Teaching of Geometry to Promote Comprehensive and Expansive Thinking in Junior High School : Development of teaching materials and Practiced of “Investigation of the properties of figures” and “Pythagorean theorem”

教育実践報告

中学校数学科における統合的・発展的な考察を促す図形指導
ー「図形の性質の調べ方」と「三平方の定理」での教材開発と実践ー

杉山　篤史*・美澤　将史*・松元　新一郎**・山田　耕三**
(*静岡大学教育学部附属島田中学校　**静岡大学教育学部)

Teaching of Geometry to Promote Comprehensive and Expansive Thinking in Junior High School

Development of teaching materials and Practiced of "Investigation of the properties of figures" and "Pythagorean theorem"

Sugiyama Atsushi, Misawa Masashi, Matsumoto Shinichiro, Yamada Kohzo

要　旨

本研究は，中学校数学科における統合的・発展的な考察を促す図形の指導について，これまでとは異なる教材を開発して実践し，その有効性を検証することを目的とする．そのために，中 2 の単元「図形の性質の調べ方」で「星型五角形の発展」について，また中 3 の単元「三平方の定理」で「正方形の中の正方形」について，それぞれ教材化して実践を行った．授業中の生徒の様子や授業後の感想等から，統合的・発展的に考察する活動が多く観察され，教材の有効性を示すことができた．

キーワード：統合的・発展的な考察，星型五角形の発展，正方形の中の正方形，リボン型（ちょうちょ型）

1．はじめに

本研究は，「統合的・発展的な考察」に焦点を当て，中学校数学科における統合的・発展的な考察を促す図形指導のあり方を追究することを目的とする．

これまでに，本研究では，以下のア～エの4点を明らかにしてきた(加藤他，2018；加藤他，2020；加藤他，2021；鈴木他，2016；鈴木他，2017).

ア　中学校の教科書を分析した結果，発展的な考え方を育成するような問題設定は，教科書では扱いが少ない.

イ　発展的な考え方に関する先行研究を分析した結果,発展的な考え方をいくつかのタイプに分類することができ(橋本，2001；片桐，1988；菊池，1997)，その中で「広い意味での問題の条件を変える」タイプの実践(例えば，福田，2009)は，必ずしも多く実践されていない.

ウ　「広い意味での問題の条件を変える」タイプの実践として，以下の教材を開発して実践を行った．

中1「図形の移動の方法を考える」
中2「くの字の法則を見つける」
中2「くり抜いた図形の角の和」
中2「三角形の対称軸の本数」
中2「多角形の直角の個数」
中2「ボロノイ図」
中3「相似な図形の面積比」
中3「三角形の辺の比」

実践の結果から，「発展させることで数学の理解が深まるように設定を工夫する」，「難易度が高くなり過ぎないように配慮する」，「一般化することのよさを感じられる教材にする」，「多様な方法を分類する活動を取り入れる」，「生徒が統合的・発展的に考察することの価値を認める」等が有効であるとの示唆を得た.

エ　中 3 時の各単元において，統合的・発展的に考える活動を継続して取り入れた結果，統合的・発展的に考えようとする態度が身に付いていることが調査結果から読み取れた.

ア～エの 2015～2020 年度の研究成果を踏まえて，本稿では，中 2 と中 3 の図形の内容の中で，これまでとは異なる統合的・発展的な考察を促す教材を開発して実践を行い，授業中の生徒の反応や授業後の感想等を分析して，教材の有効性を検証する．

なお，本研究では，「統合的な考え方」，「発展的な考え方」を，片桐(1988)を参考にしつつ，次のように規定するものとする．

＜統合的な考え方＞

多くの事象をばらばらにせず，広い観点から本質的な共通性を抽象し，同じものとしてまとめていく考え方であり，次の2つに分類できる．

［C1］複数の事象を，共通なものでまとめる．

［C2］複数の事象を，その中の1つに統合したり一般化したりする．

＜発展的な考え方＞

1つのことが得られても，さらによりよい方法を求めたり，これを基にして，より一般的な，より新しいものを発見したりしていこうとする考え方であり，次の2つに分類できる．

［E1］問題の条件を変える．

［E2］思考の観点を変える．

２．本稿の目的

本稿の目的は，中学校数学科における統合的・発展的な考察を促す図形の指導について，これまでとは異なる教材を開発して実践し，その有効性を検証することである．

３．研究の方法

以下の手順に従って，研究を進める．

(1)　中 2，中 3 の図形指導の内容について，過去に実践した教材とは異なる統合的・発展的な考え方を育成する効果的な教材を開発する．

(2)　(1)で開発した教材を用いて実践を行い，授業中の生徒の反応およびワークシートの記述，授業後の感想等を分析して，教材の有効性について検証する．

４．統合的・発展的な考え方の育成を重視した教材の検討

(1)　「図形の性質の調べ方」における教材の検討

中 2 で図形の論証指導が本格的に始まる．本単元「図形の性質の調べ方」では，対頂角や平行線の同位角・錯角，三角形や n 角形の内角・外角の和などについて学習する．それらの既習事項を活用することを目的として，教科書でもよく扱われているのが星型五角形である．

この星型五角形をさらに発展させた「星型五角形の発展」を教材化することについて検討する．一般に星形多角形は，円状に並んだ n 個（n≧3）の点から 1 点を選び，その点から時計方向，または反時計方向に k 点（2≦k+1<n/2）飛ばしで線分で結ぶことによって作成される（もちろん n と k の値によっては一筆で書けない場合や星形多角形の図形が書けない場合もある）．このとき，星形多角形の尖った角の和（図 1 の緑色の角，以下単に，星形多角形の内角の和という）を求める教材はよく用いられる（たとえば，髙橋，2004）．

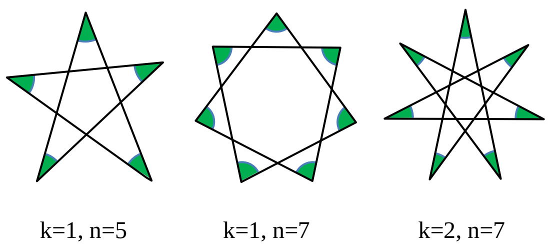


図 1　k 個飛ばしの星形 n 角形の例

また，一般に k 点飛ばしで作られた星形 n 角形の内角の和が

$180\{n-2(k+1)\}°$　・・・①

で与えられることも既に知られている事実である（たとえば，前田，2001）．

今回の実践では，まずは奇数個の頂点を持つ 1 つ飛ばしで作られた星形多角形を，それぞれの角の大きさを変えずに変形した図形を準備し，その図形の角の個数を変化させた図形を教材とする．すると，既に角度を保存したままでは星形には戻せない，星形とは異なる図形になってしまうが，星形多角形の内角に相当する角の和については ① の k=1 の場合と同じ公式が得られる．この公式は，多角形の内角の和や星形五角形の内角の和を求めるときの考え方を応用して導き出せるが，中学生でも十分に対応できる教材となっている．まずは，用いる教材の具体的な作成方法について説明する．以下，「1 つ飛ばし」の用語は省略する．

