Geometry Teaching to Promote Comprehensive and Expansive Thinking in Junior High School : Development Materials and Practice of “Number of Right Angle” and “Voronoi Diagram”

中学校数学科における統合的・発展的な考察を促す図形指導

ー「多角形の直角の個数」と「ボロノイ図」の教材開発と実践ー

加藤健二・杉山篤史・熊倉　啓之
静岡大学教育学部附属島田中学校　静岡大学教育学部附属島田中学校　静岡大学教育学部

Geometry Teaching to Promote Comprehensive and Expansive Thinking in Junior High School

Development Materials and Practice of “Number of Right Angle” and “Voronoi Diagram”

Kato Kenji, Sugiyama Atsushi, Kumakura Hiroyuki

要　旨
本研究は，中学校数学科における統合的・発展的な考察を促す図形指導のあり方を追究することを目的とする．特に本稿では，これまでとは異なる図形の教材を開発して実践し，その有効性を検証する．そのために，中 2 の単元「図形の性質の調べ方」で「多角形の直角の個数」について，また中 2 の単元「三角形と四角形」で「ボロノイ図」について，それぞれ教材化して実践を行った．授業中の生徒の反応やワークシート，授業後の感想等から，統合的・発展的に考察する活動が多く観察され，教材の有効性を示すことができた．

キーワード：統合的・発展的な考察，直角の個数，ボロノイ図

1．はじめに

本研究は，「統合的・発展的な考察」に焦点を当て，中学校数学科における統合的・発展的な考察を促す図形指導のあり方を追究することを目的とする．

これまでに，本研究では，以下のア～エの4点を明らかにしてきた（鈴木他，2016；鈴木他，2017；加藤他，2018；加藤他，2020）．

ア　中学校の教科書を分析した結果，発展的な考え方を育成するような問題設定は，教科書では扱いが少ない．

イ　発展的な考え方に関する先行研究を分析した結果，発展的な考え方をいくつかのタイプに分類することができ（片桐，1988；菊池，1997；橋本，2001），その中で「広い意味での問題の条件を変える」タイプの実践（例えば，福田，2009）は，必ずしも多く実践されていない．

ウ　「広い意味での問題の条件を変える」タイプの実践として，以下の教材を開発して実践を行った．

中1「図形の移動の方法を考える」
中2「くの字の法則を見つける」
中2「くり抜いた図形の角の和」
中2「三角形の対象軸の本数」
中3「相似な図形の面積比」
中3「三角形の辺の比」

実践の結果から，「発展させることで数学の理解が深まる設定を工夫する」「難易度が高くなり過ぎないように配慮する」「一般化することのよさを感じられる教材を工夫する」「多様な方法を分類する活動を取り入れる」「生徒が統合的・発展的に考察することの価値を認める」等が有効であるとの示唆を得た．

エ　中 3 時の各単元において，統合的・発展的に考える活動を継続して取り入れた結果，統合的・発展的に考えようとする態度が身に付いていることが調査結果から読み取れた．

ア～エの 2015～2019 年度の研究成果を踏まえて，本稿では，中 2 の図形指導の内容の中で，これまでとは異なる統合的・発展的な考察を促す教材を開発して実践を行い，授業中の生徒の反応やワークシート，授業後の感想等を分析して，教材の有効性を検証する．

なお，本研究では，「統合的な考え方」「発展的な考え方」を，片桐（1988）を参考にしつつ，次のように規定するものとする．

＜統合的な考え方＞

多くの事象をばらばらにせず，広い観点から本質的な共通性を抽象し，同じものとしてまとめていく考え方であり，次の2つに分類できる．

［C1］複数の事象を，共通なものでまとめる．
［C2］複数の事象を，その中の1つに統合したり一般化したりする．

＜発展的な考え方＞

1つのことが得られても，さらによりよい方法を求めたり，これを基にして，より一般的な，より新しいものを発見したりしていこうとする考え方であり，次の2つに分類できる．

［E1］問題の条件を変える．
［E2］思考の観点を変える．

２．本稿の目的

本稿の目的は，中学校数学科における統合的・発展的な考察を促す図形の指導について，これまでとは異なる教材を開発して実践し，その有効性を検証することである．

３．研究の方法

以下の手順に従って，研究を進める．

(1)　中２の図形指導の内容について，過去に実践した教材とは異なる統合的・発展的な考え方を育成する効果的な教材を開発する．

(2)　(1)で開発した教材を用いて実践を行い，授業中の生徒の反応およびワークシートの記述，授業後の感想等を分析して，教材の有効性について検証する．

４．統合的・発展的な考え方の育成を重視した教材の検討

(1)　「多角形の直角の個数」の教材の検討

直角三角形の定義「1 つの内角が直角である三角形」については，小２や中２で学習する．また，長方形・正方形の性質の１つ「4 つの角が直角である」についても，小２や中２で学習する．一方で，「直角が２個ある三角形は存在しない」ことや，「直角が 1 個，2 個，4 個ある四角形は存在するが，ちょうど３個ある四角形は存在しない」ことは，特に教科書などで扱われない．しかし，後述するように，これらの性質は多角形の角の和の性質を用いれば容易に示される．さらには，n 角形の場合にも容易に発展できる．

「直角の個数」について，熊倉（2018）は，高等学校数学科における探究活動を促す教材として開発したが，中学校数学科における教材として開発・実践した先行研究は見当たらない．以下では，熊倉（2018）を参考に，中学校数学科の視点から，凸多角形の場合について考察する．

