多様体上の座標の集合が得られ、その基底となる波動関数が得られる。

次に、「Berezin-Toeplitz 量子化」とは、多様体の Dirac 演算子のカーネルの基底である波動関数を用いて、多様体上の滑らかな関数から有限サイズの行列への線形マップを与える手法である。この手法は、トポロジー的に非自明なゲージ場の構造をもつコンパクトなリーマン spin-C 多様体に適用できる。この多様体上のスピノル束と、この多様体上の主束の同伴束とのテンソル積束を考える。このテンソル積束のファイバーは、スピノル空間と同伴束のファイバーのテンソル積で与えられ、切断は多様体上のスピノル場である。この切断の集合に作用する Dirac 演算子を定義すると、そのカーネルの次元は有限となる。このカーネルの基底となる波動関数を用いて、多様体上の滑らかな関数から有限サイズの行列への線形マップである Toeplitz 演算子を定義することができる。

先行研究では、球面に対してこの 2 つの手法が適用された。コヒーレント状態法では、非可換球面を定義するエルミート行列として SU(2) 生成子の spin-J 既約表現が用いられ、その行列が表す多様体として球面が得られる。また、Dirac タイプ演算子のカーネルの基底の 1 つの表現として Bloch コヒーレント状態が得られることが示されている。Berezin-Toeplitz 量子化では、球面上のスピノル束と主束に同伴する複素直線束のテンソル積束を考える。この束の切断の集合に作用する Dirac 演算子のカーネルの基底は SU(2)の spin-J 既約表現と Bloch コヒーレント状態で表すことができる。この基底を用いて、多様体上の埋め込み座標に対する Toeplitz 演算子が求められる。球面では、2 つの手法それぞれで得られる波動関数が一致することと、行列サイズが無限大の極限で Toeplitz 演算子とコヒーレント状態法で用いられた行列が一致することが示されている。

本論文では、一般の多様体に対して行列による幾何の記述を確立するための第一歩として、球面より対称性が低い回転楕円面に 2 つの手法を適用した。簡単のため、球面を 3 軸方向のみ引き伸ばした回転楕円面を考え、球面からのずれを表すパラメーターに対する摂動論を展開した。コヒーレント状態法では、非可換回転楕円面を表す行列から回転楕円面が得られた。行列サイズが無限大の極限で埋め込み座標に対する Toeplitz 演算子がコヒーレント状態法で用いた行列に一致することを示した。また、2 つの手法から得られる波動関数が一致することも見出した。このように、回転楕円面の場合でも「コヒーレント状態法」と「Berezin-Toeplitz 量子化」が球面の場合と同様に逆の関係であることが分かった。