最初に図 2 のような星形五角形 ABCDE を考え，辺 DE に平行な線分（赤線）D’ E’を，線分 D’ E’が 3 点 A，B，C で作られる △ABC の内部にあるように引き，右図の図形に変形する．ここで線分 D’C と線分 AE’の交点を F としておく．このとき，図 2 の左右の図において，D’ E’を DE と平行になるように引いたので 5 つのそれぞれの角（緑色の角）の大きさは変化していない，よってこれらの角の大きさの和（以下，単に角の和という）も変化していないことに注意する．

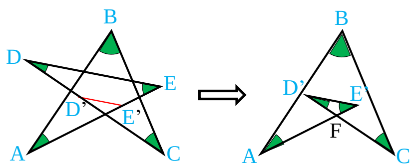
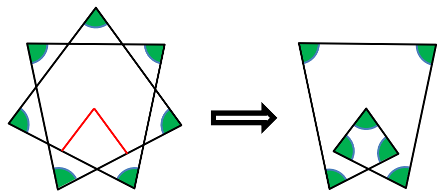
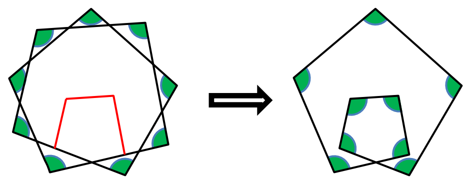


図 2　星型五角形の変形

同様にして，星形七角形，星形九角形においても図 3 のように数本の平行線分を引き，緑の角の和を変えないように変形する．



星形七角形の場合



星形九角形の場合

図 3 星形七角形と星形九角形の変形

そこで，今回の実践では，図 2 及び図 3 の右側の図

形に着目して，外側の多角形（図 2 では△ABC）及び内側の多角形 （図 2 では△D’E’F）の緑の頂点の数をそれぞれ変化させた図形を題材とする．一般に，図 4 のように外側の多角形の緑の角の個数を k，内側の多角形の赤色の角の個数を m，k+m=n とおいたとき，既に星形多角形の図形とは異なる図形であるにもかかわらず，緑と赤の角の和に関して ① の k=1 の場合の公式が得られるが，授業では個人追求及び小集団での追求を通して生徒達が主体的にこの公式を求める授業実践を行う．

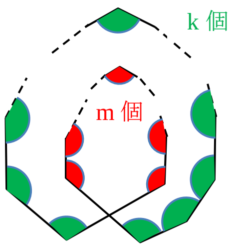
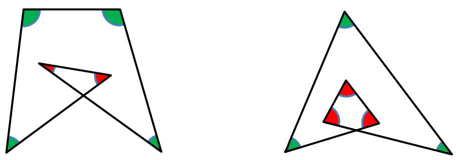


図 4 外側の角の個数 k，内側の角の個数 m

① の k=1 の場合の公式を求める方法について n(=k+m) が 6 と 7 の場合を例にしてその概略を述べる．

ⅰ．n=6 の場合

上記のルールに従って n=6 とするとき，図 5 のような 2 つのパターンが考えられる．



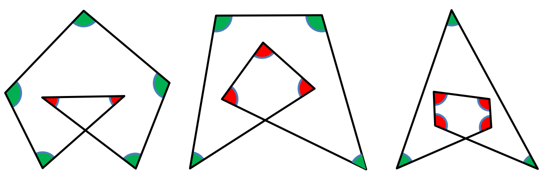
k=4， m=2　　　k=3， m=3

図 5 n=6 個の場合

この 2 つのパターンのいずれにしても緑と赤の角の和は 360° となる．求め方については次の n=7 の場合についてその概略を述べる．

ⅱ．n=7 の場合

角の数を 7 個に増やすと，図 6 のような 3 つのパターンが考えられる．

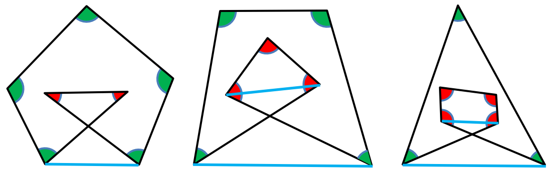


ア．k=5, m=2　イ．k=4, m=3　ウ．k=3, m=3

図 6 n=7 個の場合

この 3 つのパターンのいずれの場合も，角の和は 540° となる．ここでは例として，次の 2 つの方法を紹介する．

1 つ目の求め方は，図 7 のように，ア，イ，ウのそれぞれの外側の図の下の 2 頂点を線分（青線）で結び，さらにイとウに関しては，内側の図の下の 2 点も線分（青線）で結ぶ．

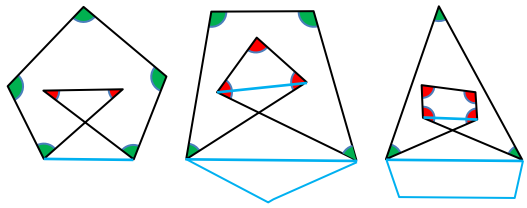


ア．k=5, m=2　イ．k=4, m=3　ウ．k=3, m=3

図 7 1 つ目の方法の補助線を引いた図

そこで，外側と内側にできる多角形に着目すると
ア：緑と赤の角の和 ＝ 外側の五角形の内角の和
イ：緑と赤の角の和 ＝ 外側の四角形の内角の和
＋内側の三角形の内角の和
ウ：緑と赤の角の和 ＝ 外側の三角形の内角の和
＋内側の四角形の内角の和
となることがわかる．よっていずれの場合も緑と赤の角の和は 540° である．

2 つ目の求め方は，まず図 7 と同じ線分を引き，さらに図 8 のようにイとウに関しては，外側の多角形の底辺の下に，内側と同じ角数の多角形をかく（内側の多角形と合同でなくてもよい）．



ア．k=5, m=2　イ．k=4, m=3　ウ．k=3, m=3

図 8 2 つ目の方法の補助線を引いた図

すると，緑と赤の角の和は，いずれの場合も最も外側にできる五角形の内角の和と等しくなるので 540° となる．

ⅲ．一般の n(=k+m) の場合

一般に，図 4 のように外側の多角形の緑の角数を k，内側の多角形の赤の角数を m，k+m=n とおいたとき，ⅱにおける 1 つ目の考え方を用いると緑と赤の角の和は，

$$180(k-2)^\circ + 180(m-2)^\circ = 180\{(k+m)-4\}^\circ = 180(n-4)^\circ$$

で与えられ，2 つ目の考え方を用いると緑と赤の角の和は，

$$180\{(n-2)-2\}^{\circ} = 180(n-4)^{\circ}$$

で与えられる．

(2)　「三平方の定理」の教材の検討

中３で学習する「三平方の定理」は，実験的な数学的活動から導入する事例が多く，出版社の多くがこの導入事例を教科書に載せている．利便性の高い定理だからこそ，導入時に今までとは違ったアプローチをすることによってインパクトを強め，より興味を持って学習に臨めると考えた．

そこで，実験的な数学的学習以外の導入事例として，「正方形の中の正方形」を教材化することについて検討する．以下では，小畑(2010)の「ななめの面積は？」を参考に教材を検討する．

小畑は具体的な数での活動を元にして，「a 等分 b ずらし」の場合において最も小さい正方形の(a^2+b^2)個分の面積が元の正方形と等しくなることを，表に着目して類推的・帰納的に導いた上で，等積変形をして三平方の定理につなげる活動を展開しており，(a^2+b^2)になる理由についての活動は行っていない．それに対して，本研究では，生徒が具体的な数での活動を元にして，「a 等分 b ずらし」の場合において最も小さい正方形の(a^2+b^2)個分の面積が元の正方形と等しくなる理由を，図形に着目して統合的・発展的に説明できることをねらいとして教材を考察する．

①　「2 等分 1 ずらし」の場合

正方形を縦，横両方とも 2 等分する．そのときにできた線分と元の正方形の辺を，縦の線分ならば下の頂点を 1 つ左の交点へ，横の線分ならば右の頂点を 1 つ下の交点へずらす．これを「2 等分 1 ずらし」とすると，次のような図(図 5)ができる．本研究では，統合的・発展的に授業を展開しやすくするために，あえて「2 等分 1 ずらし」と表現することとした．

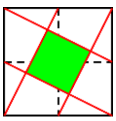


図 9　「2 等分 1 ずらし」の場合

三角形の合同や相似を使うと，できる四角形（図 9 の緑の図形）が正方形になることがわかる(図 10).