①　三角形の場合

直角が１個の場合は，直角三角形である．

もし，直角が２個あるとすると，残りの角は，三角形の内角の和が 180°なので，180－90×2＝0 となり不適．よって直角が２個ある三角形は存在しない．

同様にして，もし直角が 3 個あるとすると，90×3＝270＞180　となり不適．

②　四角形の場合

直角が，1，2，4 個の場合は，次のように存在する（図 1）．

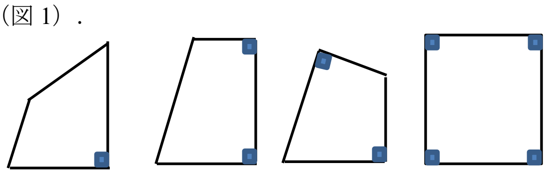


図１　四角形の直角の個数

特に２個の場合は，直角が隣り合う場合と向かい合う場合の２種類が考えられる．

もし，直角が３個あるとすると，残りの角は，四角形の内角の和が 360°なので，360－90×3＝90 となり，結果的に直角は４個になるので，直角がちょうど３個ある四角形は存在しない．

③　五角形の場合

直角の個数が 1～3 個の場合は，次のように，四角形の場合をもとに，直角をはさまない角を挟んで一辺を加えて構成すれば存在することがわかる．

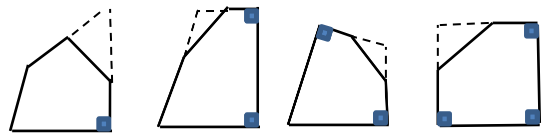


図２　五角形の直角の個数

もし，直角が４個あるとすると，残りの角は，

540－90×4＝180

となり，平角となるので不適．

また，直角が 5 個あるとすると，五角形の内角の和は 540°だから，90×5＝450＜540　となり不適．

④　*n* 角形の場合（*n*≧5）

直角が p 個あるとすると，$n \geqq 5$ より $p<n$ である．

（もし，$p=n$ なら，$180(n-2)=90n$ より $n=4$ となり，$n \geqq 5$ に矛盾する．）

$p=1,\ 2,\ 3$ のときは，五角形の場合（図 2）と同様に，直角をはさまない角を挟んで一辺を次々に加えて構成すれば存在することがわかる．

一方，残り$(n-p)$個の内角の和は $180(n-p)$°未満になるので，

$$180(n-2)-90p<180(n-p)$$

これを解いて，$p<4$

よって，直角が４個以上ある n 角形は存在しない．

n 角形の場合で，外角の和が 360°であることを用いると，次のような別の証明も可能である．

【別の証明】

直角が p 個あるとすると，$n \geqq 5$ より $n>p$ である．外角の和は 360°，直角の外角は直角であり，残り$(n-p)$個の外角の和は正になるので，

$$360-90p>0\quad より\quad p<4$$

一方，$p=1,\ 2,\ 3$ のときは，明らかに存在する．

以上の結果を整理すると，表１の通りである．

表１　多角形の直角の個数

n 角形	直角の個数 p
3	1 個
4	1 個，2 個，4 個
$n \geqq 5$	1 個，2 個，3 個

(2) 「ボロノイ図」の教材の検討

ボロノイ図とは，空間内に指定されたいくつかの点（以下，母点とよぶ）があり，同じ空間内の点がどの母点に最も近いかによって領域に分割された図形のことである（例えば，杉原，2009）．

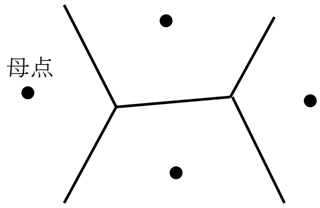


図 3　平面上のボロノイ図

2次元の平面上で考える場合，ボロノイ図の領域の境界線は，各母点を結ぶ垂直二等分線の一部である．母点の数や位置関係により，どこに境界線を引くかについて考察する必要があるが，簡単な場合であれば，後述するように，中学生でも取り組むことは可能である．またボロノイ図は，避難誘導や新店の設置など，現実事象でも様々な場面で活用されている．

「ボロノイ図」について，藤原（2008）や藤原他（2018）は，中 1 の「作図」で教材化して実践したが，中 2 の図形単元での教材として，開発・実践した先行研究は見当たらない．以下では，母点が 3 個，4個の場合の平面上のボロノイ図について考察する．

① 母点が 3 点の場合

母点を A，B，C とすると，一直線上にある場合，境界線は隣り合う母点の垂直 2 等分線になる．

母点が一直線上にない場合，境界線は図 4 のように，△ABC の各辺の垂直 2 等分線になり，3 本の境界線の交点は△ABC の外心である．

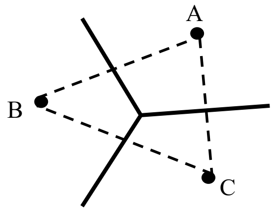


図 4　一直線上にない 3 点の場合のボロノイ図

② 母点が 4 点の場合

母点を A，B，C，D として，4 点の位置が，長方形，ひし形，平行四辺形，一般の四角形の頂点にある場合について，順に検討する．

<u>ア　4 点が長方形の頂点にある場合</u>

ボロノイ図の境界線は，AB（CD），BC（DA）の 2 本の垂直 2 等分線（実線部分）になる（図 5）．AC, BD の垂直 2 等分線は境界にはならない．（例えば BD の場合，BD の垂直 2 等分線上の点は B と D から等距離にあるが，対角線の交点を除くと，A または C からの距離の方が B または D からの距離よりも近いため．AC の場合も同様である．）

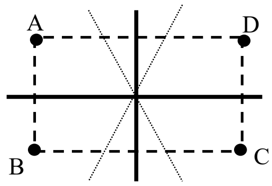


図 5　4 点が長方形の頂点にある場合のボロノイ図

<u>イ　4 点がひし形の頂点にある場合</u>

∠A＜∠D の場合，2 点を結ぶ垂直 2 等分線を引くと，ボロノイ図の境界線は，AB，BC，CD，DA，BD の垂直 2 等分線（実線部分）になる（図 6）．

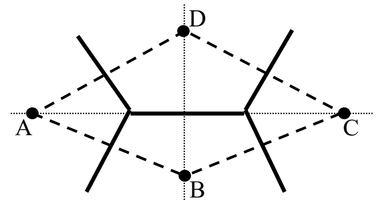


図 6　4 点がひし形の頂点にある場合のボロノイ図

AC の垂直 2 等分線は境界にはならない．（AC の垂直2等分線上の点は，A と C から等距離にあるが，B または D からの距離の方が A または C からの距離よりも近いため．）

<u>ウ　4 点が平行四辺形の頂点にある場合</u>

AB＜AD の場合，2 点を結ぶ垂直 2 等分線を引くと，ボロノイ図の境界線は，AB，BC，CD，DA，AC の垂直 2 等分線（実践部分）になり（図 7），交点 E，F はそれぞれ△ABC，△ACD の外心である．

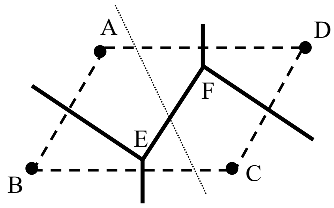


図7　4 点が平行四辺形の頂点にある場合のボロノイ図

BD の垂直 2 等分線は境界にはならない．（BD の垂直 2 等分線上の点は，A または C からの距離の方が B または D からの距離よりも近いため．）

<u>エ　4 点が一般の凸四角形の頂点にある場合</u>

図 8 のような一般の凸四角形の場合，ボロノイ図の境界線は，平行四辺形の場合と同様である．

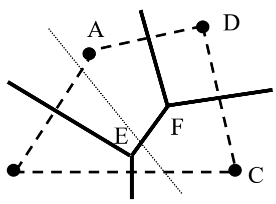


図 8　4 点が一般四角形の頂点にある場合のボロノイ図

4 点の位置関係によって，AC ではなく BD の垂直 2 等分線の一部が境界になることもある．

５．中２「多角形の直角の個数」の実践

(1)　授業の概要

中 2 の単元「図形の性質の調べ方」において，４(1)で述べた「多角形の直角の個数」の教材を扱った実践を行った．なお，授業の分析は，授業を撮影したビデオ映像，個人追究時に記述したワークシート（追究用紙），授業後の感想等をもとに行った．

①　単元計画

単元計画は表 2 の通りであり，本時は第 15 時である．

表 2　「図形の性質の調べ方」の単元計画

時間	学習内容
1 2	【対頂角，平行線の同位角・錯角】 ・対頂角，同位角，錯角の意味を理解する． ・2直線が交わってできる対頂角は等しいことを理解する． ・平行線に 1 直線が交わってできる同位角，及び錯角が等しいことを理解する． ・同位角または錯角が等しければ，2直線が平行であることを理解する．
3 4	【三角形の角の性質】 ・三角形の内角の和が180°になることを理解する． ・三角形の外角は，これと隣り合わない2つの内角の和に等しいことを理解する．
5	【「くの字」の角度を求める】 ・平行線と角，三角形の角の性質を用いて，「くの字」の角度を求める．
6 7	【「くの字」の問題を発展させる】 ・「くの字」の問題を発展させて，規則性を見出す．
8 9	【四角形の角の性質】 ・四角形の内角・外角の和は，360°になることを理解する．
10 11 12 13	【多角形の角の性質】 ・n角形の内角の和は180°×（$n-2$）で表されることを理解する． ・n角形の外角の和は 360°になることを理解する． ・星形五角形の先端の角の和は 180°になることを理解する．
14	【多角形の角の性質の利用①】 ・n角形の内角・外角の和を用いて，黒の部分と白の部分の差は何個分か説明することができる．
15 (本時)	【多角形の角の性質の利用②】 ・n角形の内角・外角の和を用いて，多角形の直角の個数について説明することができる．
16 17	【合同な図形の性質と三角形の合同条件】 ・三角形の合同条件を理解する． ・図形の合同の意味を理解する．
18 19	【証明】 ・仮定，結論，証明の意味及び証明の書き表し方を理解する．
20	【定義】 ・定義の意味及びいろいろな三角形，四角形の定義を理解する． ・鋭角，鈍角，鋭角三角形，鈍角三角形の定義を理解する．
21	単元のまとめ

②　本時の実施時期：2020 年 11 月

③　対象生徒：国立大学附属中学校 2 年生 40 名

④　授業の目標：多角形の直角の個数にきまりがあることを論理的に説明する活動を通して，多角形の内角・外角の和の性質をより深く理解したり，統合的・発展的に考察したりすることができる．

(2)　授業展開と生徒の反応

①　課題Ⅰの提示

まず初めに，三角形にはどのような名前の三角形があるのかを生徒に問いかけた．生徒からは正三角形，二等辺三角形，直角三角形，直角二等辺三角形などが出された．直角があるのは直角三角形か直角二等辺三角形だけであること，どちらも直角が 1 個しかないことを確認し，次の課題Ⅰを提示して個人追究に入った．

【課題Ⅰ】2 個以上の直角がある三角形はあるか？

②　課題Ⅰの個人追究

課題提示をした直後は，多くの生徒が，図 9 のような図をかいて考えていた．そして，「2 つ直角があると平行になるから三角形にならない」とかいていたが，なぜ 2 つ直角があると平行になるのかについての理由をかいている生徒は少なかった．

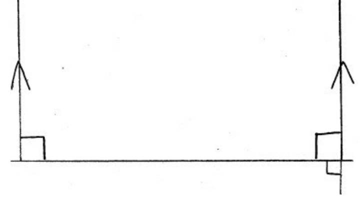


図 9　生徒が描いた図

そのため，なぜ平行になるのかを既習事項を使って説明する必要があることを伝えると，同位角や三角形の内角の性質を用いた説明をつけ加えていた．例えば，次のような考え方アが見られた．

＜考え方ア＞

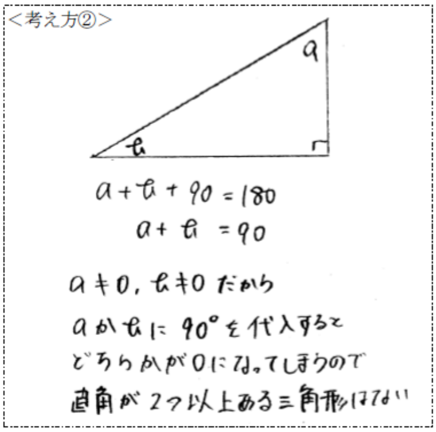


図 10　生徒の考え方ア

三角形の内角の性質を使った説明である．根拠のある説明をする生徒が増えてきたところで，小集団追究に入った．

③　課題Ⅰの小集団追究

小集団追究では，考えが出た順に検討している班が多かった．まず，平行線の図をかく考えが成り立つ理由を確認した上で，他の考え方がないか探っていた．そこでは，前述の考え方アのような考えを出した班が多く，　その説明が成り立つ理由を話し合っている様子が観察された．