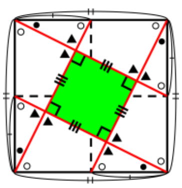


図 10　中にできる四角形が正方形になる

図 10 から，もとの正方形の面積は，斜めに引いた線で囲まれた，最も小さい正方形の 5 個分の面積と等しくなる．

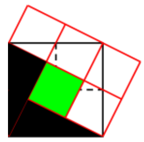


図 11　「2 等分 1 ずらし」の解法

②　「3 等分 1 ずらし」「3 等分 2 ずらし」の場合

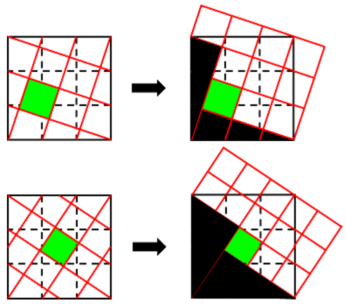


図 12　「3 等分 1 ずらし」「3 等分 2 ずらし」の場合

図 12 のように考えると，「3 等分 1 ずらし」は 10 個分，「3 等分 2 ずらし」は 13 個分となる．

③　「a 等分 b ずらし」の場合

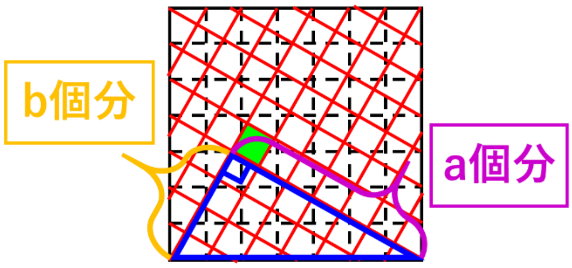


図 13　a=7，b=4 ずらしの場合

一般に「a 等分 b ずらし」においては，例えば，図 13 のようになり，図 12 で示した「3 等分 1 ずらし」「3 等分 2 ずらし」の時と同様に，移動させた直角三角形の直角をつくっている辺がそれぞれ，最も小さい正方形の面積の a 個分と b 個分になる．これを基に移動させた後の図形について考えてみると，図 14 のようになる．

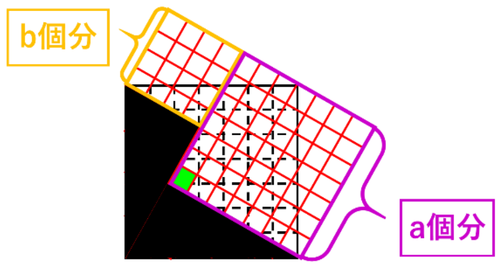


図 14　「a 等分 b ずらし」で移動させた後の図

図 14 から，「a 等分 b ずらし」の場合において，

①　最も小さい正方形（緑の正方形）(a^2+b^2)個分の面積がもとの正方形の面積と等しくなる．

という結果が得られる．

さらに，図 14 の最も小さい正方形の b 個分である黄色い太線の正方形を図 15 のように移動すると，この正方形の一辺の長さは，黒で塗りつぶした直角三角形の直角を挟む 2 辺のうち短い方の辺の長さと等しくなることがわかる．

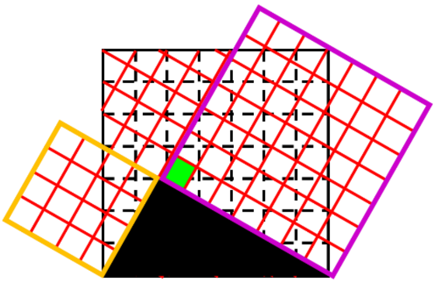


図 15　黄色い太線の正方形を移動した図

このことより，黒で塗りつぶした直角三角形の直角を挟む 2 辺のうち，短い方の辺を一辺とする正方形の面積は黄色い太線の正方形の面積と等しく，長い方の辺を一辺とする正方形の面積は紫の太線の正方形の面積と等しいことがわかる．また，もとの正方形の面積は，黒で塗りつぶした直角三角形の斜辺を一辺とする正方形の面積と等しい．すなわち，①の結果は，黒で塗りつぶした直角三角形における三平方の定理を表していることになる．

５．中 2「図形の性質の調べ方」の実践

(1)　授業の概要

中 2 の単元「図形の性質の調べ方」において，4(1)で述べた「星型五角形の発展」の教材を扱った実践を行った．

なお，授業の分析は，授業を撮影したビデオ映像，個人追究時に記述したワークシート（追究用紙），授業後の感想等をもとに行った．

①　単元計画

単元計画は表 2 の通りであり，本時は第 16 時である．

表 2　「図形の性質の調べ方」の単元計画

時間	学習内容
1 2	【ユークリッドの公理を知る】 ・ユークリッドの 5 つの公理を，図と共に理解する．
3 4	【対頂角，平行線の同位角・錯角】 ・対頂角，同位角，錯角の意味を理解する． ・2 直線が交わってできる対頂角は等しいことを理解する． ・平行線に 1 直線が交わってできる同位角，及び錯角が等しいことを理解する． ・同位角または錯角が等しければ，2 直線が平行であることを理解する．
5 6	【三角形の角の性質】 ・三角形の内角の和が 180° になることを理解する． ・三角形の外角は，これととなり合わない 2 つの内角の和に等しいことを理解する．
7 8	【「くの字」の角度を求める】 ・平行線と角，三角形の角の性質を用いて，「くの字」の角度を求める．
9 10	【「くの字」の問題を発展させる】 ・「くの字」の問題を発展させて，角度の規則性を見出す．
11	【「ブーメラン型」の角の性質】 ・「くの字」から発展させた「ブーメラン型」の図形（凹四角形）の内側の角と外側の凹みの角の関係について考える．
12	【「ブーメラン型」の問題を発展させる】 ・「ブーメラン型」の図形（凹四角形）を発展させて，角度の規則性を見出す．
13	【四角形の角の性質】 ・四角形の内角・外角の和は，360° になることを理解する．
14	【多角形の角の性質】 ・n 角形の内角の和は 180° ×(n−2)で表されることを理解する． ・n 角形の外角の和は 360° になることを理解する．
15	【星形五角形の先端の角の和を求める】 ・星形五角形の先端の角の和は 180° になることを理解し，多様な方法で説明する．
16 (本時)	【「星形五角形」の問題を発展させる】 ・「星形五角形」を発展させて，角度の規則性を見出す．
17 18	【「くり抜き図形」の内側の角度を求める】 ・五角形から五角形をくり抜いた図形の内側の角度の和を求める． ・n 角形から m 角形をくり抜いた図形の内側の角度の和を求める．
19 20	【合同な図形の性質と三角形の合同条件】 ・三角形の合同条件を理解する． ・図形の合同の意味を理解する．
21 22	【証明】 ・仮定，結論，証明の意味及び証明の書き表し方を理解する．
23	【定義】 ・定義の意味及びいろいろな三角形，四角形の定義を理解する． ・鋭角，鈍角，鋭角三角形，鈍角三角形の定義を理解する．
24	単元のまとめ