④　課題Ⅰの全体追究

全体追究では，事前に指名した 3 人に発表をしてもらった．1 人目は，平行線の考えである．

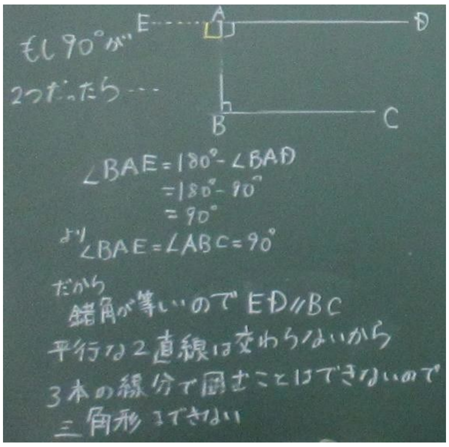


図 11　平行線の考え

多くの生徒が最初に考えていたため，理由を全体で確認するために発表をしてもらった．図だけをかいて説明するのではなく，「錯角が等しくなるため平行になり，それにより三角形を作ることができない」という根拠があることを全体で確認した．

2 人目と 3 人目の考えは，②で述べた考え方アとそれと類似の考えである．式を有効に利用することで根拠のある説明になることを，また三角形の内角や外角の性質を利用すると筋道立てて説明できることを，全体で確認した．3 人の発表から，三角形には直角が 2 個以上ないことを確認して，次の課題Ⅱに入った．

⑤　課題Ⅱの提示

「三角形は直角が 1 つしかないことが説明できた．じゃあ次は…どんなことを追究するか？」と全体に投げかけると，ある生徒が「多角形」と答えた．そこで，三角形から発展をして，次の課題Ⅱを提示した．

【課題Ⅱ】多角形では，直角の数はどうなるか？

このまま個人追究に入ると，活動にばらつきが出てしまう可能性があったため，最初に，四角形，五角形の場合を予想させた（図 12）．単に直角を増やそうと考えるのではなく，本当に直角が増やせるのか慎重に考えてほしいという意図もあった．

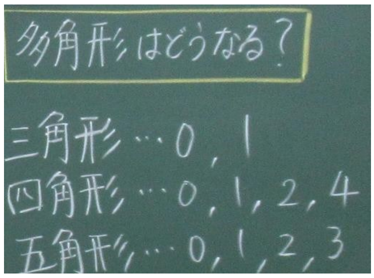
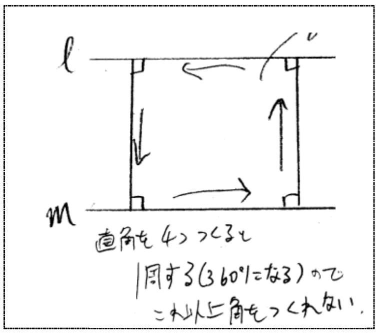


図 12　課題Ⅱの導入

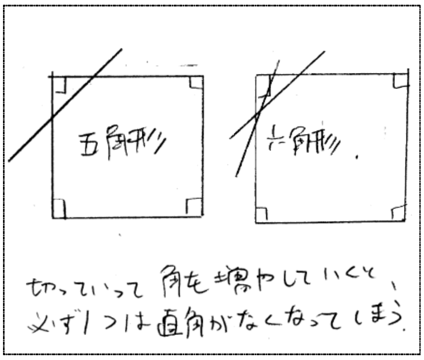
⑥　課題Ⅱの個人追究

多くの生徒は，図をかいてどのようなきまりがあるのかを探っていた．時間が進むにつれて，次のイ～エのような考えをもつ生徒が出てきた．

＜考え方イ＞



＜考え方ウ＞



＜考え方エ＞

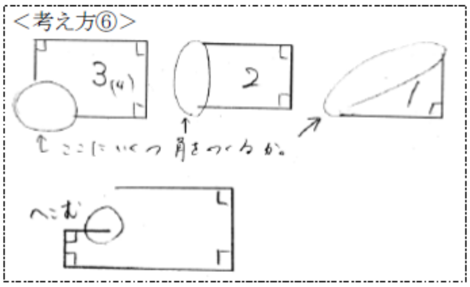


図 13　生徒の考え方イ～エ

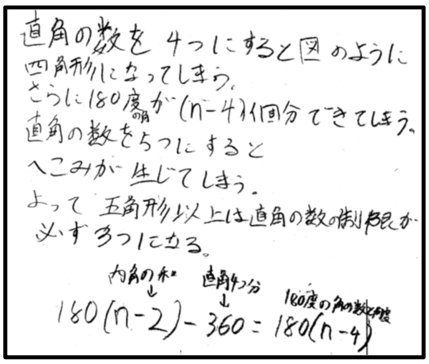
考え方イは，直角を 4 個以上作ろうとしても，図のようになってしまい，五角形や六角形にならない．だから直角が 4 個以上はできないという考えである．

考え方ウは，角の部分を直線で切ると，図のように四角形は五角形に，五角形は六角形になるが，その際に，その角は直角でなくなるので，直角が 4 個以上ある多角形は存在しないという考えである．

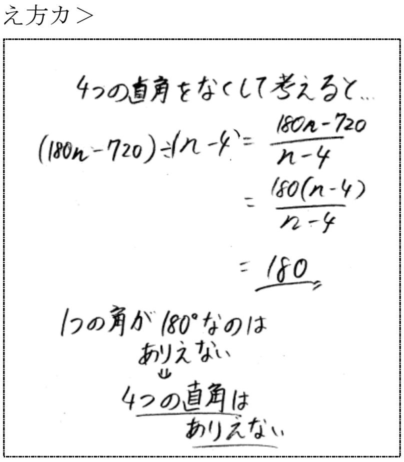
考え方エは，直角が 1～3 個の場合は，図の○の部分に角を増やすことでどのような多角形でも作れるが，直角を 4 個作ると図のように辺がすれ違う場合にへこみができ（本時では凹多角形は考えないこととした），直角 4 個では多角形ができないという考えである．

考え方イ～エはどれも図だけで説明を考えているが，どの説明も感覚的であった．そこで「もっと根拠のある説明はないか」と投げかけたところ，次のオ～キのような考え方が見られた．

＜考え方オ＞



＜考え方カ＞



＜考え方キ＞

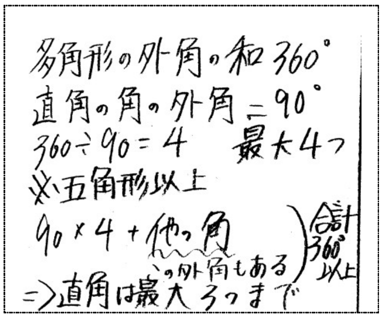


図 14　生徒の考え方オ～キ

考え方オは，n 角形の内角の和から直角 4 個分を引くと，$180(n-2)-360=180(n-4)$となり，残りの角の和は $180°\times(n-4)$となるが，直角の数を 5 個にするとへこみができてしまうため，直角 4 個はできないという考えである．

考え方カは，n 角形の内角の和から直角 4 個分を引いて，これを残りの角の数 $n-4$ でわると 180°となるため，直角 4 個はできないという考えである．しかし，直角以外の角の大きさの平均が 180°となるところまでしか説明できていなかった．

考え方キは，多角形の外角の性質を利用した考えである．多角形の外角の和は 360°，直角を 4 個作るとそれらの外角の和は $90°\times4=360°$となり，直角 4 個だけで外角の和が 360°になるので，直角 4 個以外の角はできないという考えである．

⑦　課題Ⅱの小集団追究

多くの小集団が，図や具体的な数で確認をするところから話し合いを始めていた．五角形や六角形の直角の数が 3 個以下になることを全員で確認してから，その理由について考えていた．どの班も図だけの説明や具体的な数だけの説明では根拠が弱いことを感じていて，どのようなきまりから直角の個数が 3 個以下になっているのかを探っていた．他の視点から見る必要性があることに気づいていたが，どこから考えればいいのかを探っている小集団もあった．

⑧　課題Ⅱの全体追究

4 人の生徒が順に発表した．

1 人目の発表は，考え方オを，六角形，七角形，八角形の具体的な多角形の場合に求めた考えである．しかし，根拠のある説明としては十分ではない，という生徒の反応であった．

2 人目の発表は，考え方キの考えであった．この説明を聞いて，うなずく生徒は多数であった．

3 人目の発表は，図 15 の考え方である．この考えは，n 角形の場合に，直角が a 個あるとして，直角以外の角の和を直角以外の角の数で割った角が 180° 未満であることを不等式に表したものである．この不等式の意味に，多くの生徒が納得した様子であった．

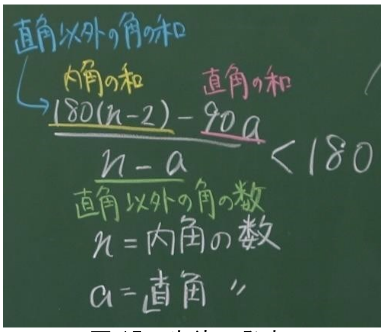


図 15　生徒の発表

しかし，この不等式の解き方がよくわからない，という反応であった．

そこで，4 人目の発表は，3 人目の発表での不等式の解き方を説明するものであった．

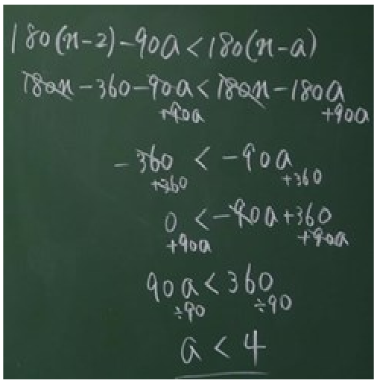


図 16　生徒の発表

両辺に同じ数を足したり掛けたりしても不等式は変わらないことを確認し，それを繰り返していくと $a<4$ という結果を見て，多くの生徒が納得をしたところで，授業を終えた．

(3)　授業の考察

第 15 時の実践を通して，「統合的・発展的な考察」を促す視点から，次の点を指摘することができる．

① 本時の授業は，まず三角形の直角の数を考え，次に多角形へと発展させる展開とした．三角形の場合を解決した後に，生徒から「多角形はどうなるのか」という発言（発展[E1]）が自然に出た．

② 授業後半では，多くの生徒が一般化した n 角形の場合を考えていた．生徒の授業中の追究用紙には，次の記述もあった．

> 1 つの学習課題を発展させて「n のときは…」と考えられてとても面白かった．

これらから，生徒が意欲的を持って統合的に考察する（統合[C2]）活動に取り組んだことがわかる．

以上の取り組みから，本教材は，統合的・発展的な考察を促す上で，有効であったと考える．

6．中 2「ボロノイ図」の実践

(1)　授業の概要

中 2 の単元「三角形と四角形」において，4 (2) で述べた「ボロノイ図」の教材を扱った実践を 2 時間扱いで行った．なお，授業の分析は，授業を撮影したビデオ映像，個人追究時に記述したワークシート（追究用紙），授業後の感想等をもとに行った．