②　本時の実施時期：2021 年 11 月

③　対象生徒：国立大学附属中学校 2 年生 36 名

④　授業の目標：自ら図形を発展させて，角の数と角度の和の関係について考えることを通して，角度の和を一般化した式で表現できる．

(2)　授業展開と生徒の反応

① 課題の提示

前時の図形を提示し，角の数が 5 個だということを確認した．

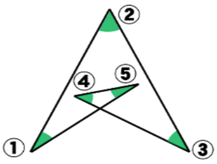


図 16 前時に提示した図形

そして課題として，角の数が 6 個，7 個，8 個，…になった場合どんな図形になるか，を考えさせた．

【課題】角の数が 6 個，7 個，8 個，…になったときどんな図形になるだろう．またその時の角度の和を求めよう．

角の数が 6 個の場合は生徒から 2 つの図形が示されたため，その図形の指定した部分の角度の和を求めた．

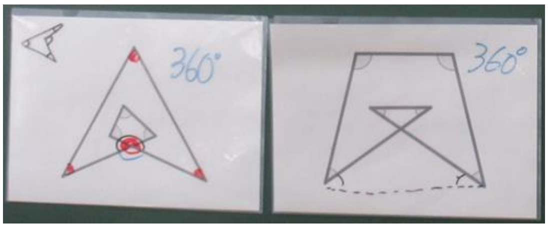


図 17 生徒が示した２つの図形

図 17 左のように既習のブーメラン型と対頂角を利用して四角形の内角の和と同じになるという説明と，図 17 右のように既習のリボン型（ちょうちょ型）を利用して四角形の内角の和と同じになるという説明を全体で扱った．そこで，形が違っても角の数が 6 個の時は 360° になることを共有した．

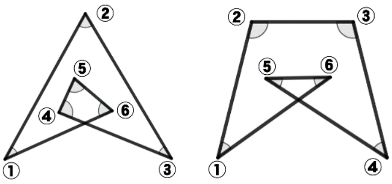


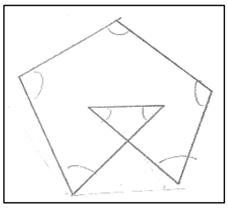
図 18 外側 4・内側 2（三角形）と外側 3・内側 3（四角形）

ここで，角の数が 6 個の場合は図形が複数あることが共有された．さらに，生徒が個人追究時にスムーズに課題を発展させるために，角の数だけでなく，2 つの図形の違いについて，図 18 右では外側の角が 4 つで内側の角が 2 つ，図 18 左では外側の角が 3 つで内側が 3 つというように，外側と内側で分けて考えることもできることに触れた．また，内側を三角形や四角形と見ることができるなど，発展するためのポイントや図形の特徴を全体で共有し，個人追究へと入った．

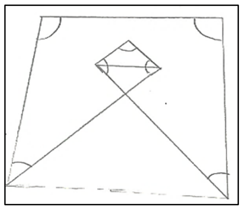
② 個人追究

個人追究では，角の数に着目して発展させて，様々な規則性を探していた．

＜考え方ア＞



＜考え方イ＞



＜考え方ウ＞

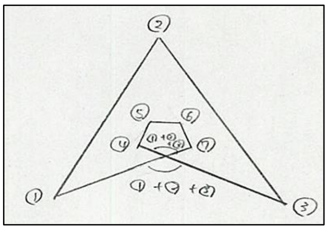
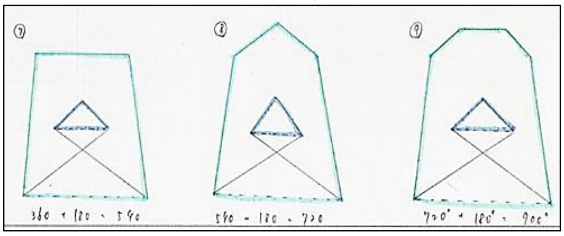


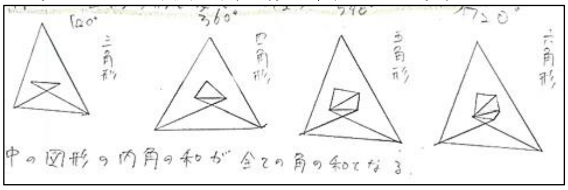
図 19 生徒の考え方ア～ウ（角の数が 7 個を考察）

図 19 は角の数に注目し，まず角の数が 7 個から考え始めた生徒の考えである．角の数が 7 個でも，複数の図形が考えられることから，多くの生徒がまず角の数が 7 個の図形を描いて関係性を考えていた．7 個の時も 6 個の時と同じように，リボン型（ちょうちょ型）やブーメラン型，多角形の内角の和を根拠として角の和が 540° になることを説明していた．

＜考え方エ＞内側の角の数を固定して考察



＜考え方オ＞外側の角の数を固定して考察



＜考え方カ＞外側の角の数を固定して考察後，外側の角の数を 1 つずつ増やして考察

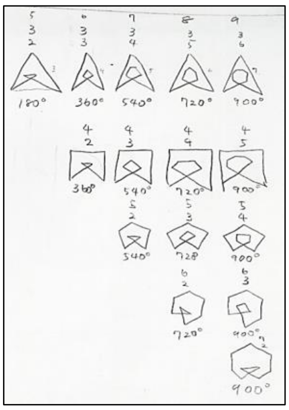


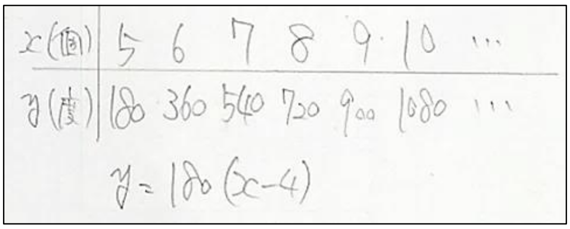
図 20 生徒の考え方エ～カ

図 20 のように，外側や内側の角の数の一方を固定し

て，発展させていく方法をとっている生徒も多くいた．

7 個について考えた生徒は，その後に 8 個，9 個，…と数を増やして規則性を見つけていた．

＜考え方キ＞表にまとめて関数的に捉えて考察



＜考え方ク＞角度の増え方から関数的に捉えて考察

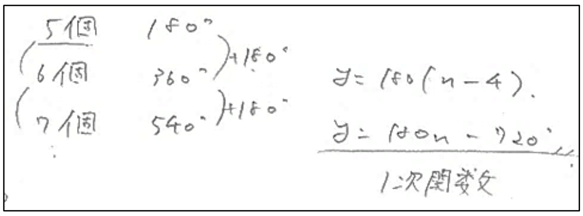


図 21　生徒の考え方キ～ク（関数的に捉える）

図 21 のように，角の数を 7 個，8 個，…と増やしていく中で，角の数と角の和を関数的に捉えて「表」を利用して，関係性を見つけようとしている生徒もいた．そこから y＝180×(n−4)という式を導き，「1 次関数になる」と，追究用紙に書いている生徒もいた．