① 単元計画

単元計画は表 4 の通りで，本時は第 17～18 時である．

表 4　単元計画

時間	学習目標
1 2 3	【二等辺三角形の性質，正三角形の性質】 ・定義の意味及びいろいろな三角形や四角形の定義を理解する． ・二等辺三角形の2つの底角が等しいことを証明しこれを理解する． ・正三角形の3つの角が等しいことを証明し，これを理解する．
4 5 6	【命題と逆，二等辺三角形・正三角形になるための条件】 ・命題の逆の意味及び，逆の命題の証明の必要性を知ることができる． ・2つの角が等しい三角形は二等辺三角形であることを証明し，これを理解する． ・3つの角が等しい三角形は正三角形であることを証明し，これを理解する．
7	【直角三角形の合同条件】 ・直角三角形においては，三角形の合同条件の他に，「斜辺と一鋭角」「斜辺と他の一辺」が等しければ合同になることを理解する．
8	【直角三角形の合同条件や正三角形の性質の利用】 ・直角三角形の合同条件を，図形の性質を利用し証明することができる． ・正三角形の性質を利用し証明することができる．
9 10	【平行四辺形の性質】 ・平行四辺形の性質を証明し，これを理解する．
11 12	【平行四辺形の性質の利用】 ・図形の性質の論証，角度や長さを求める問題に，平行四辺形の性質を利用し証明することができる
13 14 15 16	【平行四辺形になるための条件】 ・四角形が平行四辺形になるための条件を証明し，これを理解する． ・平行四辺形になるための条件を図形の性質を利用して証明することができる．

17 18 (本時)	【作図の証明とボロノイ図の意味】 ・2点の場合のボロノイ図の作図を通して中1での作図で学習した内容について根拠をもって論理的に説明し，統合的に考察することができる. 【ボロノイ図の利用】 ・点の数を増やしたボロノイ図について，発展的に考察することができる.
19	【いろいろな平行四辺形と三角形四角形の分類】 ・台形，平行四辺形，ひし形，長方形，正方形の包含関係をベン図に表し，理解する. ・平行四辺形のいろいろな性質について理解する.
20	【平行線と面積の性質】 ・三角形の面積は，中線によって二等分されることを理解する. ・平行線上に1つの共有する底辺をもち，残りの頂点が他の直線上にある2つの三角形の面積が等しいことを理解する.
21	【平行線と面積の性質の利用】 ・四角形の面積を変えないで三角形に変形するなど等積変形の考え方を利用する. ・平行線と面積の性質の理解を深め，活用することができる. ・演繹的な思考が論証だけでなく，作図にも利用できることを理解する.
22	・問題練習，単元テスト

② **本時の実施時期**：2019 年 11 月

③ **対象生徒**：国立大学附属中学校 2 年生 40 名

④ **授業の目標**：ボロノイ図を作図する活動を通して，境界線について根拠をもって論理的に説明し，中 1 での学習内容について統合的に考察するとともに，点の数を増やしたボロノイ図について，発展的に考察することができる.

(2) 授業展開と生徒の反応

① 課題Ⅰの提示と追究（第 17 時）

第 17 時は，次の【課題Ⅰ】を提示した.

> 【課題Ⅰ】A 駅と B 駅からちょうど等しい距離にある場所にカフェを建てたい．カフェを建設する候補地を作図によって求めよう.

前時までに、平行四辺形になるための条件をはじめ，図形に関する一通りの知識を習得し，それらを使いこなせるように練習をした．第 17 時では，まず「カフェの建築」という目的で，課題Ⅰを提示し追究した．多くの生徒が，2 つの駅から等距離にある場所として，2 つの駅を結ぶ線分の垂直 2 等分線を作図した．そこで，授業者から「垂直 2 等分線上の点は，2 点からの距離がなぜ等しいのか？」と投げかけて，その根拠を問うた．これに対して，当初は「垂直 2 等分線上の点は，線分の両端の点から等しい距離にある」という中 1 で学習した事実を，そのまま書いただけの生徒が複数いた．そこでさらに，授業者から「その根拠は説明できないか？」と問いかけると，垂直 2 等分線上の点が 2 つの駅から等距離にあるという理由を，中 2 で学習した三角形の合同条件を利用して，証明する生徒が見られた.

一斉での場面で，生徒が発表した証明は次の通りである.

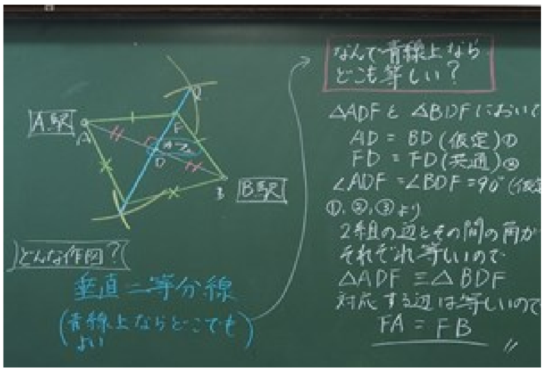
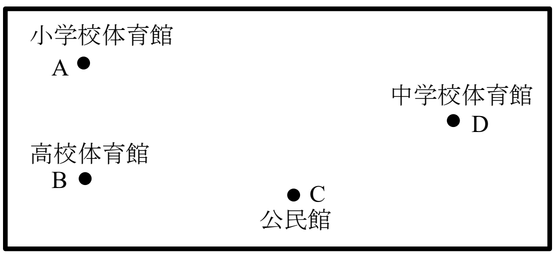


図 17 生徒が行った証明

当初は，中 1 の既習事項に対して，証明の必要性を感じなかった生徒も，最終的には三角形の合同条件を利用した証明を考える活動を通して，中 1 の作図方法について根拠をもって論理的に説明できることがわかり，統合的に考察する（統合[C2]）様子が観察された.

② 課題Ⅱの提示（第 18 時）

第 18 時では，前時の内容を振り返りながら，ボロノイ図における母点の数を 2 点から 4 点に増やし，場面設定も「カフェの建設→避難マップの作成」に変更して，次の課題Ⅱを提示した.