図形を発展させて考えた後，規則性や関係については，文字を利用して一般化した式で表そうとしていた．

表された一般式は，以下の 3 種類である．

1 点目は，角の総数を n 個として，180×(n−4)という一般式を導いたパターンである(図 22)．

＜考え方ケ＞角の総数を n 個として考察

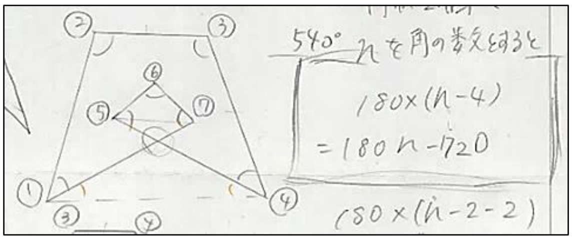
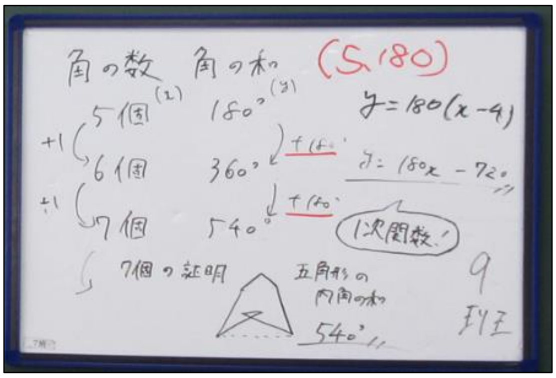


図 22　生徒の考え方ケ

2 点目は，内側と外側を分けて考え，外側の角の数を n 個，内側の角の数を m 個と考えて 180×(n＋m−4)という式を導いたパターンである(図 23)．

＜考え方コ＞



＜考え方サ＞

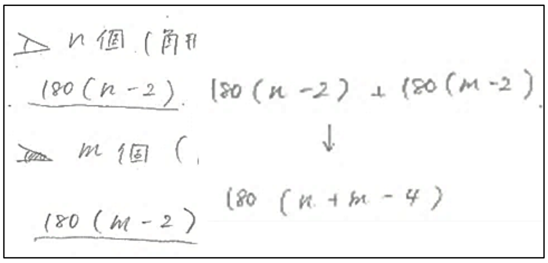


図 23　生徒の考え方コ～サ（外側の角の数と内側の角の数を文字において考察）

3 点目は，内側と外側を分けて考え，外側を n 角形，内側を m 角形と考えて，180×(n＋m−5)という式を導いたパターンである(図 24)．

＜考え方シ＞外側を n 角形，内側を m 角形として考察

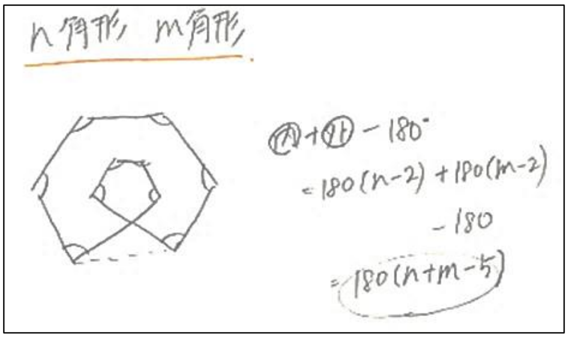


図 24　生徒の考え方シ

多くの生徒が発展した図形の中に規則性を見つけた様子を見て，小集団へと移った．

③　小集団追究

小集団追究では，図形の発展の仕方を説明し，そこからわかる法則が正しいかを確認するのが主な活動となった．図形を発展させることはできたが，規則性まで見つけることができなかった生徒もいたため，規則性を見つけた生徒が説明をしている場面も多く見られた．

小集団の中で，同じ発展の方法でも一般化できた生徒と，途中までしか考えられていない生徒がいた．そのような小集団では，角の数と角の和の関係について根拠をはっきりとさせ，式の形で表そうとする姿が見られた．

文字をどう置くかで一般化してできる式に違いがあり，その違いについて検討している小集団も見られた．

規則性が見いだせた小集団には，ホワイトボードにまとめるよう指示し，全体での発表へと繋げた．

④　全体追究

全体追究では，2 つの考えを全体で確認した．

1 つは，角の総数を n 個として導いた，180×(n−4)という考えである．この式を導く考え方はたくさんあったが，多くの生徒が「角の総数を n 個」と考えていたため，この考えを始めに発表させた．

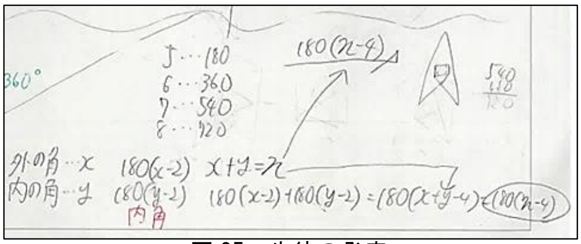


図 25　生徒の発表

全体で発表させた考え方は，関数的に考え，規則性を見いだして一般化した式を求めていた．関数的に見ることができることを強調するために，「1 次関数」という言葉もホワイトボードに見られた．

発展の仕方や角度の和の求め方を説明した後，一般化した式である 180×(n−4)が何を表しているのかを説明した．

もう 1 つは，外側の角の数を n 個，内側の角の数を m 個として導いた，180×(n＋m−4)という考えである．外側と内側の角の個数を分けて考えた生徒であり，一般化した式の形がもう 1 つの考えと違っていたため，全体で発表させた．

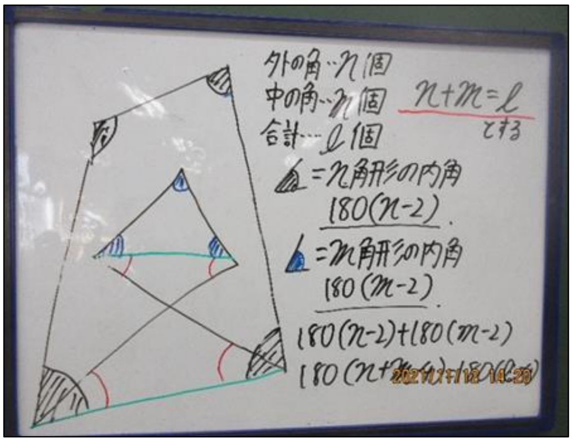


図 26　生徒の発表

その後，2 つの式を見比べて，違いについて全体で確認する時間となった．180×(n−4)の「n」と，180×(n＋m−4)の「n＋m」が同じことを表していることを全体で確認できた．180×(n−4)の式は，図形の形に依らず角の総和に注目する式であると言える．一方で，180×(n＋m−4)の式は図形の形が変わると n や m に代入する値が変わるが，「n＋m」の値が同じになる場合，即ち角の数の和が同じ場合は角度の総和が同じになることが読み取りやすい．そのような一般式の比較を行い，図形の形が変わっても，角の和が同じであれば，結果が同じになることを全体で確認して，授業を終えた．

(3)　授業の考察

第 16 時の実践を通して，「統合的・発展的な考察」を促す視点から，次の点を指摘することができる．

本時の授業は，前時の星型五角形から角の数を 6 個にした場合を考え，そこから 7 個，8 個，…と発展させる展開とした．6 個の場合を考えた後に，生徒が自然と 7 個，8 個，…と自分から発展させていた．また，授業の後半では，多くの生徒が n 個の場合を考えていた．

生徒の考え方を見てみると，多くの生徒が既習事項であるブーメラン型やリボン型（ちょうちょ型）の考えを活用していた．このような生徒の表れから，既習事項を基に発展させていく様子や，統合するためには既習事項が活用できることなどが読み取れた．

これらのことから，本教材は，統合的・発展的な考察を促す上で，有効であったと考える．

6．中 3「三平方の定理」の実践

(1)　授業の概要

中 3 の単元「三平方の定理」について，4(2)で述べた「正方形の中の正方形」の教材を扱った実践を行った．

なお，授業の分析は，授業を撮影したビデオ映像，個人追究時に記述したワークシート（追究用紙），授業後の感想等をもとに行った．

①　単元計画

単元計画は表 3 の通りで，本時は第 1 時である．

表 3　単元計画

時間	学習内容
1 (本時)	【三平方の定理】 ・もっとも小さな正方形の面積の何個分がもとの大きな正方形の面積になるのかを考える活動を通して，三平方の定理やその意味について理解する．
2 3 4	【三平方の定理の証明】 ・三平方の定理には，様々な証明方法があることを理解する． ・三平方の定理が証明できる． ・三平方の定理を使って，長さを求めることができる．
5	【三平方の定理の利用Ⅰ】 ・2つの三角定規の3辺の長さの比を求め，これを問題解決に活用できる．
6 7	【三平方の定理の利用Ⅱ】 ・図形の問題解決に三平方の定理を活用できる． ・3辺の長さのわかる三角形の面積を求める． ・グラフ上の2点間の距離を求める．
8 9	【三平方の定理の逆】 ・3辺a，b，cに$a^2+b^2=c^2$の関係が成り立つ三角形は，直角三角形になる（三平方の定理の逆）ことを理解する． ・三平方の定理の逆を，問題解決に活用することができる．
10	【三平方の定理の利用Ⅲ】

	・立体図形の問題解決に三平方の定理を活用できる.
11 12	【三平方の定理の利用Ⅳ】 ・正方形の中にできる最も大きな正三角形の1辺の長さを求める. ・正四面体の体積を求める.
13 14	【三平方の定理の利用Ⅴ】 ・正方形の中におうぎ形を４つかいたときに，重なる部分の面積を求める.
15	単元のまとめ

② **本時の実施時期**：2021 年 11 月

③ **対象生徒**：国立大学附属中学校 3 年生 36 名

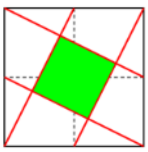
④ **授業の目標**：もっとも小さな正方形の面積の何個分がもとの大きな正方形の面積になるのかを考える活動を通して，三平方の定理やその意味について理解することができる.

(2) 授業展開と生徒の反応

① 課題Ⅰの提示

課題Ⅰは見ただけではわかりにくいものであるため，PowerPoint を使って丁寧に課題提示を行った．これにより，追究途中での生徒の混乱は見られず，課題解決に集中することができた.

【課題Ⅰ】もとの大きな正方形の面積は，ずらしてできたもっとも小さな正方形の面積の何個分でしょうか.



この図を【2 等分 1 ずらし】と名付け，課題について考えるように全体で確認をしてから，個人追究へと入った.

② 課題Ⅰの個人追究

大きく分けて，2 パターンの考えが出されていた．1 点目は，図 27 のように図形の一部を切り取って他の場所に移動して考える方法である.

＜考え方ス＞図形の移動と証明に着目して考察

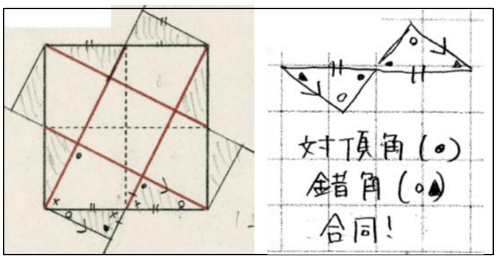


図 27　生徒の考え方ス

三角形を切り取って他の場所に移動すると，正方形が 5 個できることが図からわかる．この考えをしている生徒が全体の 5 割ほどいた．ただ，切り取った三角形が図で示した場所に移動できるという確証がない．移動できることを証明する必要があると感じて，証明している生徒もいた.

＜考え方セ＞区切られた図形の面積を利用して考察

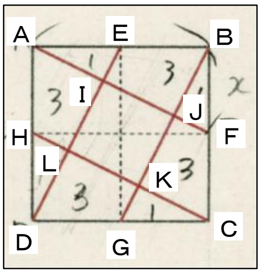


図 28　生徒の考え方セ

2 点目は，図 28 のように，区切られた図形の面積を利用して考える方法である．小さな直角三角形(△KGC など)の面積を 1 とすると，相似な三角形の面積比を利用して図のように表すことができる．正方形 ILKJ の面積が 4 となるため，(正方形 ILKJ の面積)＝4，(正方形 ADCB の面積)＝20 となる．よって，5 個分ということがわかる.

＜考え方ソ＞マス目を利用して考察

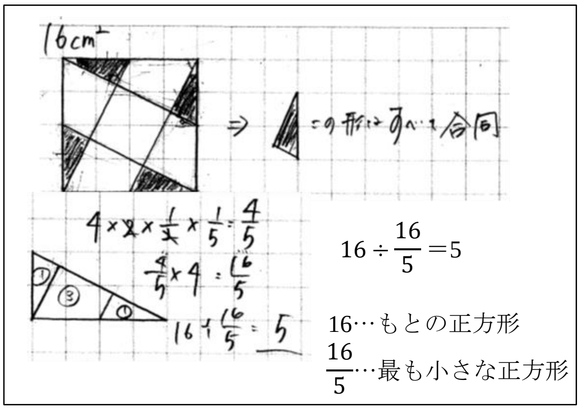


図 29　生徒の考え方ソ

図 29 は，追究用紙のマス目を利用して，初めの正方形を 4×4 に合わせてかくことで求めやすくしている．他にも，関数の考えを使って考えている生徒もいた．ある程度考えが深まった様子を見て，小集団追究に移った.

① 課題Ⅰの小集団追究

単元の導入ということもあり，どのような考えを用いて解くのがよいのか，予想すら立っていない生徒がほとんどであった．図形を移動させる考え，相似な図形の性質を利用する考え，関数的な考えなど，個人追究のときに出された様々な視点から生まれた考えを見てもわかった．そのため，小集団追究ではお互いの考えを説明し合うことに時間を費やしていた.

④ 課題Ⅰの全体追究

全体追究では，次の活動につなげることを意識して，意図的に発表者を指名して発表させた.