> 【課題Ⅱ】A さんの住む町には，災害時に 4 カ所の避難所が設けられており，各自の判断で安全に避難ができる場所に逃げるように言われている．①安全面，②最短距離，③広さや物資等，考えるポイントがたくさんある中で，②について注目した．A さんの住む町の人たちの，災害時に避難する場所について，直線距離で最短となるための避難マップを完成させよう.
>
> 
>

架空の地図を利用し，4 地点 A，B，C，D は，上記のように，AB，BC，CD，DA の垂直 2 等分線が 1 点で交わらないように配置した．

③　課題Ⅱの個人追究

個人追究は，作図にある程度の時間がかかることから，できるだけ多くの時間をとった．点（避難所）から同心円をたくさん描いて考えている生徒や，角の 2 等分線を利用して考えている生徒がいたが，ほとんどの生徒は，第 17 時の「垂直 2 等分線を引く」作業を振り返って，同じように避難地の 2 点を結び垂直 2 等分線を作図していた．しかし，作図した複数の垂直 2 等分線を組み合わせたときに，中心部分の境界線がどのような線になるのかが曖昧であった．主に次のような 2 つの作図をする生徒が見られた（図 18・19 は追究用紙をもとに，筆者らが作成）．

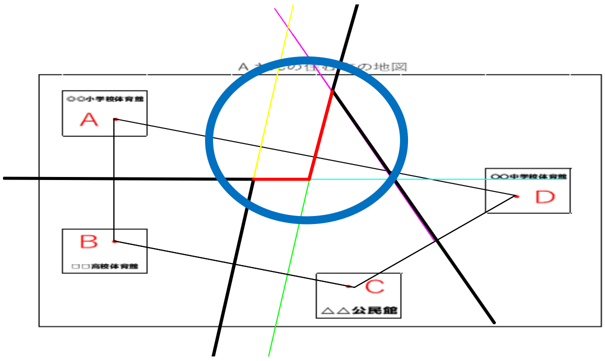


図 18　生徒の作図 1

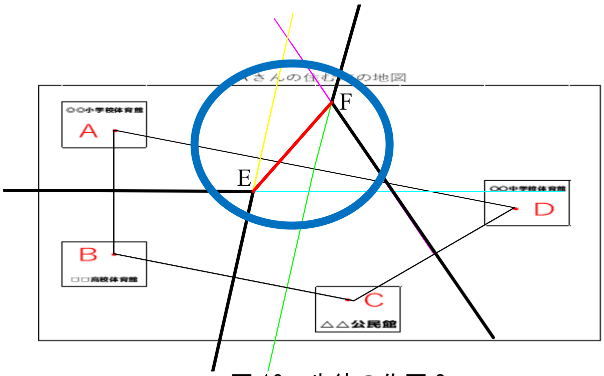


図 19　生徒の作図 2

作図 2 は，作図 1 に加えて，対角線 AC の垂直 2 等分線を引いたものである．作図 1 をした生徒が 3～4 割程度，作図 2 をした生徒が半分ほどであった．

④　課題Ⅱの小集団での追究

次に，小集団追究を行った．作図 2 をした生徒のほとんどは，なぜ赤色の線を引いてよいのか分からず，何となくつなげていたため，「赤色の線は本当に境界線になるのか」（図 19 の〇の部分）が議論の中心となった．結論がなかなか出なかったため，その疑問を全体に投げかけて，一斉で追究する展開とした．

⑤　課題Ⅱの一斉での追究

一斉では，図 19 をもとに，まず生徒 A が次の疑問を出した．

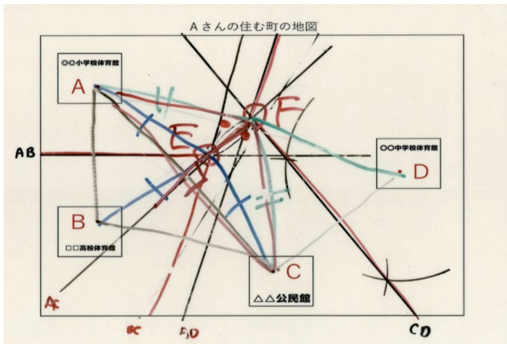
【生徒 A】僕たちの班では，AB と BC と CD と DA の垂直 2 等分線を引いたが，それらをつなぎ合わせると，中心部分がどのようになるかが議論となった．とりあえず，点 E と点 F を結んだが，なんで結んでよいのかが疑問だ．

これに対して，生徒 B は次のように説明した．

【生徒 B】点 E と点 F を結んでよい理由として，AC の垂直 2 等分線が点 E と点 F を通ると思う．だから点 E と点 F は結んでもいいと思う．

この説明に，多くの生徒が「なるほど」と納得した様子であったので，授業者から「機械的に点 E と点 F を結んだ線（生徒 A）と AC の垂直 2 等分線（生徒 B）の 2 つの線は，本当に一致するの？」と投げかけた．この問いに対して，生徒 C が次のように説明をした．

【生徒 C】A と B と C を三角形と考えて，各辺の垂直 2 等分線を引くと 1 点で交わり（外接円の中心），それが E となるので，AC の垂直 2 等分線は E を通ることがわかる．同じように考えて A と C と D の外接円の中心は F となる．だから AC の垂直 2 等分線は E と F を通る．また，可能性として，B と D を結んだ垂直 2 等分線も引くことができるが，この線は明らかに関係のない線なので，考えなくてもいいと思う．



この説明には，ほとんどの生徒が納得した様子であった．多くの生徒が数学的に説明することのよさを実感することができたと考えられる．

(3)　授業の考察

第 17 時，18 時の実践を通して，統合的・発展的な考察を促す視点から，次の点を指摘することができる．

① 生徒の授業後の感想に「1 年生の作図のときにやった性質を 2 年生の知識で証明することで，より説得力がありわかりやすかった．」とあった．授業中の生徒の考察する様子と合わせて，中 1 の作図と中 2 の合同の学習を統合的に考察する（統合[C2]）ことができたと考えられる．

② 授業後に「もとの 4 カ所の避難地の位置と，中心

部分にできる四角形の形には何か秘密があるのではないか」と考え，自ら問題を発展させて考察し（発展[E1]），レポートにまとめた生徒もいた（図 20）.

以上の取り組みから，ボロノイ図の実践が，統合的・発展的な考察を促す上で，有効であったと考えられる.