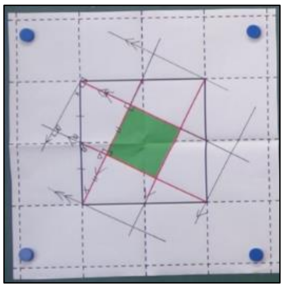


図 30　生徒の発表（図形の移動に着目①）

図形を移動させて考えると次の課題Ⅱのときも効率よく解けること，図を見るだけで答えが明確にわかること，そして他の考えよりも多くの生徒が図 30 の考えをしていたことから，図 30 の考えを発表させた．

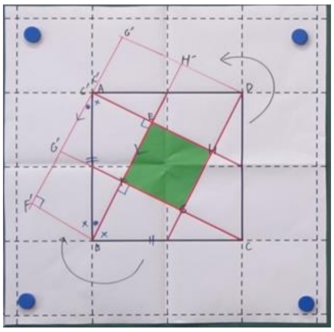


図 31　生徒の発表（図形の移動に着目②）

図 31 の考えも図形を移動して考えているが，移動の仕方が少し違うため，発表をさせた．図 30 の移動は【2 等分 1 ずらし】では有効だが，等分する数やずらす数を変えるとうまく活用できない．それに引き換え，図 31 のように移動の仕方を工夫すると，規則性が見えやすくなる．図形の移動の仕方を変えるとまた違った考えができること，図形は区切られた図形ずつ移動するのではなくまとめて移動する方法もあること，この 2 つのことも次の課題Ⅱを解く際にポイントとなるため，全体で確認した．

ここで，解き方のポイントや答えとともに，以下のように板書をした．

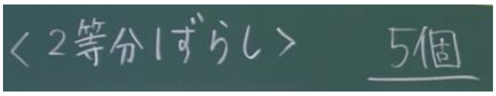


図 32　実際の板書

この板書を見て，ある生徒が「【2 等分 1 ずらし】があるなら，【3 等分 1 ずらし】もあるんじゃないかな…．」とつぶやいた．そのつぶやきをきっかけに，次の課題Ⅱへと移ることにした．

【課題Ⅱ】等分する数やずらす数を変えるとどうなる？

課題Ⅱは以上のように示したが，全員が等分する数やずらす数をバラバラに考えるときまりが見つけにくくなることや，意見交換をする際に話し合いが深まりにくくなることが考えられたため，まずは全員で【3 等分 1 ずらし】を考えてから，等分する数やずらす数を変えて追究するように伝えて個人追究へと入った．

②　課題Ⅱの個人追究

課題Ⅰの全体追究で図形を移動させると効率よく求められることを確認したためか，多くの生徒が図形を移動させて考えていた．どの生徒も【3 等分 1 ずらし】が何個分になるのかを考え終えると，自然と等分する数やずらす数を変えて，規則性がないかを探していた．規則性を探す方法として，大きく分けて 2 パターンに分かれた．1 点目は，図 29 のように等分する数やずらす数と何個分になるのかを数字で並べて規則性を見つけるパターンである．

＜考え方タ＞等分する数やずらす数を 1 つずつ変えて考察

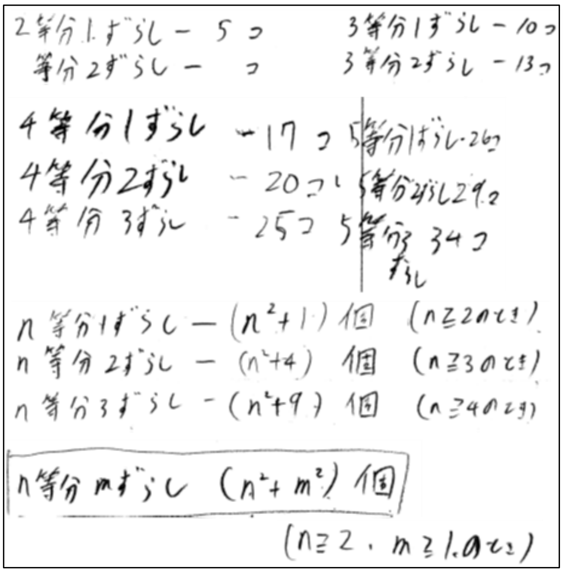


図 33　生徒の考え方タ

図 33 を考えた生徒はなんとか規則性を見つけるところまで漕ぎ着けたが，この方法で考えていた多くの生徒は規則性を見つけるところまでたどり着けていなかった．追究用紙にはかかれていなかったが，並べた数字だけを見ていたのではなく，図形を見て規則性に気づいた可能性もある．全体的な様子を見ると，数字を並べるだけでは規則性を見つけることは難しいことのように思われる．

２点目は，図形から規則性を見つけるパターンである．この方法からも，いくつかの考えが出された．

＜考え方チ＞縦(等分する数)＋(ずらす数)，横(等分する数)－(ずらす数)の長方形を作って考察

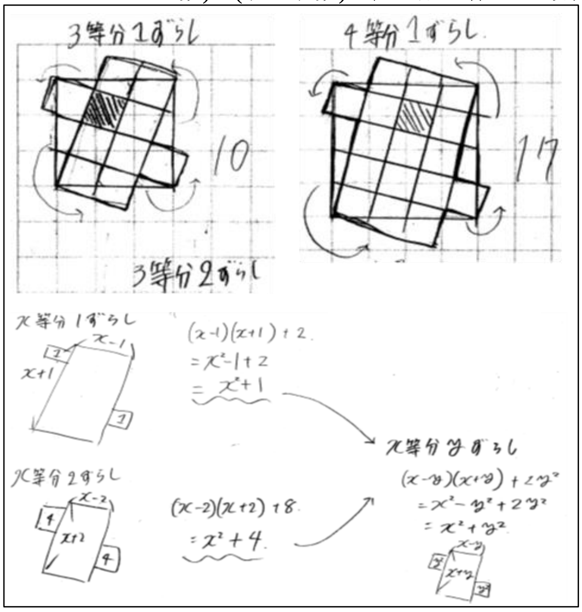


図 34　生徒の考えチ

図 34 は，図形を移動して縦が(等分する数)＋(ずらす数)，横が(等分する数)－(ずらす数)の長方形を作ると，その長方形の左右に 1 つずつ，一辺が(ずらす数)の正方形ができる．(長方形の面積)＋(2 つの正方形の面積)＝$(x+y)(x-y)+2y^2=x^2-y^2+2y^2=x^2+y^2$ となるため，【x 等分 y ずらし】の場合は，(x^2+y^2)個分となる．

＜考え方ツ＞直角三角形 4 つと正方形 1 つに分けて考察

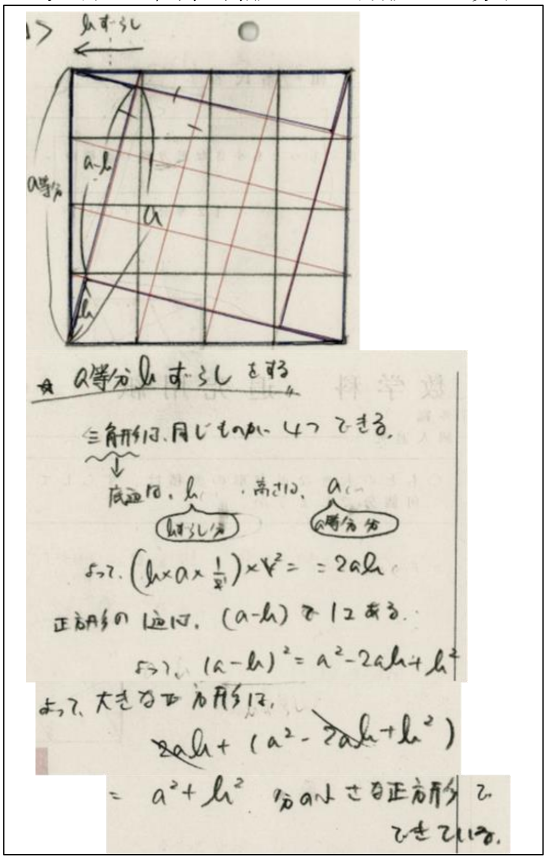


図 35　生徒の考え方ツ

図 35 は，最も小さな正方形の一辺を 1 として，【a 等分 b ずらし】の場合にどうなるのかを考えている．もとの大きな正方形を，直角三角形 4 つと正方形 1 つに分ける(図 36)．

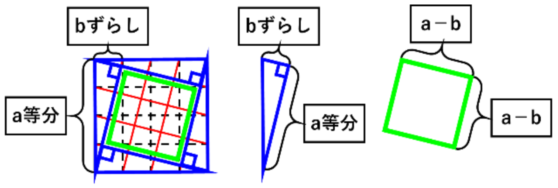


図 36　直角三角形 4 つと正方形 1 つに分けて考える

平行線と比の定理を使うと，直角三角形の底辺と高さがそれぞれ a 個分と b 個分で表される．よって，直角三角形の面積は$a\times b\times\frac{1}{2}\times 4=2ab$ となる．正方形の一辺は，直角三角形の斜辺以外の長い辺と短い辺の差になるため，$a-b$ となる．よって，正方形の面積は，$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ となる．これより，もとの大きな正方形の面積は，$2ab+a^2-2ab+b^2=a^2+b^2$ となるため，【a 等分 b ずらし】の場合は，(a^2+b^2)個分となる．

課題Ⅰの全体追究で確認をしたように，図形の移動の仕方を少し工夫することによって，規則性を見えやすくしていることがわかる．このような工夫が，時間が経つごとに少しずつ増えていった．時間を費やして深く追究をしていくうちに，なんとなく見えていた規則性が，図形からも説明ができるようになってきたことがわかる．この様子を見て，小集団追究へと切り替えた．

③　　課題Ⅱの小集団追究

個人追究で考えたことが正しいのかどうか，方向性や結果も含めて確認をしていた．今回出てくる図形や数字は規則性が見えにくいため，個人追究で自分の考えをまとめきれない生徒が多くいた．そのため，結果まで導くことができた考えを，感心して聴いている様子が印象的であった．「(a^2+b^2)個分」という結果を見て，実際にそうなっているのかを確かめている生徒も見られた．お互いに考えを出し合って確認ができたところで，全体追究で発表させた．

⑦　課題Ⅱの全体追究

様々な考えが出てきたが，最終的には三平方の定理へのつながりに意識を集中させたかったため，発表は 1 つの考えだけにした．

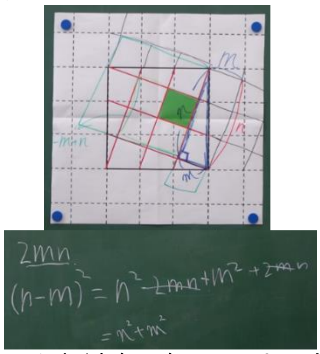


図 37　生徒の発表(直角三角形 4 つと正方形 1 つ)

多くの小集団で規則性が見えてきていたこともあり，この発表を聴いて納得している生徒が多くいた．全体でこの規則性について共有したところで，三平方の定理とつながることを押さえ，授業を終えた．

⑶　授業の考察

第 1 時の実践を通して，「統合的・発展的な考察」を促す視点から，次の点を指摘することができる．

本時の授業は，「正方形の中の正方形」という教材を用いて，【2 等分 1 ずらし】の場合にもとの正方形の面積は最も小さな正方形の面積の 5 個分になることを求め，そこから等分する数やずらす数を変える展開であった．生徒のつぶやきから発展する展開や，生徒が自ら等分する数やずらす数を変えて一般化する様子から，意欲的に統合的・発展的な考察をしていることが読み取れる．また，生徒の授業後の感想から，「最終的に三平方の定理にたどりつくことにびっくりした」と書かれていた．統合的に考察した結果が定理につながる経験から，統合に対する一定の価値が得られたことが考えられる．

これらのことから，本教材は，統合的・発展的な考察を促す上で，有効であったと考える．

７．今後の課題

今後の課題として，次の 2 点を挙げる．

(1)　中学校の図形指導について，さらに「統合的・発展的な考察」を促す教材を開発して実践する．

(2)　図形以外の領域でも「統合的・発展的な考察」を促す教材の開発・実践を行い，中学校 3 年間を通した指導の在り方を追究すること．

＜引用・参考文献＞

福田允(2009)．学校数学における発展的な考え方の指導に関する一考察-「式を読む」ことに着目して-．日本数学教育学会第 42 回数学教育論文発表会論文集，181-186.

橋本吉貴(2001)．算数・数学科における「発展的な考え方」に関する考察．日本数学教育学会誌，83(9)，10-17．https://doi.org/10.32296/jjsme.83.9_10

片桐重男(1988)．数学的な考え方の具体化．明治図書.

加藤健二・杉山篤史・熊倉啓之(2018)．統合的・発展的な考え方の育成を重視した中学校数学科における図形指導．静岡大学教育実践総合センター紀要，28，97-106．https://doi.org/10.14945/00024664

加藤健二・杉山篤史・熊倉啓之(2020)．中学校数学科における統合的・発展的な考察を促す図形指導．静岡大学教育実践総合センター紀要，30，244-253．https://doi.org/10.14945/00027127

加藤健二・杉山篤史・熊倉啓之(2021)．中学校数学科における統合的・発展的な考察を促す図形指導：「多角形の直角の個数」と「ボロノイ図」の教材開発と実践．静岡大学教育実践総合センター紀要，31，315-324．https://doi.org/10.14945/00027931

菊池兵一(1997)．統合的，発展的に考察する．新しい算数研究，313，6-9，東洋館.

熊倉啓之(2011)．数学的な思考力・表現力を鍛える授業 24．明治図書.

前田琢磨(2001) ．ループによる星形多角形の内角の和の公式，日本数学教育学会誌，83(7)，2-9.

小畑裕(2010)．数・式の性質に気付かせる発問．教育科学数学教育，635，10-15．明治図書.

鈴木直・加藤健二・熊倉啓之(2016)．発展的な考え方の育成を重視した中学校数学科における図形の指導．静岡大学教育実践総合センター紀要，25，43-52．https://doi.org/10.14945/00009430

鈴木直・加藤健二・熊倉啓之(2017)．統合的・発展的に考える活動を重視した中学校数学科における図形指導．静岡大学教育実践総合センター紀要，26，45-54．https://doi.org/10.14945/00010138

髙橋健二(2004) ．正 n/m 角形の内角の和を求めよう，明治図書・数学教育，557，76-81.