7　今後の課題

今後の課題として，次の 2 点を挙げる.

(1)　中学校の図形指導について，さらに「統合的・発展的な考察」を促す教材を開発して実践する.

(2)　図形以外の領域でも「統合的・発展的な考察」を促す教材の開発・実践を行い，中学校 3 年間を通した指導の在り方を追究すること.

＜引用・参考文献＞

藤原大樹(2008)「学区を考え直そう」下田好行他編著『中学校数学の教材開発・授業プラン』学事出版. pp.69-75.

藤原大樹・水谷尚人ほか 4 名(2018)「中 1 での図形指導の改善-数学的モデリングを活かした作図の指導-」日本数学教育学会誌第 100 回大会特集号，p.264.

福田允(2009)「学校数学における発展的な考え方の指導に関する一考察-「式を読む」ことに着目して-」第 42 回数学教育論文発表会論文集，pp.181-186.

橋本吉貴(2001)「算数・数学科における「発展的な考え方」に関する考察」日本数学教育学会誌，83 巻 9 号，pp.10-17.

片桐重男(1988)『数学的な考え方の具体化』明治図書.

加藤健二・杉山篤史・熊倉啓之(2018)「総合的・発展な考え方の育成を重視した中学校数学科における図形指導」静岡大学教育実践総合センター紀要，No.28，pp.97-106.

加藤健二・杉山篤史・熊倉啓之(2020)「総合的・発展な考察を促す図形指導」静岡大学教育実践総合センター紀要，No.30，pp.244-253.

菊池平一(1997)「統合的，発展的に考察する」新しい算数研究，No.313，東洋館，pp.6-9.

熊倉啓之(2018)「高等学校数学科における探究活動を促す論証教材の開発」静岡大学教育実践総合センター紀要，No.28，pp.89-96.

杉原厚吉(2009)『なわばりの数理モデル－ボロノイ図からの数理工学入門』共立出版.

鈴木直・加藤健二・熊倉啓之(2016)「発展的な考え方の育成を重視した中学校数学科における図形の指導」静岡大学教育実践総合センター紀要，No.25，pp.43-52.

鈴木直・加藤健二・熊倉啓之(2017)「統合的・発展的に考える活動を重視した中学校数学科における図形指導」静岡大学教育実践総合センター紀要，No.26，pp.45-54.

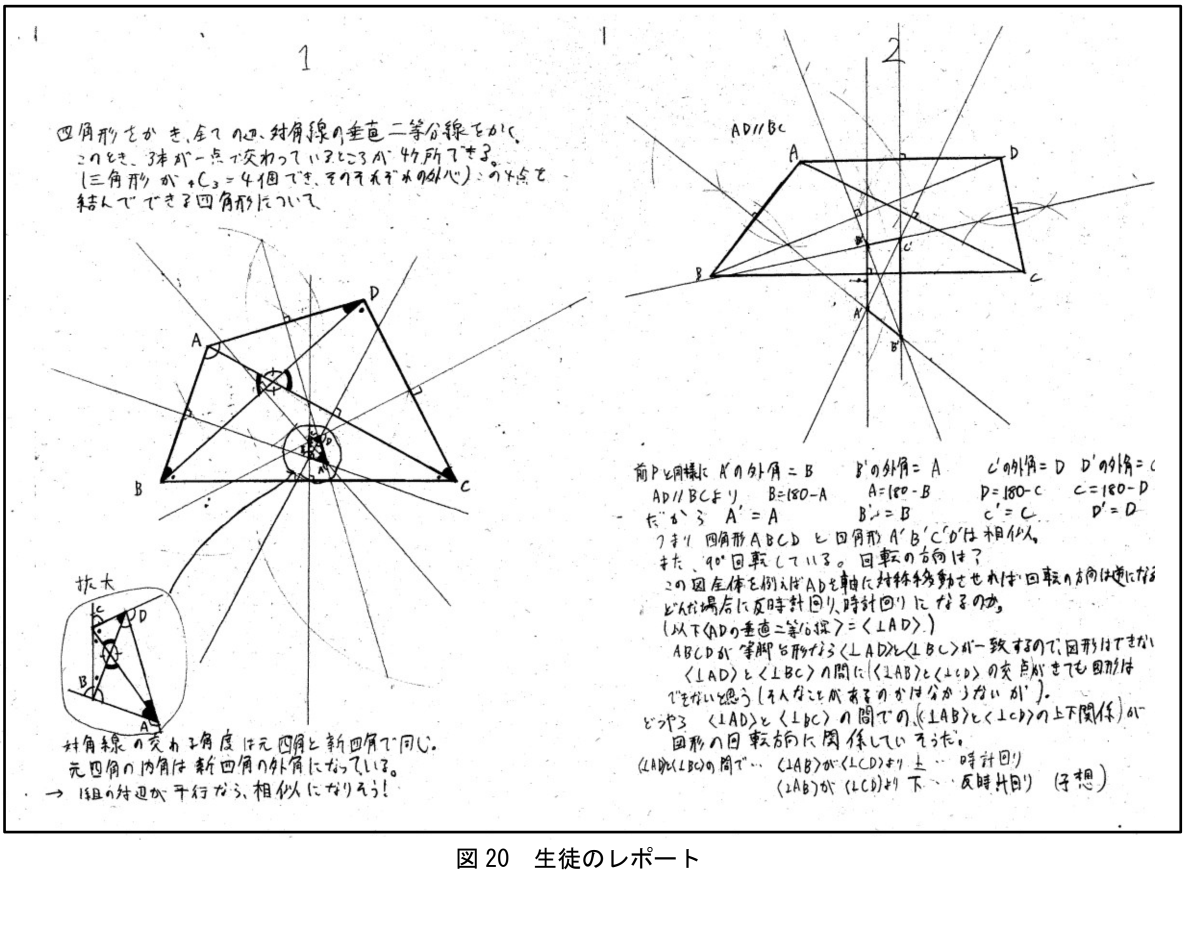


図 20　生徒のレポート